ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1962

Ю. А. РЫЛОВ

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Произведено отображение кривого пространства-времени на континуум плоских пространств $E_{x'}$, зависящих от координат произвольной опорной точки x'. Гравитационное поле описывается с помощью тензорных потенциалов в духе двухметрического формализма [1, 2]. Потенциалы гравитационного поля зависят от двух точек: текущей точки x и опорной точки x'. Это позволяет локализовать гравитационное поле, не нарушая принципа эквивалентности. Получены интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, при этом тензор энергии-импульса является истинным тензором, зависящим от двух точек x и x'.

Согласно теории тяготения Эйнштейна силы тяготения проявляются в искривлении и только в искривлении пространства-времени, поэтому, если мы рассматриваем малую по сравнению с радиусом кривизны область пространства-времени, то тяготением мы можем пренебречь и рассматривать область как плоскую. Именно это выражает принцип эквивалентности, утверждающий, что надлежащим рассмотрением поле тяготения может быть устранено в любой отдельной точке пространства-времени. Иначе это истолковывают как невозможность локализации гравитационного поля. Конечно, можно локализовать гравитационное поле, отказавшись от принципа эквивалентности [1, 2], но такая точка зрения нам представляется неприемлемой. Таким образом, с точки зрения принципа эквивалентности бессмысленно спрашивать, есть ли поле тяготения в данной точке безотносительно к системе координат. Однако имеет определенный смысл вопрос о наличии поля в точке x по отношению к полю в точке x' безотносительно к системе координат. Пусть, например, в точке x' гравитационное поле нуль. Это условие определяет гравитационное поле в точке x, хотя и не вполне. Оказывается, возможно указать такую инвариантную процедуру, что условие обращения гравитационного поля в нуль в точке x' полностью определяет гравитационное поле в точке x. Такое описание поля будет по необходимости двухточечным, но оно позволяет в некотором смысле локализовать гравитационное поле во всех точках по отношению к произвольной точке x' (назовем ее опорной точкой), где поля нет. Ценным свойством такой локализации является то, что она не противоречит принципу эквивалентности.

Пусть в пространстве-времени (обозначим его V_4) имеется некоторая система координат K. Пусть x' произвольная точка V_4. Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство $E_{x'}$, касательное к V_4 в точке x'. Отобразим V_4 на $E_{x'}$ таким образом, чтобы геодезические, проходящие через x' в V_4, отображались в прямые в $E_{x'}$, углы, образуемые геодезическими в точке x', остались неизменными при отображении, а интервалы от произвольной точки M в V_4 и ее образа M^* в $E_{x'}$ до точки x', измеренные вдоль геодезических соответственно в V_4 и $E_{x'}$, были одинаковы. Такое отображение одно-однозначно в области, где геодезические, выходящие из x', не пересекаются. При таком отображении система координат K в V_4 отображается в систему координат $K_{x'}$ в $E_{x'}$. Теперь координаты x^α нумеруют как точки пространства V_4, так и точки пространства $E_{x'}$. Пусть теперь $g_{\mu\nu}(x)$, $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ и $G_{\mu\nu}(x, x')$ $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, x')$ суть метрический тензор и символы Кристоффеля соответственно в V_4 в системе координат K и в $E_{x'}$ в системе координат $K_{x'}$. Вообще прописными буквами будем обозначать двухточечные величины, а строчными — одноточечные. Тензор

$$Q^\alpha_{\beta\gamma}(x, x') = \gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \tag{1}$$

будет описывать поле тяготения в точке x. Равенство $Q^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ есть необходимое и достаточное условие евклидовости пространства V_4. Величина $Q^\alpha_{\beta\gamma}$ в отличие от символов Кристоффеля является тензором, кроме того,

$$[Q^\alpha_{\beta\gamma}] = 0. \tag{2}$$

Здесь квадратные скобки означают, что положено $x = x'$. По существу (2) представляет собой инвариантную формулировку принципа эквивалентности.

Таким образом, совмещение принципа эквивалентности с идеей перехода от риманова пространства к евклидову достигается здесь путем введения не одного, а континуума евклидовых пространств, зависящих от параметров — координат опорной точки. Заметим, что по существу всякое риманово пространство представляет собой набор бесконечно малых евклидовых пространств «сшитых» определенным образом, причем способ «сшивания» определяет характер пространства. Здесь мы предлагаем заменить набор бесконечно малых евклидовых пространств набором конечных пространств. Этому соответствует переход от бесконечно малого интервала ds к конечному интервалу $S(x, x')$. Мы увидим дальше, что в двухточечном описании гравитационного поля главную роль играет мировая функция Синга [3]. $G(x, x') = {}^1/_2\, S^2(x, x')$, где $S(x, x')$ интервал между точками x и x', измеренный вдоль геодезической.

Так как нам в дальнейшем придется оперировать с двухточечными величинами, в частности с двухточечными тензорами (сокращенно двутензорами), то условимся, что индексы без штрихов относятся к точке x, а индексы со штрихом — к точке x'. Далее, когда это не приводит к недоразумениям, будем опускать аргумент, имея в виду, что наличие или отсутствие штриха у индексов указывает на аргумент, например: $g^{\alpha'\beta'}$ есть $g^{\alpha'\beta'}(x')$, $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ есть $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$. Обычные производные будем обозначать символом ∂ или запятой перед соответствующим индексом, ковариантные производные с символами Кристоффеля $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ или $\gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$ — значком ∇ или вертикальной черточкой перед соответствующим индексом. Ковариантные производные в соприкасающемся пространстве $E_{x'}$ с символами Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ (мы их будем называть касательными производными) будем обозначать символом $\tilde{\nabla}$ или двумя вертикальными черточками перед соответствующим индексом. Наличие или отсутствие штриха у индекса производной указывает на то, что производная берется соответственно по x' или по x.

Определенные выше $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $G_{\mu\nu}$ следующим образом связаны с мировой функцией G [4]

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = G^{\alpha\delta'} G_{\beta\gamma\delta'}, \qquad (3)$$

где $G^{\alpha\delta'}$ и $G_{\beta\gamma\delta'}$ определяются соотношениями

$$G^{\alpha\delta'} G_{\gamma\delta'} = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

$$G_{\alpha\delta'} \equiv G_{\delta'\alpha} \equiv \partial_{\alpha}\partial_{\delta'} G, \qquad G_{\beta\gamma\delta'} \equiv \partial_{\delta'}\partial_{\gamma}\partial_{\beta} G. \qquad (4)$$

Здесь G — мировая функция Синга. $G_{\mu\nu}$ имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \widetilde{\nabla}_{\mu}\breve{\nabla}_{\nu} G = \breve{\nabla}_{\mu}\partial_{\nu} G = \partial_{\mu}\partial_{\nu} G - \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} G_{\gamma}, \qquad (5)$$

$$G_{\gamma} \equiv \partial_{\gamma} G, \qquad G_{\gamma'} \equiv \partial_{\gamma'} G.$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$G^{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} G_{\beta} = G^{\alpha\beta} G_{\beta} = G^{\alpha\beta'} G_{\beta'}, \qquad (6)$$

где $G^{\alpha\beta}$ определяется соотношением

$$G^{\alpha\beta} G_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \qquad (7)$$

Пусть $P^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}$ — тензор параллельного переноса в $E_{x'}$ из точки x в точку x', определяемый соотношением

$$a_{\alpha'} = P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot} a_{\beta},$$

где a_{β} — произвольный вектор в точке x, а $a_{\alpha'}$ — вектор в точке x', полученный из a_{β} параллельным переносом в $E_{x'} \cdot P^{\cdot\beta}_{\alpha'}$, выражается через мировую функцию следующим образом [4]:

$$P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot} = - G_{\alpha'\gamma} G^{\beta\gamma}, \qquad (8)$$

где $G_{\alpha'\gamma}$ и $G^{\beta\gamma}$ даются формулами (4), (5), (7). $P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot}$ обладает свойствами

$$[P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot}]_{x=x'} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \qquad P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot\,||\lambda} = 0. \qquad (9)$$

Таким образом, все величины, характеризующие соприкасающееся пространство $E_{x'}$ просто выражаются через производные мировой функции, которая является характеристикой риманова пространства. Это указывает на то, что соприкасающееся пространство $E_{x'}$ и способ отображения риманова пространства на него не являются каким-то произвольным построением, чуждым риманову пространству, а, наоборот, являются естественными характеристиками риманова пространства, вытекающими из его геометрии.

Нашей целью является переход от описания поля тяготения в пространстве V_4 к описанию его в плоском пространстве $E_{x'}$ с тем, чтобы, воспользовавшись однородностью пространства $E_{x'}$ с помощью теоремы Нетер получить интегральные законы сохранения и выражения для тензоров энергии — импульса и момента количества движения.

Пусть

$$S(x') = \int\limits_{\Omega} L(x, x') \sqrt{-g(x)}\, d^4x, \qquad (10)$$

$$L = L(x;\, x') = L_m(x) + \frac{1}{2\varkappa} L_g(x,\, x'),$$

где $L_m(x)$ — лагранжиан материи, а L_g — лагранжиан гравитационного поля относительно точки x', взятый в виде

$$L_g = L_g(x,\, x') = g^{\mu\beta}(Q^{\alpha}_{\gamma\beta} Q^{\gamma}_{\alpha\mu} - Q^{\alpha}_{\mu\beta} Q^{\gamma}_{\alpha\gamma}), \tag{11}$$

$\varkappa = \frac{8\gamma\pi}{c^4}$, γ — гравитационная постоянная Ньютона, а $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ дается (1), а также выражением [2]

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}(g_{\delta\beta||\gamma} + g_{\delta\gamma||\beta} - g_{\beta\gamma||\delta}).$$

В системе координат, галилеевой в $E_{x'}$ (система координат, нормальная в точке x' в V_4) $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, $Q^{\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, и (11) переходит в обычную функцию Лагранжа для гравитационного поля (см. [5] стр. 277). В отличие от обычной функции Лагранжа L_g инвариант при произвольных преобразованиях координат, но зато L_g двухточечная функция. Легко показать, что

$$r = -(g^{\mu\beta} Q^{\alpha}_{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} Q^{\beta}_{\mu\beta})_{|\alpha} - L_g,$$

где r — скалярная кривизна, т. е. L_g отличается от r на дивергенцию. Итак, L_g есть инвариант, зависящий только от $g_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu||\alpha}$. Относительно L_m предполагается, что L_m — скаляр и что L_m есть функция u_i, $u_{i,\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$ и, быть может, $g_{\alpha\beta,\lambda}$, где u_i — переменные, описывающие материю (i — номер переменной, но не обязательно тензорный индекс).

Постулируем обобщенный вариационный принцип: для любых вариаций переменных поля u_i и $g_{\mu\nu}$ и любых объемов Ω $\delta S(x')$, где $S(x')$ дается (10), может быть представлена в виде интеграла по замкнутой поверхности Σ, ограничивающей Ω. Легко видеть, что обычный вариационный принцип $\delta S = 0$ при условии

$$\delta u_i|_{\Sigma} = 0, \quad \delta g_{\mu\nu}|_{\Sigma} = 0 \tag{12}$$

получается из сформулированного выше принципа, если S является функционалом вида

$$S = \int_{\Omega} L(u_i;\, u_{i,\alpha};\, g_{\mu\nu};\, g_{\mu\nu,\alpha}) \sqrt{-g}\, d^4x,$$

т. е. не зависит от мировой функции. В этом случае наложение условий (12) приводит к исчезновению интеграла по поверхности и обобщенный вариационный принцип приводит к $\delta S = 0$, т. е. к обычному вариационному принципу.

В том случае, когда $S(x')$ зависит от мировой функции через $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, при варьировании $g_{\mu\nu}$, вообще говоря, $\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$, а так как $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ есть функционал от $g_{\mu\nu}$, то наложение условий (12) не приводит к $\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\Sigma} = 0$ или $\delta G_{\mu\nu|\Sigma} = 0$, т. е. в этом случае, вообще говоря, $\delta S(x') \neq 0$. Это обстоятельство потребовало обобщения обычного вариационного принципа. Так как $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ является символом Кристоффеля для плоского пространства (в этом легко убедиться, построив тензор кривизны Римана из (3)), то всякая вариация $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ может рассматриваться как обусловленная преобразованием координат. Произвольная вариация $\delta g_{\mu\nu}$ может быть записана в виде

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta_1 g_{\mu\nu} + \delta_2 g_{\mu\nu}, \tag{13}$$

где $\delta_1 g_{\mu\nu}$ — вариация, обусловленная преобразованием координат, а $\delta_2 g_{\mu\nu}$ — вариация, не изменяющая $G_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Для того чтобы $\delta_2 G_{\mu\nu} = 0$ и $\delta_2\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, достаточно потребовать выполнения

$$\delta_2 G(x, x') = 0, \qquad \delta_2 G_{\alpha'}(x, x') = 0 \tag{14}$$

для данного фиксированного x' и всех x. Действительно, поскольку мы требуем выполнения (14) для всех x, то мы можем дифференцировать (14) по x, что дает

$$\delta_2 G_{\alpha} = 0, \qquad \delta_2 G_{\alpha'\beta} = 0, \qquad \delta_2 G_{\beta\gamma\alpha'} = 0, \qquad \delta_2 G_{\alpha,\beta} = 0. \tag{15}$$

В силу (3)—(5) этого достаточно для выполнения

$$\delta_2 G_{\mu\nu} = 0, \qquad \delta_2 \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0. \tag{16}$$

Варьируя второе из уравнений (6), получим в силу (14) и (15)

$$G_{\nu}\delta_2 g^{\mu\nu} = 0, \qquad G^{\nu}\delta_2 g_{\mu\nu} = 0, \qquad \delta_2 g_{\mu'\nu'} = 0, \tag{17}$$

т. е. вариация $\delta_2 g_{\mu\nu}$ ортогональна к геодезической, соединяющей точки x' и x. Можно показать, что (17) есть необходимое и достаточное условие выполнения (16). Из (17) видно, что $\delta_2 g_{\mu\nu}$ зависит от 6 произвольных функций. Этого следовало ожидать, так как $\delta_1 g_{\mu\nu}$ зависит от четырех произвольных функций, а $\delta g_{\mu\nu}$ — от 10.

Разбиение множества всех возможных вариацией $\delta g_{\mu\nu}$ на два множества $\delta_1 g_{\mu\nu}$ и $\delta_2 g_{\mu\nu}$ зависит, вообще говоря, от точки x', как это видно из (17). Если имеется преобразование координат

$$x^{\alpha} \to \overline{x^{\alpha}} = x^{\alpha} + \xi(x, x'), \tag{18}$$

где $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x, x')$ — произвольные бесконечно малые функции, а x' — параметры, то индуцируемая этим преобразованием вариация $g_{\mu\nu}$ имеет вид (см., например, [6], § 94)

$$\delta_1 g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\xi_{\mu|\nu} - \xi_{\nu|\mu}. \tag{19}$$

Варьируем (10) по u_i и $g_{\mu\nu}$. Произведя расчеты, получим

$$\begin{aligned}\delta S(x') = &\oint_{\Sigma}\sum_{i}\frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial u_{i,\alpha}}\delta u_i\, dS_{\alpha} + \int_{\Omega}\sum_{i}\frac{\delta(L_m\sqrt{-g})}{\delta u_i}\delta u_i\, d^4x + \\ &+\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}t^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2\varkappa}\left(r^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}r\right)\delta_2 g_{\mu\nu}\right\}\sqrt{-g}\, d^4x + \\ &+\oint_{\Sigma}\frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\delta g_{\mu\nu}\, dS_{\alpha} + \oint_{\Sigma}\frac{\partial(L_g\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\delta_2 g_{\mu\nu}\, dS_{\alpha} - \\ &-\oint_{\Sigma}L_g\xi^{\alpha}\sqrt{-g}\, dS_{\alpha}.\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $r^{\mu\nu}$ — тензор Риччи, r — его свертка

$$t^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L_m)}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}L_m)}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\right)_{,\alpha}. \tag{21}$$

$\delta g_{\mu\nu}$, $\delta_2 g_{\mu\nu}$, определяются (13), а $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x, x')\delta_1 g_{\mu\nu}$ и определяются (18) и (19). Перейдем в выражении для L от обычных производных к касательным.

Легко видеть, что для этого достаточно сделать замену

$$u_{i,\alpha} \to u_{i,||\alpha}, \quad g_{\alpha\beta,\lambda} \to g_{\alpha\beta||\lambda}, \quad \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \to Q^{\alpha}_{\beta\gamma}, \quad \sqrt{-g} \to \frac{1}{\Lambda},$$

где $\Lambda = \Lambda(x, x') = \sqrt{-g}/\sqrt{-D_x}$, $D_x = \det\|G_{\mu\nu}\|$. В этом легко убедиться, если записать L в системе координат, галилеевой в $E_{x'}$, где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, $\partial_\alpha = \widetilde{\nabla}_\alpha$ и $\Lambda = (-g)^{-\frac{1}{2}}$, а затем перейти к произвольной системе координат. После этого (21) и $r^{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} &= 2\Lambda \frac{\partial (L_m/\Lambda)}{\partial g_{\mu\nu}} - 2\Lambda \left(\frac{\partial (L_m/\Lambda)}{\partial g_{\mu\nu||\alpha}} \right)_{||\alpha}, \\ r^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} r_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (Q^{\gamma}_{\alpha\gamma||\beta} - Q^{\gamma}_{\alpha\beta||\gamma} + Q^{\delta}_{\alpha\gamma} Q^{\gamma}_{\delta\beta} - Q^{\gamma}_{\alpha\beta} Q^{\delta}_{\gamma\delta}). \end{aligned} \tag{22}$$

Применяя к (20) обобщенный вариационный принцип и учитывая независимость δu_i, $\delta_1 g_{\mu\nu}$ и $\delta_2 g_{\mu\nu}$ для данного фиксированного x', получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \frac{\delta (L_m \sqrt{-g})}{\delta u_i} \delta u_i \, d^4x = 0, \\ &\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left\{ t^{\mu\nu} + \frac{1}{\varkappa} \left(r^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} r \right) \right\} \delta_2 g_{\mu\nu} \, d^4x = 0, \\ &\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} t^{\mu\nu} \delta_1 g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4x = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Первое уравнение (23) в силу произвольности δu_i и Ω дает

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (L_m \sqrt{-g})}{\delta u_i} = \frac{\partial L_m}{\partial u_i} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial (L_m \sqrt{-g})}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} = \frac{\partial L_m}{\partial u_i} - \Lambda \left(\frac{\partial (L_m/\Lambda)}{\partial u_{i||\alpha}} \right)_{||\alpha} = 0.$$

Пусть в некоторой точке x

$$\delta_2 g_{\mu\nu}(x) \begin{cases} \neq 0 & \text{при } \alpha, \beta = \mu, \nu, \\ = 0 & \text{при } \alpha, \beta \neq \mu, \nu. \end{cases} \tag{24}$$

Всегда можно выбрать x' так, чтобы (24) было совместно с (17), тогда из второго уравнения (23) в силу произвольности Ω и независимости коэффицента при $\delta_2 g_{\mu\nu}$ от x' следуют уравнения Эйнштейна

$$r^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} r = -\varkappa t^{\mu\nu}. \tag{25}$$

Наконец, последнее уравнение (23) дает (см. [6], § 94)

$$t^{\mu\nu}|_{\mu} = 0. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь вопрос о тензоре энергии-импульса гравитационного поля и интегральных законах сохранения. Наше рассмотрение отличается от других работ [7—11] явно выраженной относительностью (двухточечностью) тензора энергии-импульса, а также тем, что это истинный тензор, а не квазитензор. Отметим еще попытку Синга ([3]

стр. 237—242) получить сохраняющийся истинный двухточечный тензор энергии-импульса, однако последний сохранялся тождественно, а не в силу уравнений движения. По нашему мнению, тензор энергии-импульса должен сохраняться не тождественно, а в силу уравнений движения как это имеет место во всех случаях специальной теории относительности. Кроме того, по нашему мнению, тензор энергии-импульса должен быть функцией состояния и не должен содержать производных, имеющих тот же порядок, что и уравнения поля, а только более низкие. Это опять же имеет место в случае специальной теории относительности.

Перепишем (10) в виде

$$S(x') = \int\limits_{\Omega} \frac{L}{\Lambda} \sqrt{-D_x}\, d^4x, \tag{27}$$

где

$$\Lambda = \Lambda(x, x') = \sqrt{\frac{D_x}{g(x)}}, \qquad D_x = \det \| G_{\mu\nu} \|. \tag{28}$$

Λ—двухточечный скаляр, как это видно из (28). Интегрирование в (27) ведется по плоскому пространству $E_{x'}$. Пользуясь инвариантностью (27) относительно трансляций в $E_{x'}$, в силу теоремы Нетер получим в системе координат, галилеевой в $E_{x'}$,

$$\partial_\alpha \Theta^\alpha_\beta = 0, \tag{29}$$

где

$$\Theta^\alpha_\beta = -\sum_i \frac{\partial(L_m/\Lambda)}{\partial u_{i,\alpha}} u_{i,\beta} - \frac{\partial(L_m/\Lambda)}{\partial g_{\gamma\delta,\alpha}} g_{\gamma\delta,\beta} - \frac{\partial(L_g/2\varkappa\Lambda)}{\partial g_{\gamma\delta,\alpha}} g_{\gamma\delta,\beta} + \delta^\alpha_\beta L/\Lambda. \tag{30}$$

Θ^α_β является функцией состояния системы (Θ^α_β зависит только от u_i, $u_{i,\alpha}$, $g_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu||\lambda}$). Кроме того, в случае плоского V_4 и галилеевых координат в нем Θ^α_β переходит в канонический тензор энергии-импульса материи. Это дает право трактовать Θ^α_β как тензор энергии-импульса системы относительно точки x'. В произвольной системе координат (29) и (30) запишутся соответственно:

$$\Theta^\alpha_{\beta||\alpha} = 0,$$

$$\Lambda\Theta^\alpha_\beta = -\sum_i \frac{\partial L_m}{\partial u_{i||\alpha}} u_{i||\beta} - \frac{\partial L_m}{\partial g_{\gamma\delta||\alpha}} g_{\gamma\delta||\beta} - \frac{1}{2\varkappa} \frac{\partial L_g}{\partial g_{\gamma\delta|\alpha}} g_{\gamma\delta||\beta} + L\delta^\alpha_\beta. \tag{31}$$

Перенесем нижний индекс Θ^α_β параллельно в $E_{x'}$ из точки x в точку x'. Этот перенос осуществляется с помощью тензора переноса (8). Положим

$$\Theta^\alpha_{\beta'} = P^{\cdot\nu}_{\beta'\cdot}\Theta^\alpha_\nu.$$

Получим в силу (9) и (31)

$$\Theta^\alpha_{\beta'||\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-D_x}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-D_x}\,\Theta^\alpha_{\beta'}) = \frac{1}{\Lambda}(\Lambda\Theta^\alpha_{\beta'})_{|\alpha} = 0. \tag{32}$$

Интегрируя (32) по произвольной области Ω пространства $E_{x'}$, получим в силу теоремы Гаусса

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-D_x}\,\Theta^\alpha_{\beta'})\, d^4x = \oint\limits_{\Sigma} \Theta^\alpha_{\beta'} \sqrt{-D_x}\, dS_\alpha = \oint\limits_{\Sigma} \Lambda\Theta^\alpha_{\beta'} \sqrt{-g}\, dS_\alpha = 0, \tag{33}$$

где Σ — гиперповерхность, ограничивающая 4-объем Ω, а dS_α — элемент этой гиперповерхности. Если $\Theta^\alpha_{\beta'}$ исчезает на пространственной бесконечности, то, как это следует из (32), величина

$$P_{\beta'} = P_{\beta'}(x') = \int_\Sigma \Theta^\alpha_{\beta'} \sqrt{-D_x}\, dS_\alpha, \tag{34}$$

где Σ — бесконечная пространственноподобная гиперповерхность, не зависит от Σ и является вектором в точке x'. В случае плоского пространства и галилеевых координат в нем $P_{\beta'}$ переходит в обычный 4 — импульс. Это дает право трактовать $P_{\beta'}$ как полный вектор энергии-импульса для материи и гравитационного поля относительно точки x'. Вектор $P_{\beta'}$ сохраняется в смысле независимости от пространственноподобной поверхности, по которой производится интегрирование.

Для канонического тензора энергии-импульса имеем

$$\Theta^\alpha_\beta = \Theta^\alpha_{m\beta} + \Theta^\alpha_{g\beta},$$

где $\Theta^\alpha_{m\beta}$ тензор энергии-импульса материи, а $\Theta^\alpha_{g\beta}$ — тензор энергии импульса гравитационного поля

$$\begin{aligned} \Lambda\Theta^\alpha_{m\beta} &= -\sum_i \frac{\partial L_m}{\partial u_{i\|\alpha}} u_{i\|\beta} + \delta^\alpha_\beta L_m - \frac{\partial L_m}{\partial g_{\gamma\delta\|\alpha}} g_{\gamma\delta\|\beta}, \\ \Lambda\Theta^\alpha_{g\beta} &= -\frac{1}{2\varkappa} \frac{\partial L_g}{\partial g_{\gamma\delta\|\alpha}} g_{\gamma\delta\|\beta} + \delta^\alpha_\beta \frac{1}{2\varkappa} L_g. \end{aligned} \tag{35}$$

Первые два члена в выражении для $\Theta^\alpha_{m\beta}$ образуют обычный канонический тензор энергии-импульса материи. Последний член обусловлен взаимодействием материи с гравитационным полем, он исчезает, если $L_m = 0$ или $g_{\gamma\delta\|\beta} = 0$, т. е. если нет или материи, или гравитационного поля. Он отсутствует также в тех случаях, когда L_m не содержит производных метрического тензора, например, в случае электромагнитного поля.

Для тензора энергии-импульса гравитационного поля получим после несложных вычислений

$$\Lambda\Theta^\alpha_{g\beta} = -\frac{1}{2\varkappa}\{g^{\rho\sigma}(g^{\mu\nu}g^{\alpha\delta} - g^{\mu\delta}g^{\alpha\nu})(Q_{\sigma\nu\beta}Q_{\delta\mu\rho} + Q_{\nu\sigma\beta}Q_{\delta\mu\rho} + Q_{\sigma\rho\beta}Q_{\delta\mu\nu}) - \delta^\alpha_\beta L_g\}, \tag{36}$$

где

$$Q_{\sigma\nu\beta} = g_{\sigma\mu} Q^\mu_{\nu\beta}.$$

Заметим, что в системе координат, галилеевой в $E_{x'}$, выражение (36) совпадает с псевдотензором Эйнштейна, однако оно не совпадет с ним в других системах координат.

Рассмотрим бесконечно малый поворот $E_{x'}$ вокруг точки x'. В координатах, галилеевых в $E_{x'}$, с началом координат в x' $(x' = 0)$ он запишется

$$x^\alpha \to \bar{x}^\alpha = x^\alpha + x^\gamma G_{\gamma\beta}\delta\omega^{\alpha\beta},$$

$$\delta\omega^{\alpha\beta} = -\delta\omega^{\beta\alpha}.$$

При этом поля u_i и $g_{\mu\nu}$ преобразуются

$$\delta u_i = \bar{u}_i(x) - u_i(x) = \frac{1}{2}\sum_k A^k_{i\,(\beta\gamma)} u_k(x)\,\delta\omega^{\beta\gamma},$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} B^{\lambda\sigma}_{\mu\nu(\beta\gamma)} g_{\lambda\sigma}(x)\,\delta\omega^{\beta\gamma},$$

круглые скобки указывают на то, что по индексам β и γ проведена альтернация. $A^k_{i(\beta\gamma)}$ характеризует трансформационные свойства поля u_i при повороте пространства $E_{x'}$, а $B^{\lambda\sigma}_{\mu\nu(\beta\gamma)}$ характеризует трансформационные свойства поля $g_{\mu\nu}$. Для $B^{\lambda\sigma}_{\mu\nu(\beta\gamma)}$ имеем

$$B^{\lambda\sigma}_{\mu\nu(\beta\gamma)} = G_{\nu\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\mu} - G_{\nu\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\mu} + G_{\mu\beta}\delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\sigma}_{\nu} + G_{\mu\gamma}\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\nu}. \tag{37}$$

Инвариантность (27) относительно вращений $E_{x'}$ в силу теоремы Нетер дает (см., например, [12], стр. 23) в системе координат, галилеевой в $E_{x'}$, с началом координат в точке x'.

$$\partial_\alpha M^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0, \tag{38}$$

где

$$M^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = (G_{\gamma\delta}x^{\delta}\Theta^{\alpha}_{\beta} - G_{\beta\delta}x^{\delta}\Theta^{\alpha}_{\gamma}) + \sum_{i,k}\frac{\partial(L/\Lambda)}{\partial u_{i,\alpha}} A^k_{i(\beta\gamma)}u_k + \frac{\partial(L/\Lambda)}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} B^{\lambda\sigma}_{\mu\nu(\beta\gamma)}g_{\lambda\sigma}, \tag{39}$$

Учитывая, что при переходе к произвольной системе координат $x^\alpha \to G^\alpha$, $\partial_\alpha \to \widetilde{\nabla}_\alpha$, получим для (38) и (39) в произвольной системе координат

$$\widetilde{\nabla}_\alpha M^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0, \tag{40}$$

$$M^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = (G_{\gamma}\Theta^{\alpha}_{\beta} - G_{\beta}\Theta^{\alpha}_{\gamma}) + \sum_{i,k}\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial L}{\partial u_{i||\alpha}} A^k_{i(\beta\gamma)}u_k + \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu||\alpha}} B^{\lambda\sigma}_{\mu\nu(\beta\gamma)}g_{\lambda\sigma}. \tag{41}$$

Вид (37) при этом остается неизменным. В плоском V_4 и галилеевых координатах в нем (39) представляет собой плотность момента количества движения материи, поэтому $M^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$ можно считать плотностью момента количества движения системы относительно точки x'. Первый член (41) представляет собой плотность орбитального момента всех полей, включая гравитационное. Второй и третий член описывают поляризационные свойства соответственно полей u_i и гравитационного поля, т. е. второй член обусловлен спином полей u_i, а третий спином гравитационного поля. Уравнение (40) представляет собой закон сохранения момента количества движения.

Напишем теперь интегральный закон сохранения. Перенесем в (40) индексы β и γ в точку x' с помощью параллельного переноса в $E_{x'}$

$$M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')} = P^{\cdot\mu}_{\beta'\cdot}P^{\cdot\sigma}_{\gamma'\cdot}M^{\alpha}_{(\mu\sigma)},$$

тогда (40) перейдет в

$$\widetilde{\nabla}_\alpha M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')} = \frac{1}{\sqrt{-D_x}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-D_x}\,M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')}\right) = \frac{1}{\Lambda}\left(\Lambda M^{\alpha}_{\beta'\gamma'}\right)_{|\alpha} = 0. \tag{42}$$

Интегрируя (42) по произвольной области пространства Ω, получим с помощью теоремы Гаусса

$$\oint_{\Sigma} M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')}\sqrt{-D_x}\,dS_\alpha = 0,$$

где Σ — поверхность, ограничивающая Ω. Предполагая, что $M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')}$ стремится к нулю на пространственной бесконечности, получаем полный тензор количества движения в виде

$$M_{(\beta'\gamma')}(x') = \int_{\Sigma} M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')}\sqrt{-D_x}\,dS_\alpha = \int_{\Sigma}\Lambda M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')}\sqrt{-g}\,dS_\alpha, \tag{43}$$

где Σ — бесконечная пространственноподобная поверхность. $M_{(\alpha'\beta')}$ зависит от выбора опорной точки x', но не зависит от выбора пространственноподобной поверхности Σ. В этом смысле $M_{(\alpha'\beta')}$ является сохраняющейся величиной. Легко видеть, что в случае плоского V_4 и галилеевых координат в нем $M_{(\alpha'\beta')}$ переходит в обычный тензор момента количества движения.

В тех случаях, когда указанное выше отображение пространства V_4 на $E_{x'}$ возможно не для всего пространства, а лишь для некоторой конечной окрестности точки x', величины (34) и (43) теряют смысл. Однако мы можем определить энергию-импульс части системы. Сделаем это так. Пусть интересующая нас часть системы в некоторый момент времени находится в 3-объеме V, ограниченном замкнутой двумерной поверхностью σ. Слова момент времени следует понимать не как координату x^0 в некоторой системе координат, а просто как задание поверхности σ в пространстве V_4. Ясно, что такое задание инвариантно и не зависит от каких бы то ни было систем координат. Эволюция объема упомянутой системы будет описываться движением поверхности σ в V_4. Энергию-импульс системы, заключенной внутри σ, определим соотношением

$$P_{\beta'}(x') = \int\limits_{\Sigma} \Theta^{\alpha}_{\beta'} \sqrt{-D_x}\, dS_{\alpha}, \tag{44}$$

где Σ — произвольная пространственная трехмерная поверхность, натянутая на замкнутую двумерную поверхность σ. Нормаль к Σ предполагается направленной в будущее. В силу (31), (44) зависит только от выбора σ, но не Σ. Аналогично определим момент количества движения незамкнутой системы

$$M_{(\alpha'\beta')}(x') = \int\limits_{\Sigma} M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')} \sqrt{-D_x}\, dS_{\alpha}. \tag{45}$$

Величины (44) и (45) определяются неоднозначно, поскольку Θ^{α}_{β} и $M^{\alpha}_{(\beta'\gamma')}$ определяются с точностью до величин с исчезающей дивергенцией. Это имеет место и в специальной теории относительности.

Вычисление энергии и импульса по изложенному выше способу для статического центрально-симметричного поля приводит к результату, согласующемуся с результатами других авторов (см., например, [6], § 99 и [9]) в том случае, когда гравитационный радиус много меньше размеров системы. В системе координат, где линейный элемент имеет вид

$$dS^2 = e^{\nu}\, dt^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - e^{\lambda}\, dr^2, \tag{46}$$

$\nu = \nu(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, и скорость света $c = 1$, полная энергия, вычисленная относительно центра системы ($r' = 0$, $t' = 0$), равна

$$P_{0'} = \frac{4\pi a}{\varkappa}\, e^{\nu(0)} = m e^{\nu(0)} = 4\pi e^{\nu(0)} \int\limits_0^{\infty} t^0_0 r^2\, dr, \tag{47}$$

где $a = \varkappa \int\limits_0^{\infty} t^0_0 r^2\, dr$ гравитационный радиус системы, t^0_0 компонент тензора энергии-импульса (21). Полный импульс системы равен нулю $P_{i'} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Таким образом, гравитационное поле по своей природе является относительным полем, т. е. для его описания вполне достаточно знать гравитационное поле $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в точке x по отношению к некоторой произвольной опорной точке x', где поле задано, причем значение поля в опорной точке не существенно для физики (для удобства мы положили, что в опорной точке поле нуль). Картина аналогична той, что мы имеем в специальной теории относительности, когда описание физических явлений в материальном теле зависит от скорости этого тела относительно системы отсчета, но никак не зависит от абсолютной скорости тела относительно эфира. Формально относительность гравитационного поля проявляется в двухточечности всех величин, относящихся к гравитационному полю, причем физика явления не зависит от выбора опорной точки так же, как в специальной теории относительности физика явления не зависит от выбора системы координат. Относительное гравитационное поле представляет собой тензор, что однако, не противоречит принципу эквивалентности и дает возможность ввести относительную энергию, импульс и т. д. гравитационного поля, а также сформулировать законы сохранения. Тензорность относительного гравитационного поля можно трактовать как некую относительную локализацию гравитационного поля, ставящую гравитационное поле в равное положение с локализуемыми полями. На первый взгляд относительность (зависимость от x') физических величин, например, массы системы может показаться непонятной, однако логически она не более непонятна, чем зависимость массы от скорости, возникающая при трехмерной формулировке релятивистской механики; так что зависимость массы и других величин от опорной точки столь же мало является недостатком, как зависимость массы от скорости при трехмерной формулировке релятивистской механики. Приведенные соображения оправдывают название общая теория относительности для теории тяготения, на чем упорно настаивал Эйнштейн.

Автор глубоко признателен проф. Я. П. Терлецкому за внимание и интерес к работе и А. Н. Гордееву за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen N. Phys. Rev., **57**, 147, 1940.
2. Пугачев Я. И. «Изв. вузов», физика, **6**, 152, 1959.
3. Synge J. L. Relativity the General Theory. Amsterdam, 1960.
4. Рылов Ю. А. «Изв. вузов», математика, № 3, 131, 1962.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
6. Ландау Л., Лифшиц Е. Теория поля. Гостехиздат, М., 1960.
7. Mitzkewitsch N. Ann. Phys., (DDR), **1**, 318, 1958.
8. Myller C. Kgl. Danske. Vidensk. Selsk. Mat.-fys. Medd., **31**, Nr. 14, 1959.
9. Möller C. Ann. Phys., (USA), **4**, 347, 1958.
10. Möller C. Ann. Phys., (USA), **12**, 118, 1961.
11. Мицкевич Н. В. Тезисы и программа 1-й советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, 1961, стр. 37.
12. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957.

Поступила в редакцию
22. I 1962 г.

Кафедра
статистической физики и механики