Вестник московского университета

№ 5 — 1962

АСТРОНОМИЯ

Е. П. АКСЕНОВ, Е. А. ГРЕБЕНИКОВ, В. Г. ДЕМИН

О ПОЛЯРНЫХ ОРБИТАХ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Введение

В статье рассматриваются полярные орбиты искусственных спутников Земли. Потенциал земного притяжения аппроксимируется потенциалом двух притягивающих центров, расположенных на некотором мнимом расстоянии. Проводится качественный анализ форм движения. Подробно изучается случай, наиболее интересный для приложений.

В работе [1] рассматривалась задача о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. В геоцентрической прямоугольной системе координат с фиксированным направлением осей, ось апликат которой совпадает с осью вращения Земли, потенциал нормального поля записывается следующим образом:

$$U = \frac{fM}{r}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{c}{r}\right)^{2k} P_{2k}\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \tag{1}$$

где f — постоянная тяготения, M — масса Земли, c — некоторая постоянная, равная приблизительно 210 *км*, $P_s\left(\frac{z}{r}\right)$ — полином Лежандра s-го порядка, причем $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Формулу (1) можно преобразовать

$$U = \frac{fM}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - ci)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + ci)^2}}\right),$$

где i — мнимая единица.

В этой работе было показано, что рассматриваемая задача полностью решается в квадратурах. Если от координат x, y, z и времени t перейти к новым координатам λ, μ, w и новой независимой переменной τ по формулам

$$x = c\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)}\sin w, \qquad y = c\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)}\cos w, \tag{2}$$

$$z = -c\lambda\mu,$$

$$dt = (\lambda^2 + \mu^2)\,d\tau, \tag{3}$$

то общее решение этой задачи может быть записано следующим образом:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{2h\mu^4 + 2(c_2 - h)\mu^2 - (2c_2 + c_1^2)}} = \tau + c_3, \tag{4}$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{-2h\lambda^4 - 2\frac{fM}{c^3}\lambda^3 + 2(c_2 - h)\lambda^2 - 2\frac{fM}{c^3}\lambda + (2c_2 + c_1^2)}} = \tau + c_4, \tag{5}$$

$$w = c_1 \int_{w_0}^{w} \frac{(\lambda^2 + \mu^2)\,d\tau}{(1 - \mu^2)(1 - \lambda^2)} + c_5, \tag{6}$$

где h, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — произвольные постоянные интегрирования, а λ_0, μ_0, w_0 — некоторые начальные значения переменных λ, μ и w.

В настоящей статье мы займемся исследованием полярных орбит, под которыми будем понимать орбиты, лежащие в меридианных плоскостях Земли.

Равенства (2) показывают, что для полярных орбит координата w должна быть величиной постоянной. Тогда из соотношения (6) вытекает, что $c_1 = 0$. Так как направление оси Ox выбрано произвольно, то без ограничения общности можно считать, что $y = 0$, т. е. $c_5 = \pi/2$. Поэтому положение спутника будут определять координаты x и z, которые связаны с λ и μ формулами

$$x = c\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)}, \qquad z = -c\lambda\mu, \tag{7}$$

а λ и μ должны быть найдены из квадратур

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{2h\mu^4 + 2(c_2 - h)\mu^2 - 2c_2}} = \tau + c_3, \tag{8}$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{-2h\lambda^4 + 2(c_2 - h)\lambda^2 - 2\frac{fM}{c^3}\lambda^3 - 2\frac{fM}{c^3}\lambda + 2c_2}} = \tau + c_4. \tag{9}$$

Напомним геометрический смысл координат λ и μ. Из соотношений (7) находим

$$\frac{x^2}{c^2(1 + \lambda^2)} + \frac{z^2}{c^2\lambda^2} = 1, \tag{10}$$

$$\frac{x^2}{c^2(1 - \mu^2)} - \frac{z^2}{c^2\mu^2} = 1. \tag{11}$$

Равенство (10) показывает, что уравнение $\lambda = \mathrm{const}$ определяет семейство эллипсов, центр которых совпадает с центром Земли, а малая полуось перпендикулярна плоскости земного экватора. Уравнение (11) при $\mu = \mathrm{const}$ является уравнением семейства гипербол.

§ 1. Качественное исследование полярных орбит

Формулы (8) и (9) можно переписать в виде

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = 2h(\mu^2 - 1)(\mu^2 - \delta^2), \tag{12}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = -2h(\lambda^2 - 1)\,\varphi(\lambda), \tag{13}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{fM}{hc^3}\lambda - \frac{c_2}{h}; \qquad \delta^2 = -\frac{c_2}{h}.$$

Прежде всего изучим области возможности движения. Очевидно, что движение возможно только при тех значениях λ и μ, при которых правые части равенства (12) и (13) неотрицательны. При исследовании квадратуры, определяющей величину λ, будем различать три случая.

1. Корни многочлена $\varphi(\lambda)$ действительные и различные.
2. Корни $\varphi(\lambda)$ равные.
3. Корни $\varphi(\lambda)$ комплексные.

Обозначим эти корни через α и β. Тогда

$$\alpha = -\frac{fM}{2hc^3} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc^3}\right)^2 + \frac{c_2}{h}}, \tag{14}$$

$$\beta = -\frac{fM}{2hc^3} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc^3}\right)^2 + \frac{c_2}{h}}. \tag{15}$$

Рассмотрим первый случай. Из формулы (13) видно, что в этом случае при $h > 0$ движение возможно в области, определяемой неравенством $\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha$, а при $h < 0$ имеются две области движения; $\lambda > \alpha$, $\lambda < \beta$.

Как показывают равенства (10), геометрические размеры орбит возрастают вместе с возрастанием $|\lambda|$. Поэтому при $h > 0$ мы будем иметь движение в ограниченной части пространства, а при $h < 0$ движение будет происходить в неограниченной области пространства.

Пусть теперь $\alpha = \beta$. Это возможно при условии, что выполняется равенство

$$-\frac{c_2}{h} = \left(\frac{fM}{2hc^3}\right)^2.$$

Поэтому

$$\delta = -\alpha = -\beta = \frac{fM}{2hc^3}.$$

Так как для спутниковых орбит $|\beta| > 1$, то и $\delta > 1$. Следовательно, при $h < 0$ правая часть равенства (12) будет неотрицательной при условии $|\mu| > 1$. Но в действительном движении $|\mu \leqslant 1$. Поэтому, если $h < 0$, то во втором случае движение невозможно. Если $h > 0$, то правая часть равенства (12) будет неотрицательной при условии, что μ меняется от -1 до $+1$. Формула (13) показывает, что при $\alpha = \beta$ движение возможно, только при постоянном $\lambda = -\dfrac{fM}{2hc^3}$.

Рассмотрим случай, когда корни многочлена $\varphi(\lambda)$, являются комплексными. В этом случае правая часть формулы (13) будет неотрицательной при всех λ, если $h < 0$, и будет всегда отрицательной, если $h > 0$. Следовательно, при $h \neq 0$ все орбиты расположены в неограниченном пространстве.

Пусть $h = 0$. Тогда

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = -(\lambda^2 + 1)\left(\frac{2fM}{c^3}\lambda - 2c_2\right).$$

Откуда видно, что $\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2 > 0$, если $\lambda < \dfrac{c_2c^3}{fM}$. Поэтому и при $h = 0$ нет движений, происходящих в ограниченной части пространства.

Таким образом, движения в ограниченной части пространства могут быть только при $h > 0$. Если $h \leqslant 0$, то, все движения происходят в неограниченной части пространства.

Постоянная h следующим образом выражается через начальные условия [1]:

$$h = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_0^2 - U_0\right), \tag{16}$$

где v_0 и U_0 — скорость спутника и силовая функция в начальный момент. Следовательно, величина — mhc^2, где m — масса спутника, есть полная механическая энергия спутника отрицательна, то его движение

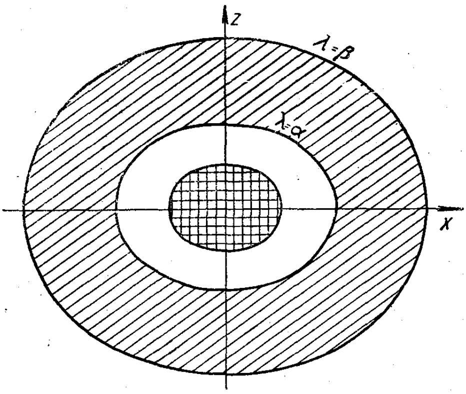

Рис. 1

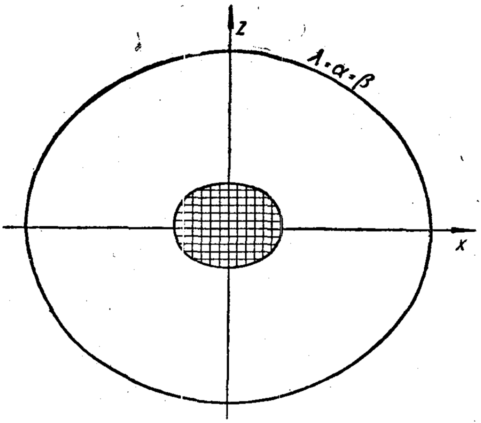

Рис. 2

происходит в ограниченной части пространства; если же полная энергия равна нулю или положительна, то все орбиты будут уходить в бесконечность.

Перепишем равенство (16) в виде

$$h = -\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{fM}{r_0} - U_0 + \frac{fM}{r_0}\right\} \tag{17}$$

и обозначим через mH полную энергию в невозмущенном движении, т. е. положим

$$H = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{fM}{r_0}.$$

Возьмем в качестве начального момента времени момент, когда спутник пересекает ось вращения Земли. Тогда $x_0 = 0$, $z_0 = r_0$ и формула (17) запишется в виде

$$h = -\frac{1}{c^2}\left\{H + \frac{fM}{r_0}\frac{c^2}{r_0^2 + c^2}\right\}. \tag{18}$$

Пусть $H < 0$. Тогда невозмущенное движение спутника является эллиптическим. Вследствие того что второе слагаемое в формуле (18) является положительным, постоянная h может быть и положительной и отрицательной. Поэтому возмущенное движение может происходить как в конечной, так и в бесконечной частях пространства.

Если $H \geqslant 0$, то $h < 0$. Поэтому и невозмущенные, и возмущенные орбиты обязательно будут уходить в бесконечность.

Все предыдущее можно сформулировать в виде следующей теоремы: *Кеплеровское эллиптическое движение под действием возмущений, зависящих только от несферичности Земли, может превратиться в движение, происходящее в бесконечном пространстве. Невозмущенные параболические и гиперболические движения не могут превратиться в ограниченные движения под действием этих возмущений.*

В этой работе нас будут интересовать только такие орбиты, которые лежат в ограниченной части пространства. Из предыдущего анализа следует, что имеется два случая ограниченных движений: первый, когда координата λ заключена в некоторых ограниченных пределах, и второй, когда λ является постоянной величиной. Как было показано, в последнем случае координата μ изменяется от -1 до $+1$.

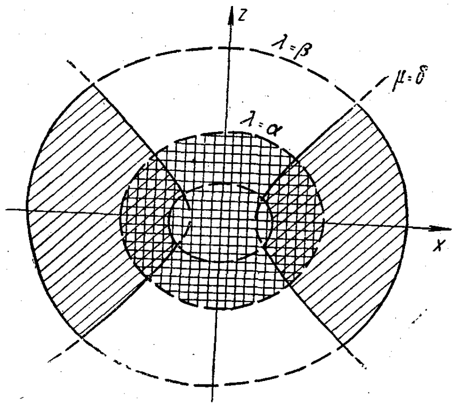

Рис. 3

Перейдем теперь к исследованию квадратуры, определяющей координату μ. Здесь следует различать четыре случая: а) $\delta > 1$; б) $\delta < 1$, $\delta \neq 0$; в) $\delta = 1$; г) $\delta = 0$. В случае а) величина μ может изменяться в пределах от -1 до $+1$. В случае б) μ изменяется в пределах от $-\delta$ до δ. В случае в) μ изменяется в пределах от -1 до $+1$; здесь может быть такое движение, которое происходит с постоянством μ. В случае г) движение также происходит с постоянством μ.

Если соединить эти четыре случая для μ с двумя уже рассмотренными случаями для λ, то получим следующие пять типов движения.

Тип 1-а. Этот тип движения имеет место, когда корни многочлена $\varphi(\lambda)$ действительные и различные и когда $\delta > 1$. Область возможности движения определяется неравенствами $-1 \leqslant \mu \leqslant +1$. Следовательно, в этом случае спутник всегда будет находиться в пространстве, ограниченном двумя эллипсами.

Тип 2-а. Этот тип движения имеет место, когда корни многочлена $\varphi(\lambda)$ являются равными и $\delta > 1$. Этот тип содержит эллиптические орбиты.

В этом случае мы имеем

$$\lambda = -\frac{fM}{2hc^3}, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Тип 1-б. В этом случае $\alpha \neq \beta$ и $\delta < 1$. Поэтому $-\delta \leqslant \mu \leqslant \delta$, $\beta \leqslant \lambda \leqslant \alpha$, т. е. область возможности движения ограничена двумя эллипсами $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$ и двумя ветвями гиперболы $\mu = \delta$. Движение искусственного небесного тела будет происходить так, что произойдет обязательное соударение с Землей. Действительно, так как $\delta < 1$, то

$$|\alpha| = \left| -\frac{fM}{2hc^3} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc^3}\right)^2 - \delta^2} \right| < 1,$$

а поэтому один из эллипсов лежит внутри Земли.

Тип 1-в. В этом случае мы имеем $-1 \leqslant \mu \leqslant +1$, $\beta \leqslant \lambda \leqslant \alpha$. Здесь также будет соударение с Землей, ибо

$$|\alpha| = \left| -\frac{fM}{2hc^3} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2hc^3}\right)^2 - 1} \right| \leqslant 1, \tag{19}$$

т. е. траектория будет принадлежать баллистическому классу.

Заметим, что имеются такие движения, когда координата μ является постоянной. Действительно, $\mu = \pm 1$ является решением уравнения (12) и уравнения, которое получается из (12) путем дифференцирования его по τ. Из формул (7) следует тогда, что $x = 0$; $z = \pm c\lambda$. Следовательно, движение в этом случае происходит вдоль оси вращения Земли, причем расстояние от центра Земли колеблется в пределах $|\alpha c| \leqslant |z| \leqslant |c\beta|$.

Тип 1-г. В этом случае $\mu = 0$, $\beta \leqslant \lambda \leqslant \alpha$. Поэтому $x = c\sqrt{1+\lambda^2}$, $z = 0$, т. е. движение происходит вдоль отрезка прямой, лежащей в плоскости экватора и проходящей через центр Земли. Так как $\alpha = 0$, то $c \leqslant x \leqslant c\sqrt{1+\beta^2}$.

Последние три типа движения не представляют интереса в теории движения искусственных спутников, ибо такие движения обязательно приводят к соударению с Землей. Движения такого типа мы будем называть баллистическими. Движения, происходящие в ограниченной части пространства и не приводящие к соударению с Землей, назовем спутниковыми. Предыдущий анализ показывает, что в меридианных плоскостях Земли имеются два типа спутниковых орбит: орбиты эллиптические и орбиты, заключенные в эллиптическом кольце. На этих двух типах орбит мы остановимся несколько подробнее.

§ 2. Эллиптические орбиты

Для существования эллиптических орбит необходимо выполнение следующих равенств:

$$\alpha = \beta = -\delta = -\frac{fM}{2hc^3}.$$

Из этих равенств следует, что постоянные интегрирования не являются независимыми, а связаны следующим соотношением:

$$c_2 = -h\left(\frac{fM}{2hc^3}\right)^2.$$

Эллиптическая координата λ является постоянной и определяется формулой

$$\lambda = -\frac{fM}{2hc^3}.$$

Найдем вторую координату. Для этого перепишем равенство (12) в виде

$$\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}} = m\tau, \tag{20}$$

где

$$k = \frac{1}{\delta}, \qquad m = \delta\sqrt{2h}.$$

Если обратить эллиптическую квадратуру (20), то получим

$$\mu = \operatorname{sn}(m\tau, k). \tag{21}$$

Подставляя в формулы (7) вместо λ и μ их значения из (19) и (21), мы получим следующие выражения для прямоугольных координат спутника:

$$x = a \operatorname{cn} m\tau, \qquad z = b \operatorname{sn} m\tau, \tag{22}$$

где

$$a = c\sqrt{1 + \frac{fM}{2hc^3}}, \qquad b = c\frac{fM}{2hc^3}.$$

Очевидно, постоянные a и b являются соответственно большой и малой полуосями эллиптической орбиты. Связь между эксцентриситетом орбиты и ее большой полуосью дается формулой

$$e = \frac{c}{a}.$$

Модуль эллиптических функций k следующим образом выражается через эксцентриситет $k = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$.

Так как по сравнению с большой полуосью орбиты величина мала, то эксцентриситет и модуль также являются малыми величинами.

Найдем формулу, связывающую время t с регуляризирующей переменной τ. Прежде всего имеем

$$t - t_0 = \lambda^2\tau + \int_0^\tau \mu^2 d\tau,$$

где t_0 — некоторый начальный момент.

Подставим в равенство (23) формулу (21), а затем положим

$$s = \operatorname{sn} m\tau,$$

тогда получим

$$t - t_0 = \lambda^2\tau + \frac{1}{m}\int_0^s \frac{s^2\,ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$t - t_0 = \lambda^2\tau + \frac{1}{mk^2}\{\mathrm{F}(\operatorname{am} m\tau, k) - \mathrm{E}(\operatorname{am} m\tau, k\}, \tag{24}$$

где F и E суть эллиптические интегралы первого и второго рода. Формула (24) и дает искомую зависимость между τ и t.

Из формул (22) следует, что движение по эллиптической орбите является периодическим относительно τ с периодом, равным $4\mathrm{K}/m$, где K есть полный эллиптический интеграл первого рода. Этому промежутку изменения переменной τ соответствует следующий временной интервал:

$$T = \frac{4\lambda^2}{m}\mathrm{K} + \frac{1}{mk^2}(\mathrm{K} - \mathrm{E}),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода.

Величины K и E можно разложить в ряды по степеням модуля k, а следовательно, и по степеням эксцентриситета орбиты. Если проделать необходимые выкладки, то мы получим

$$T = \frac{2\pi}{n}\left\{1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e^4 + \ldots\right\}, \tag{25}$$

где

$$n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}}.$$

Следовательно, период обращения спутника вокруг Земли зависит не только от массы Земли, но и от ее сжатия.

§ 3. Движение внутри эллиптического кольца

В § 2 был указан следующий тип движения. Спутник все время движется внутри области, ограниченной двумя эллипсами. Координаты λ и μ в этом случае являются ограниченными, удовлетворяющими следующим условиям $\beta \leqslant \lambda \leqslant \alpha$, $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Легко видеть, что большая полуось и эксцентриситет внутреннего эллипса следующим образом выражается через корень α:

$$a_1 = c\sqrt{1+\alpha^2}, \qquad e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{26}$$

Внешний эллипс определяется следующими параметрами:

$$a_2 = c\sqrt{1+\beta^2}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{27}$$

Координата μ в этом случае изменяется так же, как и в случае эллиптического движения, т. е.

$$\mu = \mathrm{sn}\,(m\tau, k), \tag{28}$$

где

$$m = \delta\sqrt{2h}, \qquad k = \frac{1}{\delta}. \tag{29}$$

С помощью таблиц Рыжика и Градштейна [2] находим

$$\lambda = \frac{A + B\,\mathrm{cn}\,[\omega(\tau-\tau_0), \bar{k}]}{C + D\,\mathrm{cn}\,[\omega(\tau-\tau_0), \bar{k}]}, \tag{30}$$

где

$$A = \beta\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha\sqrt{1+\beta^2}, \qquad C = \sqrt{1+\beta^2} + \sqrt{1+\alpha^2},$$

$$B = \beta\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha\sqrt{1+\beta^2}, \qquad D = \sqrt{1+\alpha^2} - \sqrt{1+\beta^2},$$

$$\bar{k}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1+\alpha\beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}}\right\},$$

$$\omega = \sqrt[4]{4h^2(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}.$$

Подставим формулы (28) и (30) в равенства (7) и выразим постоянные A, B, C и D через параметры эллипсов. Тогда после некоторых упрощений получим

$$x = 2N\frac{\mathrm{dn}\,[\omega(\tau-\tau_0), \bar{k}]}{1 - \gamma\,\mathrm{cn}\,[\omega(\tau-\tau_0), \bar{k}]}\,\mathrm{cn}\,(m\tau, k),$$

$$z = N \frac{\sqrt{1-e_1^2} + \sqrt{1-e_2^2} - \left(\sqrt{1-e_1^2} - \sqrt{1-e_2^2}\right) \operatorname{cn}[\omega(\tau-\tau_0), \bar{k}]}{1 - \gamma \operatorname{cn}[\omega(\tau-\tau_0), \bar{k}]} \operatorname{sn}(m\tau, k),$$

где

$$N = -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \quad \gamma = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}.$$

Для постоянных m, ω, k и $\bar{k}$ имеем следующие выражения:

$$m = \sqrt{\frac{fM}{c^4} \frac{a_1\sqrt{1-e_1^2} + a_2\sqrt{1-e^2}}{2}},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{fM}{c^4} \frac{2a_1a_2}{a_1\sqrt{1-e_1^2} + a_2\sqrt{1-e_2^2}}},$$

$$k^2 = \frac{4e_1^2e_2^2}{(e_1\sqrt{1-e_1^2} + e_2\sqrt{1-e_2^2})^2},$$

$$\bar{k}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + e_1e_2 - \sqrt{(1-e_1^2)(1-e_2^2)}\right).$$

Последние равенства показывают, что и в этом случае модули эллиптических интегралов являются малыми величинами. Следовательно, для координат спутника можно получить удобные тригонометрические ряды. Для этого нужно разложить эллиптические функции в ряды по косинусам или синусам, кратным $\tau - \tau_0$, где τ_0 — некоторая постоянная. Вследствие того что k и $\bar{k}$ малы, полученные ряды будут быстро сходиться. Подобное разложение мы предполагаем выполнить для общего случая движения спутника в последующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961.

2. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М. — Л., 1951.

Поступила в редакцию
20. 1 1962 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии