Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1962

И. Д. НОВИКОВ

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ (I)

В рамках теории тяготения Эйнштейна рассматриваются некоторые свойства сферически симметричных распределений вещества. Доказывается возможность ослабления гравитационного действия шара путем добавления нового вещества, причем суммарное гравитационное действие шара и добавленного вещества можно сделать как угодно малым по сравнению с гравитационным действием одного шара.

В общей теории относительности гравитационное поле в пустоте, создаваемое некоторым статическим сферически-симметричным распределением масс, определяется константой $m$* (см. [1])

$$m = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \, dr, \tag{1}$$

где $\rho$ — плотность, $r$ — радиальная координата, выбранная таким образом, чтобы поверхность сферы с центром в начале координат имела площадь $4\pi r^2$. (Можно показать, что в статическом случае такой выбор всегда возможен.) Собственная масса гравитирующего шара определяется следующим образом:

$$M = \int_V \rho \, dV = 4\pi \int_0^r \rho \sqrt{-g_{11}} \, r^2 \, dr, \tag{2}$$

причем $-g_{11}$ всегда больше или равно единице и, следовательно,

$$M > m. \tag{3}$$

Это неравенство выражает то, что обычно называют гравитационным дефектом массы [2]. Если, не изменяя данного распределения, добавить некоторую массу, сферически-симметрично расположенную относительно того же центра, то увеличится как $M$, так и $m$.

В случае нестационарного распределения масс возможно, во-первых, нарушение неравенства (3), что можно интерпретировать, как по-

* Космическую постоянную $\Lambda$ в уравнениях Эйнштейна полагаем равной нулю.

явление гравитации, создаваемое массой, эквивалентной кинетической энергии движения; и, во-вторых, добавление некоторой массы, увеличивающее $M$, может уменьшать $m$, а следовательно, уменьшать гравитационное действие массы, расположенной вблизи центра, без изменения ее распределения.

В области, занятой веществом, будем пользоваться системой отсчета*, сопутствующей веществу. Примем, что поток энергии относительно вещества пренебрежимо мал. В любой сферически-симметричной системе отсчета интервал можно записать в виде (см. [1]).

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}\,dt^2 - e^{\lambda(r,t)}\,dr^2 - e^{\mu(r,t)}\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{4}$$

Положим $c = 1$, $k = 1$, где $k$ — постоянная тяготения Ньютона, $e^{\mu(r,t)}$ может быть немонотонной функцией $r$. Отметим, что если в некоторой системе отсчета $\mu' = 0$, а $\dot{\mu} \neq 0$ (штрих и точка означают частную производную соответственно по $r$ и $t$), то можно показать, что в окрестности этой сферы всегда возможно выбрать такую (сферически симметричную) систему координат, в которой $e^{\mu}$ является монотонной функцией $r$ **.

Рассмотрим некоторые свойства систем отсчета, в которых имеется такая сфера $(r, t)$, на которой $e^{\mu} \neq 0$, $\mu' = 0$, $\mu'' > 0$. Назовем сферу, где выполняются эти условия, горловиной. Очевидно, $r = \psi(t)$. Определим скорость движения этой точки относительно вещества. Так как система отсчета сопутствует веществу, то координатная скорость этого движения будет

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial\mu'}{\partial t}}{\dfrac{\partial\mu'}{\partial r}} = -\frac{\dot{\mu}'}{\mu''}. \tag{5}$$

Из уравнений Эйнштейна для сферически симметричного распределения вещества и вытекающих из них законов сохранения (см. [1]) следует, что при $\mu' = 0$

$$2\dot{\mu}' = \nu'\dot{\mu}, \quad \nu'(\rho + p) = -2p', \tag{6}$$

где $p$ — давление.

Из (5) и (6) получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p'\dot{\mu}'}{(\rho + p)\,\mu''}. \tag{7}$$

Таким образом вещество «вытекает» из горловины или «втекает» в нее в зависимости от знака произведения $p'\dot{\mu}$.

Определим скорость изменения размеров горловины. Так как $\mu' = 0$, то

$$\frac{d\mu}{dt} = \dot{\mu}. \tag{8}$$

Из уравнений Эйнштейна следует, что если $\mu' = 0$, $\dot{\mu} = 0$, $p \geqslant 0$ и эта точка не особая, то $\ddot{\mu} < 0$. Из (7) следует, что при этом $\dfrac{d\psi}{dt} = 0$. Поэтому при $\mu' = 0$ и $\dot{\mu} = 0$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = \ddot{\mu} < 0. \tag{9}$$

* Под системой отсчета мы понимаем совокупность координатных систем, связанных преобразованиями [3]: $\widetilde{x^0} = \widetilde{x^0}\ (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\widetilde{x^i} = \widetilde{x^i}\ (x^1, x^2, x^3)$; латинское индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие — 0, 1, 2, 3.

** Это имеет место, например, в случае замкнутой однородной модели Вселенной.

Таким образом, горловина не может существовать в случае стационарного распределения и, изменяясь, не может проходить через регулярный минимум.

Очевидно, аналогичные выводы справедливы и для точек, где $\mu' = 0$ и $\mu'' = 0$.

Положим $p = 0$, тогда вещество неподвижно относительно горловины. В этом случае решение уравнений Эйнштейна, допускающее немонотонное изменение $e^{\mu}$ по $r$, может быть записано в виде (где $e^{\mu/2} = R$, см. [1])

$$e^{\nu} = 1,\ e^{\lambda} = \frac{(R')^2}{1+f},\ t - \Phi = \frac{1}{f}\sqrt{fR^2 + FR} +$$
$$+ \frac{F}{(-f)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{-fR}{F}},\ 8\pi\rho = \frac{F'}{R'R^2}, \qquad (10)$$
$$-1 \leqslant f \leqslant 0,\ F \geqslant 0,$$

где $f$, $F$ и $\Phi$ — произвольные функции $r$, подчиненные лишь условиям, необходимым для существования достаточно гладких функций $R(r, t)$ и $\lambda\ (r, t)$*. (Частный случай решения Толмана [5].)

Для определения конкретного вида решения можно задать функции $f(r)$, $F(r)$ и $R(r) = R(r, 0)$. Зададим эти функции следующим образом:

$$-f = \begin{cases} \sin^2 r & 0 \leqslant r \leqslant 2{,}14 \\ 0{,}7 + (r - 2{,}36)^2 & 2{,}26 \leqslant r \leqslant 2{,}46 \\ \cos^2 r & 2{,}57 \leqslant r \leqslant 4{,}66 \\ 10^{-2} r^{-1} & r \geqslant 4{,}69 \end{cases} \qquad (11)$$

$$F = \begin{cases} \sin^3 r, & 0 \leqslant r \leqslant 2{,}89 \\ 0{,}009 \cos^{-2} r & 3{,}04 \leqslant r \leqslant 3{,}44 \\ 0{,}01, & r \geqslant 3{,}54. \end{cases} \qquad (12)$$

$$R = \begin{cases} \sin r & 0 \leqslant r \leqslant 2{,}09 \\ 0{,}001 \cos^2 r & 2{,}62 \leqslant r \leqslant 4{,}40 \\ 0{,}0025 r & 4{,}41 \leqslant r \leqslant 4{,}70 \\ r & r \geqslant 4{,}72. \end{cases} \qquad (13)$$

В промежутках между указанными областями задания функций последние доопределяются так, чтобы они были монотонны в этих промежутках и всюду достаточно гладки (что, очевидно, возможно). Эти функции везде дифференцируемы достаточное количество раз и удовлетворяют всем необходимым требованиям. Они определяют некоторое решение уравнений Эйнштейна. Для значений $0 \leqslant r \leqslant \frac{2}{3}\pi$ ед. длины и во всем интервале возможных значений $t$ $\rho$ есть функция только времени и это решение совпадает с фридмановским решением для однородной замкнутой модели Вселенной. При $r > \frac{2}{3}\pi$ ед. длины плотность спадает

* Приведенная форма записи охватывает только одну ветвь монотонного изменения $R$ по $t$. Другая форма записи приведена в [4].

до нуля к границе шара, которая соответствует $r = r_0$. Отметим, что $R$ — немонотонная функция $r$. Продемонстрируем с помощью этой модели, что увеличение собственной массы $M$ может сопровождаться уменьшением гравитационной массы $m$.

Рассмотрим шар $B$ с распределением и движением вещества, определяемым указанными выше функциями при $0 \leqslant r \leqslant r_1 < \frac{\pi}{2}$ ед. длины и на всем допустимом интервале изменения $t$. Пусть $r_1$ будет границей шара $B$, т. е. при $r > r_1$ положим $F = \text{const}$ и, следовательно, $p = 0$. Шар $B$ является центральной частью рассмотренного раньше шара, который мы будем называть шаром $A$. Преобразуем координату $r : \widetilde{r} = \sin r$, $\widetilde{r}_1 = \sin r_1$. При $t = 0$ шар $B$ достигает максимального объема и в этот момент во всем его объеме $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$. Систему координат продолжим за границу шара $B$ так (это возможно), чтобы она удовлетворяла условиям Лихнеровича [6] при $r = r_1$ и везде при $t = 0$ $\dot{\mu} = 0$. Тогда из уравнений Эйнштейна следует, что $\dot{\lambda}(r, 0) = 0$. Докажем, что при $t = 0$ вне шара геометрические свойства трехмерного пространства рассматриваемой системы отсчета совпадают с геометрическими свойствами пространства системы Шварцшильда *. Геометрические свойства трехмерного пространства определяются тензором [1, 3]

$$h = {}_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} .$$

Пусть рассматриваемая система и некоторая система координат $(x^\alpha)$ системы отсчета Шварцшильда связаны преобразованиями

$$x^0 = t,\ x^1 = x^1(\widetilde{r}, t),\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi.$$

Такая система координат в системе отсчета Шварцшильда, очевидно, существует. Тогда отличные от нуля компоненты $g_{\alpha\beta}$ шварцшильдовской системы отсчета можно выразить следующим образом:

$$\widetilde{g}_{00} = 1 - e^{\lambda} \left( \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x^0} \right)^2,\ \widetilde{g}_{11} = -e^{\lambda} \left( \frac{\partial r}{\partial x^1} \right)^2,\ \widetilde{g}_{01} =$$

$$= -e^{\lambda} \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x^0} \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x^1},\ \widetilde{g}_{22} = R^2,\ g_{33} = R^2 \sin^2 \theta. \tag{14}$$

Рассматриваемая система при $t = 0$ не деформируется, и так как она не может двигаться как целое относительно системы Шварцшильда, то эти системы в рассматриваемый момент неподвижны относительно друг друга, т. е. $\frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x^0} = 0$. В этот же момент времени при надлежащем выборе масштаба $\frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x^1} = 1$. Подставляя эти значения в (14) и используя (11), получаем при $t = 0$

$$h_{ik} = \widetilde{h}_{ik}, \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

В системе Шварцшильда $\widehat{h}_{11}$ определяет массу $m$ центрального тела

$$h_{11} = \left(1 - \frac{2m}{x^1}\right)^{-1}. \tag{16}$$

* Под системой отсчета Шварцшильда мы понимаем совокупность систем координат неподвижных относительно системы координат Шварцшильда [7].

Следовательно, используя (15) и (16), мы можем определить $m$. Так как $h_{11}$ непрерывна, то для вычисления достаточно определить значение $h_{11}$ (при $t=0$) на границе шара. В результате получаем при $\bar{r}_1 = 0{,}9$ ед. длины и $\rho = \frac{3}{8\pi}$ ед. длины, например,

$$m = 0{,}36 \text{ ед. длины.} \tag{17}$$

Собственная масса шара $B$ вычисляется следующим образом:

$$M = \int_V \rho\, dV = \frac{1}{2}\int_0^{r_1} \frac{|F'|}{\sqrt{1+f}}\, dr = 0{,}55 \text{ ед. длины.} \tag{18}$$

Дополним теперь шар $B$ до шара $A$ и вычислим $M$ и $m$ последнего. Воспользовавшись тем, что при $r \gg r_0$ и при $t = 0$, $\lambda = \mu = 0$, используя доказанные выше утверждения, получаем

$$m = 0{,}005 \text{ ед. длины,} \tag{19}$$

$$M = 2{,}86 \text{ ед. длины.} \tag{20}$$

Сравнение этих значений с (17) и (18) показывает, что добавленное вещество ослабило гравитационное действие центральных частей шара, не меняя структуры этих частей.

Этот результат отличается от результата, приведенного в [8]. В примере, данном в [8] гравитационная масса уменьшается (при неизменной собственной массе) по тому же закону, что и радиус шара (для малых радусов), и требует изменения внутренней структуры шара*. С метрикой (1) из (8) вообще нельзя получить наш результат: возможно, добавляя вещество,** ослаблять суммарное гравитационное действие. Здесь существенна немонотонность $R$ как функции $r$. Суммарная гравитационная масса при этом может быть сделана сколь угодно малой.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Потенциальная энергия (отрицательная) гравитационного взаимодействия добавленного вещества и уже имевшегося больше энергии, соответствующей массе добавленного вещества. Это и приводит к уменьшению суммарной гравитационной массы.

С помощью вакуольной модели (см. [9]) можно показать, что подобным же образом можно уменьшать гравитационное действие статического шара.

Рассмотрим следующий частный вид решения (10). Функции $f(r)$, $F(r)$ и $R = R(r, 0)$ задаются следующим образом:

$$-f = \begin{cases} 10(r^2+1)^{-1} & |r| \geqslant 3{,}6 \\ 0{,}75 & 3{,}4 \geqslant |r| \geqslant 0{,}5 \\ 1 - r^2 & 0{,}45 \geqslant |r| \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} 0{,}99(r^2+1) & r \leqslant 0{,}3 \\ 1 & r \geqslant 0{,}32 \end{cases}$$

$$R = 0{,}1(r^2+1)$$

В промежутках между указанными областями функции доопределяются аналогично функциям (11), (12) и (13).

---

* Уменьшение размеров шара, а следовательно и массы, ограничено размерами слагающих частиц.

** В смысле задания начальных условий.

Область пространства, занятая веществом, имеет бесконечный собственный объем. Вычисления, аналогичные предыдущим, дают

$$M = \infty, \quad m = 0{,}5 \text{ ед. длины.} \tag{21}$$

Вне вещества гравитационное поле такое же, как и вне шара с массой, равной 0,5 ед. длины. Отметим, что сопутствующее пространство системы отсчета в данном случае не является односвязным.

Можно показать, что существуют решения уравнений Эйнштейна, обладающие свойствами аналогичными указанным в последних двух пунктах и при состоянии вещества с $p \neq 0$.

Изложенные соображения могут оказаться существенными при рассмотрении систем типа метагалактики или сверхплотных конфигураций.

Автор благодарит А. Л. Зельманова за постоянный интерес к работе и дискуссию.

Когда настоящая работа находилась в печати, акад. Я. Б. Зельдович сообщил автору, что в печати находится его работа (ЖЭТФ, № 9, 1962), в которой исследуются модели, аналогичные модели описываемой формулами (10), (11), (12), (13).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, Физматгиз, 1962.
2. Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А. ЖЭТФ, **41**, 3, 910, 1961.
3. Зельманов А. Л., ДАН СССР, **124**, 5, 1030, 1959.
4. Bonnor W. Astrophys. Zs. f., **39**, 143, 1956.
5. Tolman R. Proc. Nat. Acad. Sci., **20**, 169, 1934.
6. Lichnerowicz A. Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetism, Paris, 1955.
7. Schwarzschild K. Berl. Ber., p. 189, 1916.
8. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, **42**, 2, 641, 1962.
9. Gilbert C. Monthly Notices, **116**, 678, 1956.

Поступила в редакцию
27. 3 1962 г.

Кафедра
астрофизики