Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1962

В. В. КРАВЦОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГАРМОНИК ТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

В настоящей работе задача о дифракции произвольной волны на замкнутом теле сводится к интегральному уравнению первого рода в стационарном случае и интегро-функциональному уравнению первого рода в нестационарном случае.

§ 1. Скалярный случай

Путь T — тело вращения, ограниченное замкнутой поверхностью S. Систему координат выберем цилиндрическую с осью z, направленной вдоль оси симметрии. Тогда поверхность может быть задана уравнением $r=f(z)$ $(a\leqslant z \leqslant b;\ a<0,\ b>0)$. Будем предполагать, что функция $f(z)$ кусочно-дифференцируема.

Пусть на поверхность S падает произвольная волна $u_0(M)$. Тогда полное поле $u(M)$ в присутствии поверхности может быть записано в виде

$$u(M) = u_0(M) + v(M),$$

где $v(M)$ есть решение следующей краевой задачи (для простоты рассматривается задача Дирихле):

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad v|_S = u_0|_S,$$

$$\frac{\partial v}{\partial R} + ikv = 0\left(\frac{1}{R}\right) \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

Функция $v(M)$, являющаяся решением этой краевой задачи, выражается через значения на поверхности самой функции и ее нормальной производной при помощи формулы Грина:

$$v(M) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{\frac{e^{-ikR}}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial n}(p) - v(p)\,\frac{\partial}{\partial n}\cdot\frac{e^{-ikR}}{R}\right\} dS_p,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности. Следовательно, задача сводится к определению $\left.\dfrac{du}{dn}\right|_S$ для первой краевой задачи. Для определения этой функции (в дальнейшем ее будем называть «наведенным током») можно получить, используя теорию потенциала, интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Мы получим уравнения первого рода с ядром, не имеющим особенностей. Для этого используем несколько усовершенствованный метод, примененный в работе [1].

Пусть $v(M)$ есть решение волнового уравнения, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности и краевому условию первого рода. Введем функцию $w(r, \varphi, z; \eta) = r^{\nu} \dfrac{H^{(2)}_{\nu+1/2}\left[k\sqrt{(z-\eta)^2+r^2}\right]}{[(z-\eta)^2+r^2]^{\frac{2\nu+1}{4}}} e^{-i\nu\varphi}$ $(\nu = 0, \ 1, \ldots)$, где $H^{(2)}_{\nu+1/2}(z)$ — функция Ханкеля второго рода полуцелого порядка, $a < \eta < b$, т. е. точка $p(0, 0, \eta)$ лежит на оси симметрии строго внутри поверхности S. Эта функция удовлетворяет волновому уравнению $\Delta w + k^2 w = 0$ по переменным r, φ, z, условию излучения на бесконечности и регулярна в области, внешней к поверхности S. Применив теорему Грина к функциям $v(M)$ и w, получим интегральное уравнение

$$\int_a^b \left\{ r^{\nu} A^{-\frac{2\nu+1}{4}} H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2}) \frac{\partial v_\nu}{\partial n} - v_\nu(z) \frac{\partial}{\partial n} \left(r^{\nu} A^{-\frac{2\nu+1}{4}} H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2}) \right) \right\} \times$$

$$\times f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)}\, dz = 0, \qquad (1)$$

где $v = 0, \ 1, \ 2, \ldots, A = (z-\eta)^2 + r^2$, $r = f(z)$, $a < \eta < b$, $v_\nu(z)$ — гармоники функции $v(M)$ на поверхности S:

$$v(M)|_S = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} v_\nu(z) e^{i\nu\varphi},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_\nu}{\partial n}(z) e^{i\nu\varphi}$$

относительно $\left.\dfrac{\partial v_\nu}{\partial n}\right|_S$. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода (1) при $\nu=0$ получено в работе [1]. Уравнения первого рода для высших гармоник «тока» ранее не рассматривались, хотя при $\nu=1$ его можно получить методом, примененным в [1] к электромагнитному случаю.

Таким образом, для определения отраженного поля надо из уравнения (1) найти гармоники тока, а затем использовать формулу Грина, дающую поле вне поверхности. Для того чтобы получить соответствующие уравнения для случая нестационарной дифракции, мы заметим, что к нему можно перейти от стационарного случая формально, применив преобразование Фурье по частоте $k = \dfrac{\omega}{c}$. Тогда получим, что решением краевой задачи

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U, \qquad U|_{t<0} \equiv 0$$

с граничными условиями первого или второго рода является функция

$$U(M, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial n} \left(\rho, t - \frac{R}{c} \right) - U\left(\rho, t - \frac{R}{c} \right) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{cR} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial t} \left(\rho, t - \frac{R}{c} \right) \right\} dS_\rho$$

(формула Кирхгоффа — Соболева), где $U|_S$ для первой краевой задачи определяются из граничных условий, а остальные функции, входящие в подынтегральное выражение, должны быть найдены из следующего интегро-функционального уравнения, которое получается из уравнения (1) путем формального применения преобразования Фурье:

$$\left(U(M,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(M,k)\, d\omega\right),$$

$$\int_a^b A^{-1/2}\Big\{\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial n} A^{-\frac{2n+3}{4}} U_n\left(z, t-\frac{A^{1/2}}{c}\right) + c\int_0^{t-\frac{A^{1/2}}{c}} \frac{\partial U_n}{\partial n}(z,\tau)\,d\tau \cdot r^n A^{-\frac{2n+1}{4}} +$$

$$+ c\left(r^n A^{-\frac{2n+5}{4}} \frac{1}{4} \frac{\partial A}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(r^n A^{-\frac{2n+1}{4}}\right)\right) \int_0^{t-\frac{A^{1/2}}{c}} U_n(z,\tau)\,d\tau +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+\nu)!}{\nu!\,(n-\nu)!}\,\frac{c^{\nu+1}}{(2A^{1/2})^{\nu}}\, r^n A^{-\frac{2n+1}{4}}\, \frac{1}{\nu!}\int_0^{t-\frac{A^{1/2}}{c}} \left(t-\frac{A^{1/2}}{c}-\tau\right)^{\nu} \frac{\partial U_n}{\partial n}(z,\tau)\,d\tau +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n+n)!}{\nu!\,(n-\nu)!}\,\frac{c^{\nu}}{(2A^{1/2})^{\nu}}\int_0^{t-\frac{A^{1/2}}{c}}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{\partial A}{\partial n}\, r^n A^{-\frac{2n+3}{4}}\left(t-\frac{A^{1/2}}{c}-\tau\right)^{\nu-1} +\right.$$

$$+\left(\frac{c}{2A^{1/2}}\,\frac{\nu+1/2}{\nu!}\,\frac{\partial A}{\partial n}\, r^n A^{-\frac{2n+3}{4}} - \frac{c}{\nu!}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(r^n A^{-\frac{2n+1}{4}}\right)\right)\times$$

$$\left.\times\left(t-\frac{A^{1/2}}{c}-\tau\right)^{\nu}\right] U_n(z,\tau)\,d\tau\Big\} f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}\,dz = 0, \quad (n=0,1,2,\ldots), \qquad (2)$$

где

$$A = (z-\eta)^2 + r^2, \qquad a < \eta < b, \qquad r = f(z),$$

$U_n(z)$ — гармоники поля на поверхности

$$U(M,t)|_S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(z,t)\, e^{in\varphi}$$

и предполагается выполнение условия $U_n(z,t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$, что соответствует наличию у падающей волны резкого переднего фронта. Это условие можно усилить, т. е. потребовать выполнения условия $U_n(z,t) \equiv 0$ при $t \leqslant t_1(z)$, где $t_1(z)$ — время прихода переднего фронта падающей волны в точку поверхности с координатой z; $t_1(z)$ легко найти, зная форму фронта падающей волны и форму поверхности.

§ 2. Электромагнитный случай

Пусть на идеальную поверхность S (предположения относительно поверхности остаются прежними) падает произвольная электромагнитная волна $\vec{\mathscr{E}}_0(M)$, $\vec{H}_0(M)$. Полное поле опять представляем в виде суммы:

$$\vec{E}'(M) = \vec{\mathscr{E}}_0(M) + \vec{E}(M),$$

$$\vec{H}'(M) = \vec{H}_0(M) + \vec{H}(M),$$

где отраженное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ является решением краевой задачи для уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = ik\vec{H}, \qquad \operatorname{div}\vec{E} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -ik\vec{E}, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0$$

с граничным условием $[\vec{n}\vec{E}]|_S = -[\vec{n}\vec{\mathscr{E}}_0]|_S$ и условиями излучения на бесконечности ($\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль). Для получения интегральных уравнений для тока применим векторный аналог теоремы Грина:

$$\oint_S \{\{\vec{Q}\operatorname{div}\vec{p} - \vec{p}\operatorname{div}\vec{Q}\}\vec{n} - (\vec{Q}[\vec{n}\operatorname{rot}\vec{p}] + \operatorname{rot}\vec{Q}[\vec{n}\vec{p}])\}\,ds = 0$$

к функциям $\vec{Q} = \vec{H}(M)$

$$\vec{p} = \vec{a}r^{\nu}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2})\,e^{-i\nu\varphi},$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}, \quad A = (z-\eta)^2 + r^2$$

и к области вне поверхности S (обозначения прежние). Тогда получим искомое интегральное уравнение

$$\int_a^b \{(\vec{n}\vec{H}_\nu)\operatorname{grad}(r^{\nu}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2})) + i\nu\vec{e}_\varphi r^{\nu-1}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2}) +$$

$$+ ikr^{\nu}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2})\,[\vec{n}\vec{E}_\nu] + [\operatorname{grad}(r^{\nu}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2}));\ [\vec{n}\vec{H}_\nu]] +$$

$$+ i\nu\,[\vec{e}_\varphi[\vec{n}\vec{H}_\nu]]\,r^{\nu-1}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2})\}\,f(z)\sqrt{1+f'^2(z)} = 0, \quad . \; . \; . \quad (3)$$

где $\vec{e}_\varphi$ — единичный координатный вектор, соответствующий координате φ, $\vec{E}_\nu(z)$, $\vec{H}_\nu(z)$ — гармоники полей на поверхности

$$\vec{E}(M)|_S = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\vec{E}_\nu(z)\,e^{i\nu\varphi},$$

$$\vec{H}(M)|_S = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\vec{H}_\nu(z)\,e^{i\nu\varphi}.$$

Это уравнение относительно гармоник тока $\vec{j}_\nu = [\vec{n}\vec{H}_\nu]$ (для идеальной поверхности), так как $(\vec{n}\vec{H})|_S = -(\vec{n}\vec{H}_0)|_S$. При помощи той же теоремы Грина, полагая $\vec{Q} = \vec{E}(M)$, $\vec{p} = \vec{a}r^{\nu}A^{-\frac{2\nu+1}{4}}H^{(2)}_{\nu+1/2}(kA^{1/2})\,e^{i\nu\varphi}$, можно получить второе интегральное уравнение, но оно непригодно для численного решения, поскольку наряду с «магнитным током» $\vec{j}_\nu = [\vec{n}\vec{H}_\nu]$ будет содержать и «электрический ток» $\vec{j}_\nu = (\vec{n}\vec{E}_\nu)$. Поэтому мы не будем это уравнение и выписывать. Легко видеть, что уравнения для компонент гармоник тока $j_{\nu\varphi}$ и $j_{\nu\varphi}$ распадаются.

Таким образом, для определения отраженного электромагнитного поля надо решить уравнение (2), а затем использовать формулы Стрэттона — Чу, дающие поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вне поверхности по их значениям на поверхности

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ik[\vec{n}\vec{H}]\frac{e^{-ikR}}{R} + \left[[\vec{n}\vec{E}]\,\mathrm{grad}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\right] + (\vec{n}\vec{E})\,\mathrm{grad}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\right\}ds,$$

$$\vec{H}(M) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{ik[\vec{n}\vec{E}]\frac{e^{-ikR}}{R} - \left[[\vec{n}\vec{H}]\,\mathrm{grad}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\right] - (\vec{n}\vec{H})\,\mathrm{grad}\,\frac{e^{-ikR}}{R}\right\}ds.$$

Аналогично скалярному случаю, применяя преобразование Фурье, получим решение краевой задачи для уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{F} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0,$$

с граничным условием на идеальной поверхности

$$[\vec{n}\vec{E}]\,|_S = -[\vec{n}\vec{\mathscr{E}}_0]\,|_S, \quad \vec{E}\,|_{t=0} = \vec{H}\,|_{t=0} = 0$$

дается формулой, обобщающей формулу Кирхгоффа — Соболева на электромагнитный случай,

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{\frac{1}{cR}\left[\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\left(p, t - \frac{R}{c}\right), \ \vec{n}\right] - \right.$$

$$-\frac{1}{c}\left[\left[\vec{n}, \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right]\frac{\vec{R}_0}{R}\right] + \left[\left[\vec{n}, \vec{E}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right]\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\right] -$$

$$\left. -\frac{1}{c}\frac{\vec{R}_0}{R}\left(\vec{n}, \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right) + \left(\vec{n}, \vec{E}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right)\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\right\}dS_p.$$

$$\vec{H}(M, t) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{\frac{1}{cR}\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\left(p, t - \frac{R}{c}\right), \ \vec{n}\right] + \right.$$

$$+\frac{1}{c}\left[\left[\vec{n}, \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right]\frac{\vec{R}_0}{R}\right] - \left[\left[\vec{n}; \vec{H}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right]\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\right] +$$

$$\left. +\frac{1}{c}\frac{\vec{R}_0}{R}\left(\vec{n}, \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right) - \left(\vec{n}, \vec{H}\left(p, t - \frac{R}{c}\right)\right)\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\right\}dS_p,$$

где $\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль $p \in s$, R — расстояние между точками, $\vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{R}$ — единичный вектор в направлении $\vec{R}$. $[\vec{n}\vec{E}]$ и $(\vec{n}\vec{H})$ на поверхности берутся из граничных условий, а недостающие значения полей на поверхности должны быть найдены из интегро-функционального уравнения, получающегося формальным преобразованием Фурье из уравнения (2)

$$\int_a^b \Big\{\{\mathrm{grad}\,(r^\nu A^{-\frac{2\nu+1}{4}}) + i\nu r^{\nu-1} A^{-\frac{2\nu+1}{4}} \vec{e}_\varphi\} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \frac{c^{\mu-\nu}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left(\vec{n};\ \vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu)}\left(z,\, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,A r^\nu A^{-\frac{2\nu+3}{4}} \times$$

$$\times \left\{\frac{\nu+1/2}{A^{1/2}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \frac{c^{\mu-\nu}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left(\vec{n};\ \vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu)}\left(z, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \frac{(\nu+\mu+1)!}{\mu!\,(\nu-\mu+1)!} \frac{c^{\mu-\nu-1}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left(\vec{n};\ \vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu+1)}\left(z,\, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right)\right\} +$$

$$+ r^\nu A^{-\frac{2\nu+1}{4}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \frac{c^{\mu-\nu-1}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left[\vec{n};\ \vec{E}_{\nu t}^{(\nu-\mu+1)}\left(z,\, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \frac{c^{\mu-\nu}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left[\mathrm{grad}\,(r^\nu A^{-\frac{2\nu+1}{4}});\ \left[\vec{n};\ \vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu)}\left(z,\, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right]\right] +$$

$$+ i\nu r^{\nu-1} A^{-\frac{2\nu+1}{4}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \frac{c^{\mu-\nu}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left[\vec{e}_\varphi \left[\vec{n}, \vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu)}\left(z,\, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right]\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} r^\nu A^{-\frac{2\nu+3}{4}} \left\{\frac{\nu+1/2}{A^{1/2}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \frac{c^{\mu-\nu}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left[\mathrm{grad}\,A \left[\vec{n}\vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu)}\left(z, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right]\right] -\right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \frac{(\nu+\mu+1)!}{\mu!\,(\nu-\mu+1)!} \frac{c^{\mu-\nu-1}}{(2A^{1/2})^{\mu+1/2}} \left[\mathrm{grad}\,A;\ \left[\vec{n}\vec{H}_{\nu t}^{(\nu-\mu+1)}\left(z, t - \frac{A^{1/2}}{c}\right)\right]\right]\right\}\Big\} \times$$

$$\times f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)}\, dz = 0, \qquad (4)$$

где $\vec{H}_{\nu t}^{(\alpha)}(z, \tau) = \frac{\partial^\alpha \vec{H}_\nu}{\partial t^\alpha}(z, \tau)$, $\vec{E}_{\nu t}^{(\alpha)}(z, \tau) = \frac{\partial^\alpha E_\nu}{\partial t^\alpha}(z, \tau)$,

$\vec{H}_\nu$ и $\vec{E}_\nu$ — гармоники поля на поверхности, остальные обозначения прежние, $\vec{H}_\nu(z, t) = \vec{E}_\nu(z, t) \equiv 0$ при $t \leqslant t_1(z)$. Уравнения (2) и (4) записаны несколько в различной форме: уравнение (3) содержит интегралы по времени, а (4) — производные. Но их можно привести к одной форме, например, продифференцировав (3) нужное число раз по t или проинтегрировав (4) по t.

Все время мы рассматривали первую краевую задачу. Но уравнения (1) — (4) можно использовать для нахождения гармоник «тока» и при более сложных граничных условиях, например: для краевой задачи третьего рода в скалярном случае или для импедансной поверхности в электромагнитном случае.

§ 3. Единственность решения интегральных уравнений

Уравнения (1) — (4) всегда имеют решение, если имеет решение соответствующая краевая задача для дифференциальных уравнений. Поэтому рассмотрим только вопрос о единственности решений. При этом мы будем рассматривать соответствующее однородное уравнение. Для простоты ограничимся случаем первой краевой задачи и введем обозначение

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial n}(z) f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} = u(z).$$

Итак, рассматриваем вопрос о единственности решения уравнения

$$\int_a^b r^n \frac{H^{(2)}_{n+1/2}(k\sqrt{(z-\eta)^2 + r^2})}{[(z-\eta)^2 + r^2]^{\frac{2n+1}{4}}} u(z)\, dz = 0, \tag{5}$$

где $a<0$, $b>0$, $a+\varepsilon \leqslant \eta \leqslant b-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $r=f(z)$, $f(z)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, $f(a)=f(b)=0$, $f(z)>0$ при $a<z<b$, соответствующего первой однородной краевой задаче (случай скалярный).

Введем следующее обозначение:

$$F_n(z, \eta) = r^n \frac{H^{(2)}_{n+1/2}[k\sqrt{(z-\eta)^2 + r^2}]}{[(z-\eta)^2 + r^2]^{\frac{2n+1}{4}}}. \tag{6}$$

Известно [1], что при $n=0$ уравнение (5) имеет только нулевое решение , т. е. ядро $F_0(z, \eta)$ замкнуто. Цель данной работы — доказать единственность решения уравнения (1), т. е. замкнутость ядер $F_n(z, \eta)$ при $n=1, 2, \ldots$. Легко показать непосредственным вычислением, что ядра $F_n(z, \eta)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$r \frac{\partial F_n}{\partial \eta} = k(z-\eta) F_{n+1}(z, \eta). \tag{7}$$

Основная идея доказательства.

1. Доказать, что если ядро $F_n(z, \eta)$ замкнуто, то будет замкнуто и ядро $r \frac{\partial F_n}{\partial \eta}$ (z, η) (всюду $r=f(z)$).

2. Доказать, что если замкнуто ядро $k(z-\eta)$ $F_{n+1}(z, \eta)$, то будет замкнуто и ядро F_{n+1} (z, η).

3. После доказательства первых двух утверждений применяется метод индукции, поскольку $F_0(z, \eta)$ — замкнутое ядро. Отсюда должно следовать, что все ядра $F_n(z, \eta)$ $(n=1, 2, \ldots)$ замкнуты. (Замкнутость ядер рассматривается в пространстве непрерывных функций.)

Теперь приступим к выполнению намеченной программы. Отметим, что, используя «теорему сложения» для цилиндрических функций [3], можно показать, что уравнение (5) эквивалентно системе соотношений

$$\int_a^b H^{(2)}_{n+\mu+1/2}[k\sqrt{z^2+r^2}]\, P^{(n)}_{n+\mu}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right] w(z)\, dz = 0, \tag{8}$$

при $\mu = 0,\ 1,\ 2 \ldots,$

где $w(z)$ связана с искомой функцией $u(z)$ следующим образом:

$$w(z) = \frac{r^n}{[z^2+r^2)^{\frac{n}{2}+1/4}} \left[\frac{r^2}{r^2+z^2}\right]^{-\frac{n}{2}} u(z).$$

В дальнейшем введем обозначение

$$\nu^{(n)}_\mu(z) = H^{(2)}_{n+\mu+1/2}[k\sqrt{z^2+r^2}]\ P^{(n)}_{n+\mu}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right].$$

Сразу заметим, что при наших предположениях относительно $f(z)$ $z^2+r^2 \geqslant \alpha > 0$. Ядро $\eta^{n+1/2}\frac{\partial F_n}{\partial\eta}(z,\eta)$ по той же «теореме сложения» можно разложить в ряд

$$\eta^{n+1/2}\frac{\partial F_n}{\partial\eta}(z,\eta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(n)}_\mu\, \nu^{(n)}_\mu(z)\, \frac{\partial}{\partial\eta} I_{n+\mu+1/2}(k\eta),$$

так как при $k\eta \ll 1$ (при малых η)

$$\frac{\partial}{\partial\eta} I_{n+\mu+1/2}(k\eta) \sim C\left(\frac{k\eta}{2}\right)^{n+\mu-1/2},$$

то интегральное уравнение

$$\int_a^b \frac{\partial F_n}{\partial\eta}(z,\eta)\, u(z)\, dz = 0$$

эквивалентно системе соотношений (8). Отсюда следует, что ядра $F_n(z,\eta)$ и $r\frac{\partial F_n}{\partial\eta}(z,\eta)$ замкнуты оба, если замкнуто одно из них. Это доказывает первое утверждение.

Теперь рассмотрим ядра $F_{n+1/2}(z,\eta)$ и $k(z-\eta)F_{n+1/2}(z,\eta)$. Ясно, что интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром $F_{n+1}(z,\eta)$ эквивалентно системе соотношений (8), где следует n заменить на $n+1$. Ядро $k(z-\eta)F_{n+1}(z,\eta)$ может быть представлено в виде

$$k(z-\eta)F_{n+1}(z,\eta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} kA^{(n+1)}_\mu\, \nu^{(n+1)}_\mu(z)(z-\eta)\, I_{n+3/2+\mu}(k\eta)$$

и интегральное уравнение первого рода с этим ядром имеет вид

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(n+1)}_\mu I_{n+3/2+\mu}(k\eta)\{\Phi^{(n+1)}_\mu(u) - \eta\, \Psi^{(n+1)}_\mu(u)\} = 0, \tag{9}$$

где введены обозначения

$$\Phi_{\mu}^{(n+1)}(u)=\int_{a}^{b} zV_{\mu}^{(n+1)}(z)\,u(z)\,dz,$$

$$\Psi_{\mu}^{(n+1)}(u)=\int_{a}^{b} V_{\mu}^{(n+1)}(z)\,u(z)\,dz.$$

Уравнение (5) эквивалентно системе соотношений

$$\begin{gathered}\Phi_{0}^{(n+1)}(u)=0,\\ A_{\mu}^{(n+1)}\,\Phi_{\mu}^{(n+1)}(u)-A_{\mu-1}^{(n+1)}\,\Psi_{\mu-1}^{(n+1)}(u)=0,\\ (\mu=1,2,\ldots)\end{gathered}\tag{10}$$

и

$$\begin{gathered}\Phi_{0}^{(n+1)}(u)=0,\\ A_{\mu}^{(n+1)}\,\Phi_{\mu}^{(n+1)}(u)+A_{\mu-1}^{(n+1)}\Psi_{\mu-1}^{(n+1)}(u)=0,\\ (\mu=1,2,\ldots).\end{gathered}\tag{11}$$

Соотношения (11) получаются, если в (9) η заменить на $-\eta$. Складывая и вычитая (10) и (11), получим

$$\Phi_{\mu}^{(n+1)}(u)=0,\quad (\mu=0,1,2,\ldots),\tag{12}$$

$$\Psi_{\mu}^{(n+1)}(u)=0,\quad (\mu=0,1,2,\ldots).\tag{13}$$

Соотношения (13) совпадают с (8) при $n'=n+1$. Следует отметить, что уравнение (9) будет эквивалентно одному из соотношений (12) или (13), поскольку одно из них влечет за собой другое. Отсюда следует, что ядра $F_{n+1}(z,\eta)$ и $k(z-\eta)\,F_{n+1}(z,\eta)$ замкнуты оба, если замкнуто одно из них. Этим доказано второе утверждение.

Согласно третьему утверждению все ядра $F_n(z,\eta)$ $(n=0,1,2\ldots)$ оказываются замкнутыми, и, следовательно, уравнение (1) имеет единственное нулевое решение *.

Аналогичным образом можно доказать единственность решения интегрального уравнения, соответствующего второй скалярной краевой задаче, и уравнения (3). Что касается уравнений (1) и (4), то единственность их решений можно получить из единственности решений уравнений (1) и (2), наложив дополнительные условия, обеспечивающие существование соответствующих преобразований Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Говорун Н. Н. «ДАН СССР», **126**, № 1, 49, 1959.
2. Говорун Н. Н. «ДАН СССР», **132**, № 1, 91, 1960.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1. ИЛ, М., 1949.

Поступила в редакцию
9. 3 1962 г.

Кафедра
математики

* В том случае, когда $f(z)=\sqrt{R^2-z^2}$, $a=-R$, $b=R$, единственность решения не требует особого доказательства, так как в этом случае система $\nu_{\mu}^{n}(z)$ превращается в систему присоединенных полиномов Лежандра $P_{n+\mu}^{n}(z)$, которая, как известно, замкнута.