Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1962

В. П. ГОРЬКОВ

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ВОЛНОВОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Рассматривается дисперсионное уравнение для обыкновенной волны, учитывающее волновое магнитное поле, для произвольной функции распределения электронов.

В однородной неограниченной плазме могут существовать два типа волн, распространяющихся поперек внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$: обыкновенная волна с электрическим вектором, поляризованным по $\vec{H}_0$, и обыкновенная и плазменная волны, электрический вектор в которых перпендикулярен к $\vec{H}_0$. Частота ω и постоянная распространения волны k связаны дисперсионным уравнением, получаемым с помощью системы уравнений Максвелла и кинетического уравнения. Обычно при исследовании дисперсионного уравнения функцию распределения электронов невозмущенного состояния считают максвелловской [1—2].

В настоящей работе исследуется дисперсионное уравнение обыкновенной волны для произвольной функции распределения электронов $f_0(v, u)$ (v — поперечный, u — продольный компоненты скорости электронов относительно магнитного поля $\vec{H}_0$), учитывающее волновое магнитное поле.

Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны, распространяющейся поперек внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$, имеет вид:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega\,\omega_0^2}{\omega_H c^2}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\,\frac{\partial f_0}{\partial u}\, e^{-\frac{ikv\sin\vartheta}{\omega_H}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n\left(\frac{kv}{\omega_H}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{e^{in\vartheta}}{n-\omega/\omega_H}\, v\,dv\,du\,d\vartheta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial v}u - v\,\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)\times$$

$$\times e^{\frac{ikv\sin\vartheta}{\omega_H}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n\left(\frac{kv}{\omega_H}\right)\left[\frac{e^{i(n+1)\vartheta}}{n+1-\frac{\omega}{\omega_H}} + \right.$$

$$+\frac{e^{i(n-1)\vartheta}}{n-1-\frac{\omega}{\omega_H}}\Bigg] v dv du d\vartheta \Bigg\} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ — ларморовская частота, $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$ — плазменная частота электронов, ϑ — полярный угол в пространстве скоростей (ось z направлена вдоль магнитного поля $\vec{H}_0$, ϑ — отсчитывается от оси x), $I_n\left(\frac{kv}{\omega_H}\right)$ — функция Бесселя.

В уравнении (1) второй интегральный член учитывает влияние магнитного поля. Этот член обращается в нуль, если распределение по скоростям изотропно, т. е. $f_0(v, u) = f_0(v^2+u^2)$. В этом случае дисперсионное уравнение (1) принимает вид

$$G(k, \omega) = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega\omega_0^2}{\omega_H c^2} 2\pi \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{I_n^2\left(\frac{kv}{\omega_H}\right)}{n-\frac{\omega}{\omega_H}} v\,dv\,du = 0. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать такое дисперсионное уравнение, в котором по известному волновому числу k нужно определить частоту ω. Покажем, что уравнение (2) при заданной вещественной постоянной распространения k не имеет комплексных корней $\omega(k)$. Для этого, как и в работе [1], воспользуемся принципом аргумента, который состоит в следующем: если функция $G(k, \omega)$ аналитична в области D комплексного переменного ω всюду, кроме конечного числа особых точек типа полюса, и не обращается в нуль на границе области C, то изменение аргумента $C(k, \omega)$ при обходе контура C в положительном направлении, деленное на 2π, равняется разности между числом нулей и полюсов функции $G(k, \omega)$ в области D:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} var(\arg G(k\omega)). \tag{3}$$

На плоскости комплексного переменного ω рассмотрим круг D_m радиуса $R_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega_H$, где m — достаточно большое целое число. На окружности C_m такого радиуса

$$\left| \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{I_n^2\left(\frac{kv}{\omega_H}\right)}{n-\frac{\omega}{\omega_H}} v\,d v\,d u \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2I_n^2\left(\frac{kv}{\omega_H}\right) v\,d v\,du =$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0 v\,dv\,du \leqslant \mathrm{const}$$

использовано тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n^2(x) = 1.$$

Тогда при достаточно большом m вариация аргумента $G(k, \omega)$ при обходе по окружности C_m будет определяться членом $-\frac{\omega^2}{c^2}$. Она равна $\frac{1}{2\pi}\ var \times \times \left(\arg - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 2.$

Внутри круга D_m функция имеет $2m$ полюсов первого порядка в точках $\omega = \pm n\omega_H$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$. Поэтому согласно (3) общее число корней дисперсионного уравнения (2) в области D_m будет равно

$$N_m = P_m + \frac{1}{2}\ var\,(\arg G(k, \omega)) = 2m + 2. \tag{4}$$

Подсчитаем число действительных нулей функции $G(k, \omega)$ в области D_m. На интервале $(n\omega_H, (n+1)\omega_H)$, где n — любое целое число, $G(k, \omega)$ является непрерывной и на концах имеет разные знаки:

$$\begin{gathered} G(k, n\,\omega_H + 0) > 0,\ G(k, (n+1) - 0 < 0 \text{ при } n \geqslant 0, \\ G(k\omega_H + 0) < 0,\ G(k, (n+1)(\omega_H - 0) > 0 \text{ при } n < 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Следовательно, на таком интервале $G(k, \omega)$ имеет нечетное число вещественных корней. В области D_m находится $2m$ интервалов. Значит, на каждом из них имеем только один вещественный корень, ибо в противном случае не будет выполнено равенство (4). Таким образом, на интервале $(-m\omega_H, +m\omega_H)$ уравнение (2) имеет $2m$ действительных корней. Оставшиеся два корня должны располагаться на интервалах $\left(-\left(m + \frac{1}{2}\right)\omega_H, -m\omega_H\right)$ и $\left(m\omega_H, \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega_H\right)$, поскольку появление комплексного корня $\omega(k)$ означает существование четырех корней $(\omega(k), -\omega(k), \omega^*(k), -\omega^*(k))$, что противоречит (4). Итак, доказано, что дисперсионное уравнение (2) при действительном волновом числе k не имеет комплексных корней (k) и на каждом интервале $(n\omega_H, (n+1)\omega_H)$ существует один действительный корень. При неизотропном распределении по скоростям дисперсионное уравнение (1) приводится к виду

$$G(k, \omega) = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_0(0, u)\, du +$$

$$+ \frac{\omega\omega_0^2}{\omega_H c^2}\, 2\pi \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\, \frac{\partial f_0}{\partial v} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{I_n^2\left(\frac{kv}{\omega_H}\right)}{n - \frac{\omega}{\omega_H}}\, dv\, du = 0. \tag{6}$$

Если $f_0(v, u)$ — монотонно убывающая по переменной v функция распределения, то на интервале $(n\omega_H, (n+1)\omega_H)$, где — любое целое число, справедливы неравенства (5). Поэтому аналогично предыдущему случаю, можно доказать, что дисперсионное уравнение (6) при любом действительном k не имеет комплексных корней $\omega(k)$ и на каждом интервале $(n\omega_H, (n+1)\omega_H)$ находится один действительный корень.

Если функция $f_0(v, u)$ не удовлетворяет указанному ограничению, то соотношения вида (5) доказать не удается. Поэтому данный метод не позволяет сделать общих выводов о характере корней дисперсионного уравнения (6).

В заключение выражаю глубокую благодарность Д. П. Костомарову и Ю. Н. Днестровскому за помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. ЖЭТФ, **40**, 1404, 1961.
2. Гордеев Г. В. ЖЭТФ, **24**, 445, 1953.

Поступила в редакцию
16. 3 1961 г.

Кафедра
статистической физики и механики