ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1962

Ю. А. РЫЛОВ

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СТАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Исходя из концепции относительного гравитационного поля [1], подсчитаны энергия и импульс статического центрально-симметричного поля относительно центра системы.

В работе [1] показано, что при описании гравитационного поля физически существенным является только относительное гравитационное поле, т. е. гравитационное поле в точке x по отношению к полю в опорной точке x'.

Относительное гравитационное поле представляет собой двухточечный тензор

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, x'), \tag{1}$$

где $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ суть скобки Кристоффеля в пространстве — времени V_4 в некоторой системе координат K, а $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, x')$ суть скобки Кристоффеля в плоском пространстве $E_{x'}$, соприкасающемся с V_4 в точке x', в системе координат $K_{x'}$. Система координат $K_{x'}$ получается из системы координат K при отображении V_4 на $E_{x'}$. Способ отображения V_4 на $E_{x'}$ зависит от выбора опорной точки x'. При отображении V_4 на $E_{x'}$ геодезические в V_4, проходящие через x', отображаются в прямые в $E_{x'}$, проходящие через x', причем при отображении сохраняются углы между геодезическими в точке x' и длины геодезических, проходящих через точку x'. При этом метрический тензор $G_{\mu\nu}$ пространства $E_{x'}$ оказывается тесно связанным [2] с мировой функцией Синга [3].

Исходя из концепции относительного гравитационного поля, оказывается возможным ввести плотность энергии, импульса и другие величины для гравитационного поля [1], причем все величины, относящиеся к гравитационному полю, оказываются относительными (зависящими от опорной точки x'). Это можно трактовать как некую общую относительность, присущую гравитационному полю.

В настоящей заметке, используя методы, развитые в [1], мы подсчитаем полную энергию статического центрально-симметричного гравитационного поля относительно центра симметрии.

Согласно [1] (формула (34)), 4-импульс системы относительно опорной точки x' определяется соотношением

$$P_{\beta'} = P_{\beta'}(x') = \int\limits_{\Sigma} \theta^{\alpha}_{\beta'} \sqrt{-D_x}\, dS_\alpha, \tag{2}$$

где $P_{\beta'}$ — относительный 4-импульс системы, являющийся вектором в точке x', $D_x = \det \| G_{\mu\nu} \|$, Σ — произвольная бесконечная пространственно-подобная гиперповерхность, $\theta^{\alpha}_{\beta'} = P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}\, \theta^{\alpha}_{\gamma}$, $P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}$ — тензор параллельного переноса в $E_{x'}$, а θ^{α}_{γ} — тензор энергии-импульса системы, относительно точки x', даваемый соотношением

$$\Lambda\theta^{\alpha}_{\beta} = -\sum_{i} \frac{\partial L}{\partial u_{i\,\|\,\alpha}} u_{i\,\|\,\beta} - \frac{\partial L}{\partial g_{\gamma}{}^{\delta}{}_{\|\,\alpha}} g_{\gamma}{}^{\delta}{}_{\|\,\beta} + L\delta^{\alpha}_{\beta},$$
$$\Lambda = \sqrt{D_x/g} \qquad g = \det \| g_{\mu\nu} \|. \tag{3}$$

Здесь L — плотность лагранжиана системы относительно точки x', u_i — переменные, описывающие материю. Две вертикальные черточки перед индексом означают ковариантную производную в $E_{x'}$ (мы будем называть ее касательной производной). Штрих у индекса означает, что индекс относится к точке x', отсутствие штриха указывает на то, что индекс относится к точке x и преобразуется в соответствии с преобразованиями координат точки x. Прописными буквами обозначаются относительные (зависящие от опорной точки x') величины, строчными буквами — обычные неотносительные величины.

Тензор энергии-импульса Θ^{α}_{β} можно разбить на две части: тензор энергии-импульса материи $\Theta^{\alpha}_{m\beta}$ и тензор энергии-импульса гравитационного поля $\Theta^{\alpha}_{g\beta}$. $\Theta^{\alpha}_{m\beta}$ в выражении для Θ^{α}_{β} можно заменить на $\Lambda^{-1}t^{\alpha}_{\beta}$, где $t^{\alpha}_{\beta} = g_{\beta\gamma}\, t^{\alpha\gamma}$ есть тензор энергии-импульса материи, входящий в правую часть уравнений Эйнштейна. Такая возможность следует из того, что $\Theta^{\alpha}_{m\beta}$ отличается от $\Lambda^{-1} t^{\alpha}_{\beta}$ на величину, касательная дивергенция которой нуль (см. Приложение). Следовательно, такая замена не повлияет на величину $P_{\beta'}$ из (2).

Тензор энергии-импульса гравитационного поля в системе координат, галилеевой в $E_{x'}$, где для данного x' $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$ и касательная производная $\tilde{\nabla}_\alpha$ совпадает с обычной производной ∂_α, $\theta^{\beta}_{g\alpha}$ совпадает с псевдотензором Эйнштейна. Поэтому в этой системе координат имеем (см. например, [4]).

$$T^{\alpha}_{\beta} \equiv \theta^{\alpha}_{g\beta} + \sqrt{-g}\, t^{\alpha}_{\beta} = \partial_\gamma h^{\alpha\gamma}_{\beta},$$

где

$$h^{\alpha\gamma}_{\beta} = \frac{g_{\beta\delta}}{2\varkappa\sqrt{-g}} \{(-g)\,(g^{\alpha\delta} g^{\gamma\lambda} - g^{\gamma\delta} g^{\alpha\lambda})_{,\lambda}$$

∂ и (,) означают обычное дифференцирование, а $\varkappa$ — гравитационная постоянная Эйнштейна. Перейдем теперь к произвольной системе координат. Это осуществляется, как легко видеть, заменой $\partial_\alpha \to \tilde{\nabla}_\alpha$, $\sqrt{-g} \to \Lambda^{-1}$. В произвольной системе координат получим

$$T^{\alpha}_{\beta} = H^{\alpha\gamma}_{\beta\,\|\,\gamma}$$

$$H^{\alpha\gamma}_{\beta} = \frac{\Lambda g_{\beta\delta}}{2\varkappa} \{\Lambda^{-2} (g^{\alpha\delta} g^{\gamma\lambda} - g^{\gamma\delta} g^{\alpha\lambda})\}_{\|\,\lambda}.$$

Перенося нижний индекс у $H^{\alpha\gamma}_{\beta}$ в точку x' с помощью тензора $P^{\cdot\gamma}_{\beta'\cdot}$, получим из (2)

$$P_{\beta'} = \int\limits_{\Sigma} H^{\alpha\gamma}_{\beta'\,\|\,\gamma} \sqrt{-D_x}\, dS_\alpha,$$

где

$$H^{\alpha\gamma}_{\beta'} = P^{\cdot\mu}_{\beta'\cdot} H^{\alpha\gamma}_{\mu}. \tag{4}$$

В том случае, если в качестве Σ выбрана гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, получим

$$P_{\beta'} = \int\limits_{\Sigma} H^{0\gamma}_{\beta' \parallel \gamma} d^3x \qquad d^3x = dx^1 dx^2 dx^3.$$

Учитывая, что в силу антисимметрии $H^{\alpha\gamma}_{\beta'}$ по α и γ

$$H^{0\gamma}_{\beta' \parallel \gamma} = \frac{1}{\sqrt{-D_x}} (\sqrt{-D_x} H^{0\gamma}_{\beta'})_{,\gamma} = \frac{1}{\sqrt{-D_x}} (\sqrt{-D_x} H^{0i}_{\beta'})_{,i} \; (i = 1, 2, 3)$$

получаем

$$P_{\beta'} = \int\limits_{\sigma} H^{0i}_{\beta'} \sqrt{-D_x} d\sigma_{0i} = \int\limits_{\sigma} \Lambda H^{0i}_{\beta'} \sqrt{-g} \, d\sigma_{0i}, \tag{5}$$

где σ — двумерная поверхность, ограничивающая Σ, а $d\sigma_{0i}$ элемент поверхности σ. Поскольку Σ — бесконечная поверхность, то σ — бесконечно удаленная поверхность. Несложный расчет дает для H^{0i}_{β}

$$\Lambda H^{0i}_{\beta} = \frac{1}{2\varkappa} \{\delta^0_{\beta} (Q^{\sigma.i}_{.\sigma.} - Q^{i.\sigma}_{.\sigma.}) - \delta^i_{\beta} (Q^{\sigma.0}_{.\sigma.} - Q^{0.\sigma}_{.\sigma.}) + Q^{i.0}_{.\beta.} - Q^{0.i}_{.\beta.}\}, \tag{6}$$

где [5]

$$Q^{\alpha.\gamma}_{.\beta.} = Q^{\alpha}_{\beta\delta} g^{\delta\gamma}_{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\delta\gamma} (g_{\mu\beta \parallel \delta} + g_{\mu\delta \parallel \beta} - g_{\beta\delta \parallel \mu}).$$

Величины $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ можно найти исходя из соотношения (1). $\Gamma_{\beta\gamma}$ связаны с мировой функцией Синга следующим образом [2]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = G^{\alpha\mu'} \partial_{\gamma} G_{\beta\mu'}, \tag{7}$$

где $G = G(x, x')$ — мировая функция Синга, $G_{\alpha\mu'} \equiv \partial_{\mu'} \partial_{\alpha} G$, а $G^{\alpha\mu'}$ — тензор с матрицей, обратной $G_{\alpha\mu'}$. Мировая функция определяется соотношением

$$G(x, x') = \frac{1}{2} S^2(x, x'), \quad S(x, x') = \int\limits_{x'}^{x} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}, \tag{8}$$

где интеграл берется вдоль геодезической, соединяющей точки x и x'. Тензор переноса $P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot}$ имеет вид [2]

$$P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot} = -g_{\alpha'\sigma'}(x') G^{\sigma'\beta}, \quad P^{\cdot\alpha'}_{\beta\cdot} = -g^{\alpha'\sigma'}(x') G_{\sigma'\beta}, \tag{9}$$

где $P^{\cdot\alpha'}_{\beta\cdot}$ — тензор обратный $P^{\cdot\beta}_{\alpha'\cdot}$. Из (7) и (9) следует

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = P^{\cdot\mu'}_{\beta\cdot,\gamma} P^{\cdot\alpha}_{\mu'\cdot}. \tag{10}$$

Гравитационное поле статической центрально-симметричной материальной системы описывается линейным элементом (см. например, [6], § 96)

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) - e^{\lambda} dr^2, \tag{11}$$

где $\nu=\nu(r)$, $\lambda=\lambda(r)$, скорость света выбрана за единицу. Мы будем предполагать, что материя заключена в области $r<R$, так что для больших r $(r \gg R)$

$$e^{\nu}=1-2\xi, \quad e^{\lambda}=(1-2\xi)^{-1}, \quad \xi=\frac{\alpha}{2r}, \tag{12}$$

где $\alpha=\varkappa\int\limits_0^{\infty} t_0^0 r^2\,dr$ — гравитационный радиус системы, t_0^0 компоненты тензора энергии-импульса материи t_ν^μ.

Мы вычислим полный 4-импульс системы относительно центра системы точки $x'=0$ $(r'=0,\ t'=0)$. Для этого мы вычислим мировую функцию, соответствующую линейному элементу (11), затем с помощью (9), (10) и (1) вычислим $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и, наконец, с помощью (5) и (6) найдем полный 4-й импульс, являющийся вектором в точке x'. При этом интегрировать в (5) будем по сфере радиуса r_0 при постоянном t, поэтому для вычисления (5) нам достаточно знать асимптотическое поведение $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$ при $t=t'=0$, $r'=0$ и $r\to\infty$.

Мировую функцию можно получить, если взять в качестве $S(x, x')$ в (8) решение уравнения Якоби—Гамильтона

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\alpha}} g^{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial x^{\beta}}=1, \qquad x^0=t, \quad x^1=\theta, \quad x^2=\varphi, \quad x^3=r, \tag{13}$$

удовлетворяющее условиям [2]

$$S(x, x')=S(x', x), \quad S(x, x)=0.$$

Поскольку нас будет интересовать $S(x, x')$ для пространственно-подобных интервалов (x, x'), то удобнее положить

$$S(x, x')=i\sigma, \qquad G(x, x')=-\frac{1}{2}\sigma^2. \tag{14}$$

Решая уравнение (13) для метрики (11) методом разделения переменных, получим

$$\sigma=a_0(t-t')+a_1\psi+F(r, r', a_1, a_0), \tag{15}$$

где

$$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'), \tag{16}$$

$$F(r, r', a_1, a_0)=f(r)-f(r'),$$

$$f(r)=\int\limits_0^r \sqrt{e^{\lambda}+e^{\lambda-\nu}a_0^2-\frac{a_1^2}{r^2}e^{\lambda}}\,dr. \tag{17}$$

В (17) a_1 и a_0 рассматриваются как постоянные, а в (15) a_1 и a_0 суть функции, определяемые соотношениями

$$\frac{\partial\sigma}{\partial a_0}=0, \qquad t-t'=-\int\limits_{r'}^{r} a_0 e^{\frac{\lambda}{2}-\nu}\left(1+a_0^2 e^{-\nu}-\frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dr, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_1}=0, \qquad \psi=\int\limits_{r'}^{r} a_1 e^{\frac{\lambda}{2}} r^{-2}\left(1+a_0^2 e^{-\nu}-\frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr. \tag{19}$$

При $x=x'$ легко видеть, что $\sigma=0$, $G=0$. При замене $x \to x'$, $x' \to x$, имеем

$$\begin{aligned} &t \to t', \quad \psi \to \psi, \quad r \to r', \\ &t' \to t, \qquad\qquad\quad r' \to r, \end{aligned}$$

при этом как видно из (18) и (19), $a_0 \to a_0$, $a_1 \to -a_1$ и, следовательно, $\sigma \to -\sigma$ и $G \to G$. Отсюда следует, что соотношения (14) — (19) определяют мировую функцию.

В дальнейшем мы в качестве опорной точки выберем точку $x'=0$ ($r'=0$, $t'=0$). Однако для этой точки система координат (11) неудобна, поскольку $\det\|g_{\mu\nu}\|=0$ в этой точке. Перейдем в точке x' к декартовым координатам $\bar{x}^{\alpha}$.

$$\bar{x}'^{0}=t' \quad \bar{x}'^{1}=r'\sin\theta'\cos\varphi' \quad \bar{x}'^{2}=r'\sin\theta'\sin\varphi' \quad \bar{x}'^{3}=r'\cos\theta'. \tag{20}$$

То обстоятельство, что индекс берется в системе координат $\bar{x}^{\alpha}$ будем обозначать чертой над соответствующим индексом. Поскольку $e^{\lambda}|_{r=0}=1$ (см. [6], § 96), то для $\bar{x}'=0$ имеем

$$g^{\bar{\alpha}'\bar{\beta}'}=\begin{vmatrix} h' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad h'=e^{-\nu'}=e^{-\nu(0)}. \tag{21}$$

В силу (9) и (14)

$$\begin{aligned} P_{\mu.}^{.\bar{\nu}'} &= -G_{\mu\bar{\alpha}'}\, g^{\bar{\alpha}'\bar{\nu}'}=\sigma_{\mu}\,\sigma_{\bar{\alpha}'}\, g^{\bar{\alpha}'\bar{\nu}'}+\sigma\,\sigma_{\mu\bar{\alpha}'}\, g^{\bar{\alpha}'\bar{\nu}'}, \\ \sigma_{\mu} &= \partial_{\mu}\sigma, \qquad \sigma_{\bar{\alpha}'}=\partial_{\bar{\alpha}'}\sigma, \quad \sigma_{\mu\bar{\alpha}'}=\partial_{\bar{\alpha}'}\sigma_{\mu}. \end{aligned} \tag{22}$$

Вычисляем из (14) — (19), (21), (22) $P_{\mu.}^{.\bar{\nu}'}$. Полагая $x'=0$ и, следовательно, $a_1=0$, получаем

$$P_{\mu.}^{.\bar{\nu}'}=\begin{vmatrix} h'(\sigma A_{00}-a_0^2) & \frac{a_0 B}{b'}s\cos\varphi & \frac{a_0 B}{b'}s\sin\varphi & \frac{a_0 B}{b'}c \\ 0 & -\sigma b' s\sin\varphi & \sigma b' s\cos\varphi & 0 \\ 0 & \sigma b' c\cos\varphi & \sigma b' c\sin\varphi & -\sigma b' s \\ \frac{h' e^{\frac{\lambda}{2}}\, a_0(\sigma A_{00}h-b^2)}{b} & -\frac{e^{\frac{\lambda}{2}}D}{bb'}s\cos\varphi & -\frac{e^{\frac{\lambda}{2}}D}{bb'}s\sin\varphi & -\frac{e^{\frac{\lambda}{2}}D}{bb'}c \end{vmatrix}.$$

Первый (нижний) индекс нумерует строку, второй (верхний) — столбец, причем применены обозначения:

$$B=b'^2-\sigma A_{00}h', \quad h=e^{-\nu}, \quad h'=e^{-\nu'}, \quad b=\sqrt{1+a_0^2 e^{-\nu}},$$

$$b' = \sqrt{1 + a_0^2 e^{-\nu'}}, \quad s = \sin\theta, \quad c = \cos\theta, \quad A_{00} = (A^{00})^{-1}, \tag{23}$$

$$A^{00} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial a_0^2}, \quad D = \sigma a_0^2 A_{00} h' h - b^2 b'^2.$$

Штрих означает, что значение функции берется в точке x'.

Дальше нас будет интересовать только поведение $P_{\mu}^{\cdot\overline{\nu'}}$ и $\partial_\gamma P_{\mu}^{\cdot\overline{\nu}}$ при больших r, поскольку интегрирование в (5) проводится по бесконечно удаленной сфере ($t=t'$, $r=r_0$, $r_0 \to \infty$). При этом мы будем полагать, что $t=t'$ и, следовательно, $a_0=0$. При $a_1=0$ и $t=t'$ ($a_0=0$) в силу (12), (15) и (23) для больших r имеем

$$\sigma = r + \alpha d + \alpha p,$$

$$A^{00} = r + \frac{3}{2}\alpha d + \alpha q, \tag{24}$$

где $d = \ln(r/R)$, p и q — некоторые постоянные, зависящие от выбора R. Далее все расчеты будем производить, разлагая все величины в ряд по степеням малой безразмерной величины $\xi = \alpha/2r$. Наличие при этом больших или малых множителей вида r^n или r^{-m} не должно нас смущать. Эти множители обусловлены тем, что мы работаем в сферической системе координат, где некоторые компоненты $g_{\mu\nu}$ стремятся к бесконечности при $r \to \infty$, а соответствующие компоненты $g^{\mu\nu}$ стремятся к нулю при $r \to \infty$. При этом различные компоненты $g_{\mu\nu}$ имеют разную размерность, что приводит к тому, что разные $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ будут иметь также различную размерность. В окончательном результате множитель вида r^{-m} будет один и тот же у всех величин $H^{03}_{\bar{\beta}'}$. Это следует из соображений размерности. Указанные соображения оправдывают пренебрежение величиной множителей вида r^n и r^{-m} при разложении по степеням ξ.

При $a_1 = a_0 = 0$ из (22) и (24) имеем с точностью до ξ следующие выражения:

$$\sigma A_{00} = 1 + 2\xi(-d + p - q), \quad \frac{\partial a_0}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial r} = 1 + \xi,$$

$$\frac{\partial(\sigma A_{00})}{\partial r} = \frac{2\xi}{r}(d - p - q - 1), \quad \frac{\partial a_0}{\partial t} = -\frac{1}{r}(1 - 2\xi d + 2\xi q),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(\sigma A_{00})}{\partial t} = 0, \quad b = b' = 1, \quad D = -1.$$

Вычисление $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ по формуле (10) для больших r и $a_1 = a_0 = 0$ с точностью до ξ дает:

$$\Gamma^0_{03} = \frac{2\xi}{r}(d - p + q - 1), \quad \Gamma^1_{12} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{r}(1 - \xi d - 2\xi p + \xi), \quad \Gamma^2_{11} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{r}(1 - \xi d - 2\xi p + \xi), \quad \Gamma^3_{00} = \frac{h' - 1}{r}(1 + N\xi - \xi), \tag{25}$$

$$\Gamma^3_{11} = -r\sin^2\theta(1 + \xi d + 2\xi p - \xi),$$

$$\Gamma^3_{22} = -r(1 + \xi d + 2\xi p - \xi), \quad \Gamma^3_{33} = -\frac{\xi}{r},$$

где

$$N = -\frac{5h'-1}{h'-1} - \frac{2q}{h'-1} + \frac{2h'p}{h'-1}.$$

Остальные $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равны нулю. При этом для $P_{\nu'\cdot}^{\cdot\mu}$ имеем с точностью до ξ:

$$\begin{aligned}
&P_{0'\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{h'}(1 + 2\xi d - 2\xi p + 2\xi q),\\
&P_{1'\cdot}^{\cdot 1} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}(1 - \xi d - 2\xi p),\\
&P_{1'\cdot}^{\cdot 2} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}(1 - \xi d - 2\xi p),\\
&P_{1'\cdot}^{\cdot 3} = (1 - \xi)\sin\theta\cos\varphi,\\
&P_{2'\cdot}^{\cdot 1} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}(1 - \xi d - 2\xi p),\\
&P_{2'\cdot}^{\cdot 2} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}(1 - \xi d - 2\xi p),\\
&P_{2'\cdot}^{\cdot 3} = (1 - \xi)\sin\theta\sin\varphi,\\
&P_{3'\cdot}^{\cdot 2} = -\frac{\sin\theta}{r}(1 - \xi d - 2\xi p),\\
&P_{3'\cdot}^{\cdot 3} = (1 - \xi)\cos\theta.
\end{aligned} \tag{26}$$

Остальные компоненты $P_{\nu'\cdot}^{\cdot\mu}$ равны нулю.

Для скобок Кристоффеля $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ для больших r имеем с точностью до ξ (см. [6], § 96):

$$\begin{gathered}
\gamma^{0}_{03} = \frac{\xi}{r}, \quad \gamma^{1}_{12} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \gamma^{1}_{13} = \frac{1}{r},\\
\gamma^{2}_{11} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \gamma^{2}_{23} = \frac{1}{r}, \quad \gamma^{3}_{00} = \frac{\xi}{r},\\
\gamma^{3}_{11} = -r\sin^2\theta\,(1 - 2\xi), \quad \gamma^{3}_{22} = -r(1 - 2\xi), \quad \gamma^{3}_{33} = -\frac{\xi}{r}.
\end{gathered} \tag{27}$$

Остальные $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равны нулю с точностью до ξ. Из (1), (25) и (27) для относительного гравитационного поля при больших r получаем с точностью до ξ:

$$\begin{gathered}
Q^{0}_{03} = -\frac{2\xi}{r}\left(d - p + q - \frac{3}{2}\right), \quad Q^{1}_{13} = \frac{\xi}{r}(d + 2p - 1),\\
Q^{2}_{23} = \frac{\xi}{r}(d + 2p - 1), \quad Q^{3}_{00} = -\frac{h'-1}{r}\left(1 + N\xi - \frac{h'}{h'-1}\xi\right),\\
Q^{3}_{11} = \xi(d + 2p + 1)\,r\sin^2\theta, \quad Q^{3}_{22} = r\xi(d + 2p + 1).
\end{gathered} \tag{28}$$

Остальные $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равны нулю с точностью до ξ. Из (28) видно, что все $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$, кроме Q^{3}_{00}, суть величины порядка ξ.

Теперь, используя соотношения (5), (6) и (4), можно вычислить $P_{\overline{\beta'}}$. В качестве поверхности σ выберем сферу радиуса r_0 ($t = t'$, $r = r_0$, $r_0 \to \infty$). Для $P_{\overline{\beta'}}$ получаем согласно (5)

$$P_{\overline{\beta'}} = \lim_{r_0 \to \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Lambda H^{03}_{\overline{\beta'}} r_0^2 \sin\theta \, d\theta. \tag{29}$$

При этом из (26) следует с точностью до ξ:

$$\begin{aligned}
H^{03}_{\overline{0'}} &= \frac{1}{h'} H^{03}_0, \\
H^{03}_{\overline{1'}} &= -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} H^{03}_1 + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} H^{03}_2 + \sin\theta\cos\varphi\, H^{03}_3, \\
H^{03}_{\overline{2'}} &= \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} H^{03}_1 + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} H^{03}_2 + \sin\theta\sin\varphi\, H^{03}_3, \\
H^{03}_{\overline{3'}} &= -\frac{\sin\theta}{r} H^{03}_2 + \cos\theta\, H^{03}_3.
\end{aligned} \tag{30}$$

Так как $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ не зависят от φ, то согласно (6) H^{03}_{β} не зависят от φ. Из (30) и (29) сразу следует, что $P_{\overline{1'}} = P_{\overline{2'}} = 0$, поскольку интегрирование по φ дает для этих компонентов нуль. Для H^{03}_0, H^{03}_2 и H^{03}_3 из (6) имеем

$$\begin{aligned}
\Lambda H^{03}_0 &= \frac{1}{2\varkappa} (Q^{i.3}_{.i.} - Q^{3.i}_{.i.}), \qquad i = 1, 2, 3, \\
\Lambda H^{03}_2 &= \frac{1}{2\varkappa} (Q^{3.0}_{.2.} - Q^{0.3}_{.2.}), \\
\Lambda H^{03}_3 &= \frac{1}{2\varkappa} (-Q^{\sigma.0}_{.\sigma.} + Q^{0.\sigma}_{.\sigma.} + Q^{3.0}_{.3.} - Q^{0.3}_{.3.}).
\end{aligned} \tag{31}$$

Все $Q^{\alpha.\gamma}_{.\beta.}$ в (31) порядка ξ, так как Q^3_{00} не входит в (31). Ввиду этого поднимание последнего индекса у $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ с точностью до ξ можно осуществить, взяв $g^{\delta\gamma}$ в виде

$$g^{\delta\gamma} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

Расчет дает

$$\begin{aligned}
\Lambda H^{03}_0 &= \frac{2\xi}{\varkappa r} = \frac{\alpha}{\varkappa r^2}, \\
\Lambda H^{03}_2 &= 0, \quad \Lambda H^{03}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Из (29), (30) и (32) сразу получаем

$$P_{\overline{0'}} = \lim_{r \to \infty} 2\pi \frac{\alpha}{h'\varkappa r^2} r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi\alpha}{\varkappa} e^{\nu(0)},$$

$$P_{\overline{3'}} = 0.$$

Итак,

$$P_{\overline{i}'} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \quad P_{\overline{0}'} = e^{\nu(0)}\, m = 4\pi e^{\nu(0)} \int\limits_0^\infty t_0^0 r^2 dr, \tag{33}$$

где m — величина, которую обычно называют массой системы [4, 6] и которая определяет поведение $g_{\mu\nu}$ при $r \to \infty$. Для массы системы M относительно точки $x' = 0$ получаем из (33)

$$M = (P_{\overline{\alpha}'}\, g^{\overline{\alpha}' \overline{\beta}'}\, P_{\overline{\beta}'})^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\nu(0)}{2}} P_{\overline{0}'} = e^{\frac{\nu(0)}{2}} m. \tag{34}$$

Так как $e^\nu \leqslant 1$ (см. [6], § 96), то $M \leqslant m$.

Оценим $g_{\mu\nu}$ для случая, когда материя находится в области, ограниченной радиусом R, причем в системе координат (11) $t_0^0 = \mathrm{const}$ для $r < R$ и $t_0^0 = 0$ для $r > R$. Остальные компоненты t_ν^μ равны нулю. В этом случае несложный расчет дает для $r < R$.

$$e^{-\nu} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha r^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha/R)^{\frac{3}{2}}}, \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{\alpha r^2}{R^3}, \quad e^{\nu(0)} = (1 - \alpha/R)^{\frac{3}{2}}. \tag{35}$$

Для большинства тел гравитационный радиус α на много порядков меньше размеров тела R. В этом случае из (33) — (35) следует, что $e^{\nu(0)} \simeq 1$, $P_{\overline{0}'} \simeq m$, $M \simeq m$, и наш результат совпадает с результатами других авторов (см. [4, 6]), отличаясь от них лишь тем, что $P_{\overline{\beta}'}$ — истинный, а не аффинный вектор.

Результат [4, 6] имеет еще один слабый пункт. Согласно [4, 6], полная масса системы m зависит только от величины компонента t_0^0 и не зависит от величины гравитационной постоянной $\varkappa$. Иными словами, включение или выключение гравитационного взаимодействия никак не влияет на полную массу системы, в то время как в теории Ньютона включение гравитационного взаимодействия при неизменном тензоре энергии-импульса уменьшает полную энергию, и следовательно, полную массу системы. В нашем случае из (34) и (35) видно, что при включении гравитационного взаимодействия полная масса M и полная энергия $P_{\overline{0}'}$ относительно точки $x' = 0$ уменьшаются, что качественно совпадает с результатом ньютоновской теории. Количественного согласия нет ввиду относительности массы и энергии.

Оценим знак относительной энергии гравитационного поля для случая, когда материя находится в области $r < R$, причем $t_0^0 = \mathrm{const}$ для $r < R$ и $t_0^0 = 0$ для $r > R$, остальные компоненты t_μ^ν равны нулю. Сначала найдем энергию материи относительно точки $x' = 0$. Согласно (2) имеем для 4-импульса материи $P_{m\overline{\alpha}'}$ относительно точки $x' = 0$

$$P_{m\overline{i}'} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$P_{m\overline{0}'} = \frac{1}{h'} \int P_{\overline{0}'}^{\cdot}{}^{0}\, t_0^0 \Lambda^{-1} \sqrt{-D_x}\, d^3x = \int P_{\overline{0}'}^{\cdot}{}^{0}\, t_0^0 \sqrt{-g}\, d^3x.$$

Так как $g = -\exp(\nu + \lambda) r^4 \sin^2\theta$, $t_0^0 = \frac{3m}{4\pi R^3}$ и $P_{\overline{0'}}^{\cdot\ 0}$ для малых r с точностью до α/r равен

$$P_{\overline{0'}}^{\cdot\ 0} = 1 - \frac{1}{6}\frac{\alpha r^2}{R^3},$$

то в силу (35) для малых α/R получаем с точностью до α/R.

$$P_{m\overline{0'}} = e^{\nu(0)} m \left(1 + 1{,}1 \frac{\alpha}{R}\right).$$

Сравнение с (33) показывает, что энергия материи относительно точки $x'=0$ больше, чем полная энергия относительно этой же точки. Иными словами, по крайней мере относительно точки $x'=0$ энергия гравитационного поля отрицательна.

Этот результат не противоречит теории Ньютона, где энергия гравитационного взаимодействия всегда отрицательна. Действительно, если гравитационное взаимодействие выключено ($x=0$), то согласно теории Ньютона полная энергия системы будет равна энергии материи и будет просто m. В нашем случае при отсутствии гравитационного взаимодействия имеем согласно (34) и (35) $P_{\overline{0'}} = M = m$, т. е. в этом случае результат совпадает с классическим результатом. При включении гравитационного взаимодействия согласно теории Ньютона полная энергия, как легко показать, уменьшается на величину $0{,}3\,\alpha m/R$, что истолковывается как отрицательность энергии гравитационного поля. В нашем случае при включении гравитационного взаимодействия полная энергия тоже уменьшается, т. е. качественно результат тот же. Количественно уменьшение будет отличаться от ньютоновского, а именно согласно (33) и (35) имеем уменьшение полной энергии на $1{,}5\,\alpha m/R$. По-видимому, это уменьшение полной энергии будет различно в зависимости от того, относительно какой точки вычисляется полная энергия, и поэтому не следует придавать большого значения количественному различию с ньютоновской теорией.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить признательность проф. Я. П. Терлецкому за интерес и внимание, проявленные к моей работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что в силу уравнений движения материи выполняется соотношение

$$\Lambda(\Lambda^{-1} t_\beta^\alpha - \theta_{m\beta}^\alpha)_{\parallel\alpha} = 0, \tag{36}$$

где

$$t_\beta^\alpha = g_{\beta\gamma}\, t^{\alpha\beta}, \qquad t^{\alpha\beta} = 2\left\{\Lambda \frac{\partial(\Lambda^{-1}L_m)}{\partial g_{\alpha\beta}} - \Lambda\left(\frac{\partial(\Lambda^{-1}L_m)}{\partial g_{\alpha\beta\parallel\lambda}}\right)_{\parallel\lambda}\right\}, \tag{37}$$

$$\theta_{m\beta}^\alpha = \frac{1}{\Lambda}\left\{-\frac{\partial L_m}{\partial u_{i\parallel\alpha}} u_{i\parallel\beta} - \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu\parallel\alpha}} g_{\mu\nu\parallel\beta} + \delta_\beta^\alpha L_m\right\}. \tag{38}$$

L_m — плотность лагранжиана материи. Если использовать соотношения (1), (3) и соотношение [5]

$$g_{\alpha\mu} Q_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}(g_{\mu\gamma\parallel\beta} + g_{\mu\beta\parallel\gamma} - g_{\beta\gamma\parallel\mu})$$

и перейти в (36) от касательной производной к ковариантной, то для первого члена в (36) получим

$$\Lambda\left(\Lambda^{-1}\, t^{\alpha}_{\beta}\right)_{\parallel\alpha} = t^{\alpha}_{\beta\,|\,\alpha} + \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu\,\parallel\beta}\, t^{\mu\nu}, \tag{39}$$

где вертикальная черточка означает ковариантную производную. Первый член в правой части (39) исчезает в силу уравнений поля, а второй с помощью (37) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu\,\parallel\beta}\, t^{\mu\nu} = \Lambda\left\{\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{-1}L_m - \Lambda^{-1}\,\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu\,\parallel\alpha}}\, g_{\mu\nu\,\parallel\beta}\right\}_{\parallel\alpha} -$$

$$-\frac{\partial L_m}{\partial u_i}\, u_{i\,\parallel\beta} - \Lambda\,\frac{\partial\left(\Lambda^{-1}L_m\right)}{\partial u_{i\,\parallel\alpha}}\, u_{i\,\parallel\alpha\,\parallel\beta} =$$

$$= \Lambda\left\{\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{-1}L_m - \Lambda^{-1}\,\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu\,\parallel\alpha}}\, g_{\mu\nu\,\parallel\beta} - \Lambda^{-1}\,\frac{\partial L_m}{\partial u_{i\,\parallel\alpha}}\, u_{i\,\parallel\beta}\right\}_{\parallel\alpha} -$$

$$-\left\{\frac{\partial L_m}{\partial u_i} - \Lambda\left(\frac{\partial\Lambda^{-1}L_m}{\partial u_{i\,\parallel\alpha}}\right)_{\parallel\alpha}\right\} u_{i\,\parallel\beta}. \tag{40}$$

Из (38)—(40) и уравнений движения материи

$$\frac{\partial L_m}{\partial u_i} - \Lambda\left\{\frac{\partial\left(\Lambda^{-1}L_m\right)}{\partial u_{i\,\parallel\alpha}}\right\}_{\parallel\alpha} = 0$$

следует справедливость (36), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов Ю. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 1962.
2. Рылов Ю. А. «Изв. вузов», Математика, № 3, 131, 1962.
3. Synge J. L. Relativity: the general theory. Amsterdam, 1960.
4. Möller C. Ann. Phys., DDR, 4, 347, 1958.
5. Rosen N. Phys. Rev., 57, 147, 1940.
6. Ландау Л., Лифшиц Е. Теория поля. ГИТТЛ, М., 1948.

Поступила в редакцию
2. 4 1962 г.

Кафедра
статистической физики и механики