Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1962

АСТРОНОМИЯ

И. Д. НОВИКОВ

О ПОВЕДЕНИИ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАСС В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (II)

Введены понятия R- и T-областей в пространстве — времени со сферически-симметричным пространством. В T-области возможна система отсчета, в которой коэффициент при угловой части в выражении для интервала равен r^2. Исследуются свойства R- и T-областей. Доказывается, что в случае сферической симметрии возможен одновременный во всем пространстве минимум объема элементов сопутствующего пространства. Устанавливаются условия нестационарности достаточно больших и плотных масс. Полученные результаты применяются для анализа эволюции Метагалактики.

При сферически-симметричном распределении и движении вещества в любой сферически-симметричной системе отсчета можно провести пространственные сечения ортогонально линиям времени. Тогда интервал запишется в виде

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}\,dt^2 - e^{\lambda(r,t)}\,dr^2 - e^{\mu(r,t)}\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,d\varphi^2).$$

Положим $c=1$, $k=1$, где k — постоянная тяготения Ньютона. Обычно считается, что всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы $e^{\mu(r,t)}=\tilde{r}^2$. Так как при преобразованиях вида $\tilde{r}=\tilde{r}(r, t)$, $\tilde{t}=\tilde{t}(r, t)$, $\tilde{\theta}=\theta$, $\tilde{\varphi}=\varphi$ g_{22} и g_{33} являются инвариантами, то для этого необходимо сделать преобразование координат $\tilde{r}^2=e^{\mu}$, $\tilde{\theta}=\theta$, $\tilde{\varphi}=\varphi$, а t выбрать так, чтобы пространственные сечения были ортогональны линиям времени. Однако очевидно, что координата $\tilde{r}$, полученная из преобразования типа $\psi(\tilde{r})=e^{\mu(r,t)}$, может служить в качестве одной из пространственных координат* лишь в случае, если линия $\tilde{r}=\mathrm{const}$, $\tilde{\theta}=\mathrm{const}$, $\tilde{\varphi}=\mathrm{const}$ — времениподобна, т. е. если выполнены условия

$$-\frac{g_{00}}{g_{11}} > \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

где $r=r(t)$ определяется из соотношения $e^{\mu(r,t)}=\mathrm{const}$, или

$$-\frac{g_{00}}{g_{11}} > \left(\frac{\dot{g}_{22}}{g'_{22}}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu'}\right)^2, \tag{1}$$

* Это означает, что существует система отсчета из «пробных частиц», для которых $\tilde{r}=\mathrm{const}$, $\tilde{\Theta}=\mathrm{const}$, $\tilde{\varphi}=\mathrm{const}$.

где точка означает частную производную по t, а штрих — частную производную по r. Таким образом, система координат с $g_{22}=r^2$ возможна лишь в области пространства—времени, где выполняется неравенство (1) *. Назовем эту область R-областью.

Если выполняется неравенство

$$-\frac{g_{00}}{g_{11}} < \left(\frac{\dot{g}_{22}}{g'_{22}}\right)^2, \tag{2}$$

то рассматриваемая координата не может использоваться как пространственная, но может служить координатой времени, а в соответствующих областях пространства — времени возможна система с $e^{\mu}=\psi(\tilde{t})$. Назовем такую область T-областью. В T-области в любой системе отсчета e^{μ} зависит от t. Отметим ковариантность условий (1) и (2) по отношению к преобразованиям, сохраняющим используемый вид ds^2. Точное равенство

$$-\frac{g_{00}}{g_{11}} = \left(\frac{\dot{g}_{22}}{g'_{22}}\right)^2$$

является дополнительным уравнением к системе уравнений тяготения и уравнению состояния, и поэтому при произвольном (центрально-симметричном) распределении и движении вещества, а также в вакууме не может выполняться в некоторой четырехмерной области. Это равенство определяет границу между R- и T-областями.

В дальнейшем мы будем пользоваться сопутствующей системой отсчета [1] и считать, что поток энергии относительно вещества пренебрежимо мал. Указанные выше критерии существования R- и T-областей применимы, если $\dot{\mu}$ и μ' не обращаются в нуль одновременно. Пусть $\dot{\mu}=0$, $\mu'=0$. Тогда из уравнений тяготения следует (космическую постоянную Λ полагаем равной нулю)

$$\dot{\mu}'=0, \tag{3}$$

$$8\pi p = -e^{-\nu}\ddot{\mu} - e^{-\mu}, \tag{4}$$

$$8\pi\rho = -e^{-\lambda}\mu'' + e^{-\mu}, \tag{5}$$

где ρ — плотность, а p — давление. Следовательно, если $p \geqslant 0$, из (4) следует, что $\ddot{\mu}<0$, и равенства $\dot{\mu}=0$ и $\mu'=0$ не могут выполняться одновременно в конечной (не бесконечно малой) четырехмерной области. Этот вывод справедлив и в несопутствующей системе отсчета. Можно показать, что из соотношений (3), (4) и (5) следует, что рассматриваемые точки могут находиться либо на границе R- и T-областей, либо в T-области.

Если в T-области на некоторой сфере $\dot{\mu}>0$, то этот знак сохраняется в любой системе отсчета (если $\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}>0$) в некоторой области, не зависящей от системы отсчета. Таким образом, в этой области координатные сферы всех систем отсчета расширяются. В вакууме, так же как и при наличии вещества, могут существовать системы отсчета, в которых имеются сферы, на которых $\mu'=0$, $\mu'' \gtrless 0$, а также сферы, на которых $\mu'=0$ и $\dot{\mu}=0$.

* Как будет показано ниже, уравнения тяготения не допускают немонотонной зависимости $g_{22}=g_{22}(r)$ при $\frac{\partial g_{22}}{\partial t} \equiv 0$.

Отметим также, что при осуществлении указанной в [2] возможности ослабления гравитационного поля шара необходимо, чтобы некоторые элементы экранирующего вещества лежали в T-области. Оценка, проведенная в предположении однородной плотности этого вещества, показывает, что для создания (в смысле задания начальных условий, а не физического процесса) экрана, существующего один год, нужна масса $2 \cdot 10^{46}$ *г*.

Существование R-области очевидно (например, при статическом распределении вещества). Возможность существования T-области в вакууме и в присутствии вещества доказывается следующими двумя утверждениями.

В вакууме в системе координат Леметра [3] (см. также [4] и [5]) область $O < \sqrt{2m}(r-t) < 1$ является T-областью. Действительно, как показано в [6] и [7] в этой области (внутри сферы Шварцшильда) возможна система с $e^{\mu} = \tilde{t}^2$. В самом деле, пусть $e^{\mu} = \tilde{t}^2$, $T_{\alpha\beta} = 0$. Тогда уравнения Эйнштейна сведутся к следующим уравнениям:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\nu}}{\tilde{t}} - \frac{1}{\tilde{t}^2}\right) - \frac{1}{\tilde{t}^2} = -8\pi T_1^1 = 0,$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu} - \dot{\lambda}}{\tilde{t}} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\right) =$$

$$= -8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = 0,$$

$$e^{-\nu}\left(\frac{\dot{\lambda}}{\tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{t}^2}\right) + \frac{1}{\tilde{t}^2} = -8\pi T_0^0 = 0,$$

$$-e^{-\lambda}\ \frac{\nu'}{\tilde{t}} = 8\pi T_0^1 = 0.$$

Решая эту систему, получаем

$$e^{\nu} = \left(\frac{2m}{\tilde{t}} - 1\right)^{-1}, \quad e^{\lambda} = \frac{2m}{\tilde{t}} - 1.$$

Область, где применимо это решение не охватывается системой отсчета Шварцшильда. Эта область лежит, если можно так выразиться, внутри сингулярной сферы Шварцшильда.

T-область в вакууме возникает, например, когда радиус сжимающегося шара становится меньше (как принято говорить в таком случае) его гравитационного радиуса (см. в этой связи [8]).

Пусть $p=0$. Обозначим $e^{\mu/2} \equiv R$. Тогда: 1) если при

$$t = t_0 \quad \lim_{r\to\infty} R(r, t_0) = \infty \text{ и для } r > r_0, \quad \rho > \frac{A}{8\pi R^2},$$

где $A = \mathrm{const} > 1$, то всегда существует r такое, что точки системы $r > r_1$, t_0 лежат в T-области; 2) для каждого $r = r_2$ существует t_1 и t_2 такие, что точки r_2, $0 < t - t_2 < t_1$ лежат в T-области. Действительно, в случае $p=0$ из решения Толмана [9] следует

$$\nu = 0, e^{\lambda} = \frac{(R')^2}{1 + f(r)}, \quad \dot{R}^2 = f(r) + \frac{F(r)}{R}, \tag{6}$$

$$8\pi\rho = \frac{F'(r)}{R'R^2}, \tag{7}$$

где f и F — произвольные функции r (см. [8]). Из соотношений (6) получаем

$$\frac{g_{00}}{g_{11}} = \frac{\dot{R}^2(1+f)}{(R')^2\left(\frac{F}{R}+f\right)}. \tag{8}$$

При выполнении условий 1 из (7) следует, что для достаточно большого r $\frac{F}{r} > 1$, и поэтому из (8) получаем, что $\frac{g_{00}}{g_{11}} < \left(\frac{\dot{R}}{R'}\right)^2$. Это доказывает первую часть утверждения. Из решения Толмана следует также, что для любого $r = r_2$ существует $t = t_2$, такое, что $\lim_{t\to+t_2} R(r_2, t) = 0$. Это также приводит к неравенству (2), что доказывает вторую часть утверждения.

Покажем, используя несколько измененный «полуобратный метод», предложенный Зельмановым [10], что в рассматриваемом случае сферически-симметричного распределения и движения вещества возможен при обычных требованиях, накладываемых на тензор энергии-импульса, *одновременный во всем пространстве*, регулярный конечный минимум объема*, как в случае конечной, так и в случае бесконечной массы.

Пусть $\rho = a(t)p$, где a—известная функция существенно зависящая от времени, и $0 \leqslant a \leqslant 3$. При $t=t_0$; $a=a_0$, $\rho = Ae^{-4r^2}$, где A—константа, $e^{\mu} = r^2$, $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$. При соответствующих допустимых значениях a_0 и A во всем пространстве $\dot{D} > 0$, где D — скаляр относительной объемной деформации. Используя теорему Лихнеровича о существовании решения задачи Коши для уравнений Эйнштейна [11] в формулировке, данной в [10] применительно к полуобратному методу, можно показать, что в некотором интервале изменения t, включающем t_0, существуют решения уравнений Эйнштейна, удовлетворяющие при $t=t_0$ во всем трехмерном пространстве указанным начальным условиям. При этом масса $M = 4\pi \int\limits_0^\infty \rho \sqrt{-g_{11}}\, r^2\, dr$ конечна. Этим доказывается возможность одновременного во всем пространстве регулярного минимума объема для конечной массы.

Если при $t = t_0$ положить $a = a_0$, $\rho = A\frac{e^{-r^2}}{r^3+1}$, $e^{\mu} = r^2$, $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ (при соответствующих a_0 и $A\dot{D} > 0$), то масса данного распределения вещества будет бесконечна, и применение той же теоремы доказывает возможность одновременного во всем пространстве регулярного минимума объема для бесконечной массы.

Для начальных условий: $t=t_0$, $a=a_0$, $\rho = \frac{A}{r^2+1}$, $e^{\mu} = r^2$, $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$— получаем $M = \infty$; на близких от центра расстояниях при $t=t_0$ имеет место минимум объемного расширения, на больших расстояниях — максимум. Этот пример показывает возможность одновременного сжатия одних областей и расширения других (в моменты, предшествующие t_0 и следующие за ним). Во всех примерах при $t=t_0$ масса вещества, заключенного внутри сферы все большего радиуса, возрастает не быстрее радиуса.

Покажем, что если при $t=t_0$ масса $M = \int\limits_V \rho\, dV$ вещества, заключен-

---

* А. Л. Зельмановым [10] доказана возможность прохождения элементов объема через регулярный минимум в неоднородной анизотропной Вселенной.

ного внутри сферы с радиусом $l = \int\limits_0^r \sqrt{-g_{11}}\,dr$, возрастает быстрее l на достаточно большом интервале изменения l, $p' = p'(r)$ ограничено, то такое распределение не может быть статическим *; а если M возрастает быстрее l на достаточно большом интервале монотонного изменения e^{μ}, то элементарные объемы, деформируясь, не могут при этих условиях одновременно пройти через экстремум. Действительно, предположим, что при $t = t_0$ $\rho(r) \equiv 0$, тогда из уравнений Эйнштейна и законов сохранения следует

$$e^{-\lambda} = \frac{4}{(\mu')^2 e^{\mu}} \left\{1 - \frac{1}{2e^{\mu/2}} \int\limits_0^r \left(8\pi\rho + \frac{3}{4} e^{-\nu}\dot{\mu}^2\right) e^{3/2\mu}\mu'\, dr\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках больше или равно нулю. Отсюда совместно с результатами, приведенными в пункте 2, вытекают доказываемые утверждения. Отметим, что если при $t = t_0$, $\dot{\mu}(r) \equiv 0$, то также $\dot{\lambda}(r) \equiv 0$ и если, кроме того, имеются значения $r = r_0$, при которых $\mu' = 0$, то, как показано выше, при $r = r_0$ $\ddot{\mu} < 0$.

Рассмотрим шар, поверхность которого в некоторый момент t_0 лежит в T-области. Покажем, что если поверхность в этот момент сжимается, то она через конечный промежуток собственного времени сожмется в точку **. Действительно, так как вне шара в вакууме можно использовать (сжимающуюся) T-систему координат, то движение поверхности шара можно рассматривать как движение точек сферы в этой системе координат. Нетрудно показать что при указанных условиях точки сферы через конечное время *данной системы* обязательно достигнут «центральной особенности» шварцшильдова гравитационного поля (см. в этой связи работу Финкельштейна [12] и замечания об этой работе, сделанные в [7] и [13]). Соответствующий промежуток собственного времени Δt точек сферы

$$\Delta t = \int\limits_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \sqrt{1 + g_{11}v^2}\, dt < \Delta\tilde{t} < \infty,$$

где v — координатная скорость, что и требовалось доказать. Из доказанного следует, что если поверхность шара в данный момент лежит в T-области и расширяется, то она расширяется из точки.

Предположим, что Метагалактика в настоящее время в первом приближении обладает сферической симметрией. И по крайней мере до расстояний от ее центра порядка радиуса охваченной наблюдениями области средняя плотность вещества не зависит от расстояния, а деформация изотропна. Тогда в рассматриваемой области применима метрика однородной изотропной космологической модели

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[(1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \tag{9}$$

где $k = 0 \pm 1$.

Применяя критерии (1), (2) к решению уравнений Эйнштейна для данной модели, получаем следующее выражение для границы $r = r_0(t$ между R- и T-областями в этой модели:

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{H^2R^2 + k}},$$

* Утверждение, эквивалентное этому, без рассмотрения возможности немонотонного изменения $e^{\mu} = e^{\mu(r)}$ было высказано А. Л. Зельмановым (частное сообщение).

** Это еще не означает, что объем шара станет равным нулю.

где H — постоянная Хаббла. Это соответствует следующим расстояниям l_0^*:

$$l_0 = \int_0^{r_0} \sqrt{-g_{11}}\, dr = \begin{Bmatrix} R \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{H^2R^2+1}}, & k=1 \\ \dfrac{1}{H} & k=0 \\ R \ln \dfrac{HR+1}{\sqrt{H^2R^2-1}}, & k=-1 \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

Из выражений (10) получаем следующие крайние значения l_0 в настоящий момент при $H_0=100$ *км/сек·мпс*:

1) если $\rho_0 = 10^{-28}$ *г/см³*, то $l_0 \approx 1{,}7\cdot 10^3$ *мпс*,

2) если $\rho_0 = 10^{-30}$ *г/см³*, то $l_0 \approx 8\cdot 10^3$ *мпс*.

Очевидно, что радионаблюдения позволяют фиксировать источники, находящиеся (при сделанных предположениях) в T-области. Таким образом, если у Метагалактики есть более или менее резкая граница, то она должна лежать в *T-области* **. Но мы показали, что в таком случае сферическая граница обязательно должна начать расширяться из точки независимо от уравнения состояния вещества и несмотря на возможные в прошлом большие градиенты давления. Этот вывод был бы применим к реальной Метагалактике, если бы в прошлом распределение и движение вещества было всегда сферически-симметричным. Но, как показано Зельмановым при упрощающих предположениях [1], некоторые из наблюдаемых небольших отклонений от изотропии в настоящую эпоху в прошлом были значительно больше. Это приводит к тому, что при достаточном углублении в прошлое рассматриваемая сферически-симметричная модель Метагалактики уже неприменима. Как показывают грубые оценки, сделанные при упрощающих предположениях [1], быстрее всего по мере углубления в прошлое возрастает анизотропия деформации. В настоящее время другие факторы анизотропии, влияющие на характер решения уравнений Эйнштейна, по-видимому, не превышают значительно анизотропии деформации. Мы можем применять рассматриваемую модель только до тех пор, пока отношение анизотропии деформации к самой деформации мало́, и во всяком случае меньше единицы. Приближенные оценки, сделанные по ближайшим окрестностям нашей Галактики [14, 15, 16], дают для этого отношения значения порядка нескольких сотых. Примем, что для настоящей эпохи

$$\frac{\Pi_i^k \Pi_k^i}{D^2} \approx 0{,}01,$$

где Π_i^k — тензор анизотропии деформации (см. [1]). Рассматриваемая модель, по-видимому, будет еще применима, если

$$\frac{\Pi_i^k \Pi_k^i}{D^2} \approx 0{,}1, \tag{11}$$

и верхняя граница ее применимости определяется соотношением

* В случае закрытой модели ($k=1$) другая граница R- и T-областей лежит на расстоянии l_0 от противоположного «полюса».

** При этом из результатов пункта 5 следует, что Метагалактика не может быть статической.

$$\frac{\Pi_i^k \Pi_k^i}{D^2} \approx 1. \quad (12)$$

Из приведенной в [1] оценки можно получить (при $p=0$), что для $k=1$

$$\frac{\Pi_i^k \Pi_k^i}{D^2} \sim \frac{1}{(1-\cos\xi)^2 \sin^2\xi}, \quad t = K(\xi - \sin\xi), \quad K = \text{const}. \quad (13)$$

При этом

$$\rho \sim \frac{1}{(1-\cos\xi)^3}. \quad (14)$$

Для $k=-1$

$$\frac{\Pi_i^k \Pi_k^i}{D^2} \sim \frac{1}{(\operatorname{ch}\xi - 1)^2 \operatorname{sh}^2\xi}, \quad t = K(\operatorname{sh}\xi - \xi), \quad (15)$$

$$\rho \sim \frac{1}{(\operatorname{ch}\xi - 1)^3}.$$

Из решений уравнений Эйнштейна для метрики (9) следует, что при $H_0=100$ *км/сек·мпс* и $\rho=10^{-28}$ *г/см*^{3} ($k=1$) «начало Метагалактики» было $4{,}3\cdot 10^9$ лет назад, но из (13) получаем, что верхняя граница применимости рассматриваемой модели, соответствующая соотношению (12), отстоит от нашей эпохи на $4{,}15\cdot 10^9$ лет и модель, вероятно, применима на протяжении последних $3{,}8\cdot 10^9$ лет, что соответствует (11). Для плотности ρ из (14) получаем в первом случае $\rho\approx 500\,\rho_0$, во втором случае $\rho\approx 40\,\rho_0$. Для $H_0=100$ *км/сек·мпс* и $\rho_0=10^{-30}$ *г/см*^{3} по теории однородной изотропной модели экспансионный возраст Метагалактики оказывается равным 10^{10} лет. Из (15) и (16) получаем для верхней границы применимости модели, соответствующей (12), $\Delta t\approx 7\cdot 10^9$ лет и $\rho\approx 35\,\rho_0$. Для относительной величины анизотропии деформации, даваемой (11), получаем $\Delta t\approx 5\cdot 10^9$ лет и $\rho\approx 6\,\rho_0$.

Таким образом, если сделанные предположения верны, то мы приходим к выводу, что последний ~5 млрд. лет Метагалактика расширялась. Для заключения о характере деформации в более ранние эпохи однородная изотропная модель не пригодна. Средняя плотность вещества 5 млрд. лет назад была сравнительно немногим больше современной средней плотности вещества.

Автор благодарит А. Л. Зельманова за интерес к работе и дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельманов А. Л. «Тр. шестого совещания по вопросам космогонии». Изд-во АН СССР, М., 1959.
2. Новиков И. Д. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 1962.
3. Lemaître G. Ann. Soc. Scint., Bruxelles, *A*53, 51, 1933.
4. Рылов Ю. А. ЖЭТФ, **40**, 1755, 1961.
5. Унт В. А. «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции». М., 1961, стр. 30.
6. Новиков И. Д. «Астрономический журнал», **38**, 564, 1961.
7. Новиков И. Д. «Сообщения ГАИШ», № 120, 42, 1962.
8. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1962.
9. Tolman R. Proc. Nat. Acad. Sci, **20**, 169, 1934.
10. Зельманов А. Л. «ДАН СССР», **135**, 1367, 1960.
11. Lichnerowicz A. Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme. Paris, 1955.
12. Finkelstein D. Phys. Rev., **110**, 4, 1958.
13. Новиков И. Д. «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции». М., 1961, стр. 34.
14. Псковский Ю. П. «Астрономический журнал», **37**, 1056, 1960.
15. Огородников К. Ф. Динамика звездных систем. Физматгиз, М., 1958.
16. Вокулер Ж. «Астрономический журнал», **36**, 977, 1959.

Поступила в редакцию
27. 3 1962 г.

Кафедра
астрофизики