Как нам представляется, необходимо при дальнейших численных экспериментах учитывать более высокие слои атмосферы, такие, как 300 и 200 *мб*. При этом надо учитывать поведение функции с высотой, являющейся знакопеременной.

Решение аналогичной линеаризированной задачи в ограниченном пространстве устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 4, 38, 1960.
2. Березин В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 4, 68, 1961.
3. Дюбюк А. Ф. «ДАН СССР», 123, № 2, 1958.

Поступила в редакцию
20. 6 1962 г.

Кафедра
физики атмосферы

В. Г. ГРИШИН

К ВОПРОСУ О ПОПЕРЕЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКОВ В НАКОПИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В настоящей работе рассматриваются некоторые поперечные эффекты пространственного заряда в циклических системах. Влияние заряда пучка на свободные колебания частиц изучалось многими авторами. В этих работах исследование проводилось в линейном приближении и в основном ограничивалось нахождением предельных плотностей частиц. Однако при этом из поля зрения выпадает ряд интересных явлений, обусловленных нелинейными эффектами пространственного заряда, которые по аналогии с другими случаями можно назвать эффектами «отрицательной массы» [1, 2]. Суть этих явлений можно пояснить следующим образом. В нелинейном осцилляторе частота (фазовая скорость) зависит от энергии [3]. Поэтому распределение частиц, равномерное по фазам, оказывается при определенных условиях неустойчивым. Рассмотрим для простоты пучок, в котором частицы совершают нелинейные колебания с одинаковой энергией. Поле образовавшейся положительной флуктуации плотности ускоряет частицы, двигающиеся перед флуктуацией, и замедляет частицы, находящиеся позади нее. Если частота колебаний уменьшается с ростом энергии $\left(\frac{d\omega}{dw} < 0\right)$, то флуктуации плотности увеличиваются; если $\frac{d\omega}{dw} > 0$, то возмущения плотности рассасываются. Как известно из теории нелинейных бетатронных колебаний [4], условию $\frac{d\omega}{dw} < 0$ могут удовлетворять (по крайней мере в одном из направлений) фактически все циклические системы. Поэтому это явление целесообразно исследовать подробнее.

Рассмотрим тот практически важный случай, когда размеры пучка в одном из поперечных направлений (радиальном) существенно больше других (вертикальных) и допустим, что частицы по вертикали совершают линейные колебания, а амплитуда радиальных колебаний достаточно велика, чтобы вступили в силу нелинейные соотношения. Тогда радиальное движение, описываемое уравнением *,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g_1 x^2 + g_2 x^3 + \frac{e\mathscr{E}}{m\omega\gamma^2}, \qquad (1)$$

где $\mathscr{E}$ — поле флуктуации, $\gamma = E/E_0$, E — полная энергия частиц, можно записать в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

* К такому виду можно привести уравнение бетатронных колебаний в произвольной периодической системе [5]. Заметим также, что ω и $g_{1,2}$ включают поле пучка.

где амплитуда A и фаза φ колебаний в свою очередь изменяются (но сравнительно медленно) со временем. Усредняя по быстрым колебаниям [6], убеждаемся, что радиальное движение удобно описывать в канонических переменных $z = A^2$ и φ

$$\dot{z} = -\frac{2e\sqrt{z}}{m\omega\gamma^2}\overline{\mathcal{E}\sin(\omega t+\varphi)},\quad \dot{\varphi} = -\beta z - \frac{e}{m\omega\gamma^2\sqrt{z}}\overline{\mathcal{E}\cos(\omega t+\varphi)}, \tag{3}$$

где $\beta = 5g_1^2/12\omega^3 + 3g_1/8\omega$. Будем характеризовать состояние пучка функцией распределения $F(t, \varphi, z)$, которую представим как

$$F = F_0(z) + f(t, z, \varphi),\ f \ll F_0, \tag{4}$$

где F_0 — однородное по фазе равновесное распределение, f — возмущение. Линеаризованное по f кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \beta z\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{2e\sqrt{z}}{m\omega\gamma^2}\frac{\partial F}{\partial z}\overline{\mathcal{E}\sin(\omega t+\varphi)} \tag{5}$$

или, если выполнить преобразование Лапласа по времени и Фурье по фазе

$$f_p[p - ik\beta z] = f_0(k, z) + \frac{2e\sqrt{z}}{m\omega\gamma^2}\frac{\partial F}{\partial z}\overline{\mathcal{E}\sin(\omega t+\varphi)}/_{p_1 k}. \tag{6}$$

Чтобы связать $\overline{\mathcal{E}\sin(\omega t+\varphi)}/_{p,k}$ с $f_p(k)$, обратим внимание на тот факт, что частота вертикальных колебаний много больше $\dot{\varphi}$ и при движении по z и φ частица в среднем находится в плоскости $y=0$ (y — амплитуда вертикальных колебаний). Поэтому для каждого интервала x и φ имеет смысл рассматривать возмущения, равномерно распределенные по вертикали. Что касается вида возмущения вдоль оси пучка (в направлении движения пучка как целого), то разберем два крайних случая: вдоль пучка размеры возмущения 1) много больше и 2) много меньше радикальных размеров пучка. При этом

$$\mathcal{E}\,\overline{\sin(\omega t+\varphi)}/_{p,k} = 4e\int_0^\infty I(z,z')f_p(k,z')\,dz', \tag{7}$$

где ядро преобразования $I(z_1z')$ соответственно в первом и втором случаях

$$I^{(1)}(z, z') = 2\int_0^{2\pi} e^{ik\eta}\sin\eta\,\frac{\sqrt{z'}}{B}\left[1 + \frac{y_0}{B} - \sqrt{1 + \frac{y_0^2}{B^2}}\right]d\eta,$$

$$I^{(2)}(z, z') = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\eta}\sin\eta\,\frac{\sqrt{z'}y_0}{B^2\sqrt{y_0^2 + B^2}}K\left(\frac{B}{\sqrt{y_0^2 + B^2}}\right), \tag{8}$$

где $B^2 = z + z' - 2\sqrt{zz'}\cos\eta$, $2y_0 = 2y_0(\varphi)$ — вертикальная апертура пучка, K — полный эллиптический интеграл первого рода. Используя (8), можно найти «частоты» p плазменных колебаний при заданном виде $F_0(z)$. Рассмотрим конкретный случай. Пусть частицы распределены в интервале $[z_1 z_0]$ с постоянной плотностью, так что $F_0'(z) = N(\delta(z-z_1) - \delta(z-z_0))/(4\pi R\Delta z y_0)$, где $\Delta z = z_0 - z_1$, R — радиус орбиты пучка. Из (6) следует дисперсионное уравнение, корни которого определяют асимптотическое поведение возмущений

$$(\Lambda_1 I_{11} - 1)(\Lambda_0 I_{00} + 1) = \Lambda_1\Lambda_0 I_{01} I_{10}, \tag{9}$$

$$\Lambda_j = \frac{e^2 N\sqrt{z_j}}{m\omega\gamma^2(p - ik\beta z_j)\pi R y_0}.$$

Например, для первого типа возмущений с точностью до $(\Delta z/z_0)^2$ получаем

$$p = ik\beta z - ik\psi\{1 \pm \sqrt{1 - 8\beta z_0/\psi}\},\quad \psi = \frac{e^2 N\,I_{00}'\pi/k}{8\pi m\gamma^2\omega\sqrt{z_0}y_0 R}.$$

Поскольку $I_{00}/k \to 0$ при $K \to \infty$, то распределение всегда неустойчиво ($\mathrm{Re}\,p > 0$) при $\beta > 0$. При $\beta < 0$ плотность пучка испытывает малые устойчивые колебания с частотой, определяемой $Im\,p$.

В качестве иллюстрации к полученным формулам укажем, что для электронного накопителя с параметрами $\gamma = 60$; $R = 10^2$ *см*; $N = 5 \cdot 10^{13}$, показателем поля $n = {}^2/_3$, время развития неустойчивости $T \sim \frac{1}{p} \cong 10^{-7}$ *сек*, т. е. порядка времени нескольких оборотов. Следует помнить, однако, что рост возмущений увеличивает разброс по z, и дальнейшее развитие неустойчивости прекращается. Например, при $\Delta z = z_0 (z_1 = 0)$, $p = ik\beta z_0 - ik\psi$, и $\mathrm{Re}\,p = 0$ независимо от знака β.

Рассмотренное явление необходимо принимать во внимание при накоплении частиц и проведении реакции на встречных пучках, при инжекции и т. д. По-видимому, этот факт можно использовать для авторегулирования пучка.

Автор выражает благодарность А. А. Коломенскому и А. Н. Лебедеву за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. CERN Symposium, 1959, p. 115.
2. Nielsen C., Sessler A. CERN Symposium 1959, p. 450.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. Физматгиз, М., 1958, стр. 109.
4. Коломенский А. А. Теория ускорителей. «Тр. ФИАН СССР», **XIII**, 1960.
5. Courant, Snyder. Ann. Phys., **3**, 1, 1958.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. Л. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.

Поступила в редакцию
20. 6 1962 г.

НИИЯФ