Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1963

И. Б. АЛЕКСАНДРОВ, Ю. А. КУХАРЕНКО,
А. В. НИУККАНЕН

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Выводится кинетическое уравнение пространственно-однородной квантовомеханической системы частиц, подчиняющихся статистике Ферми. Предполагается, что потенциальная энергия парного взаимодействия частиц мала, на основании чего вводится параметр малости теории возмущений. Уравнение получено с точностью до членов второго порядка малости. Для расцепления цепочки уравнений для корреляционных функций используется начальное условие ослабления корреляций, отличное от известных в квантовой механике. Исследуется возможность дальнейших приближений.

Рассмотрим систему N одинаковых фермионов в объеме V с гамильтонианом

$$H = \sum_{(f)} T(f)\, a_f^+ a_f + \frac{1}{2V} \sum_{\left(\substack{f_1 f_2 f_1' f_2' \\ \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_1' + \vec{k}_2'}\right)} I(f_1 f_2 f_1' f_2')\, a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_2'} a_{f_1'}, \tag{1}$$

где индекс f представляет совокупность импульса $\vec{k}$ и спина σ частицы, $T(f) = \frac{k^2}{2m}$ — ее кинетическая энергия,

$$I(f_1 f_2 f_1' f_2') = \langle f_1 f_2 | \Phi(1, 2) | f_1' f_2' \rangle,$$

где через $| f \rangle$ обозначена волновая функция с импульсом f из полного ортонормированного набора одночастичных функций, в качестве которых можно взять, например, плоские волны:

$$\Phi(1, 2) = \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1')\, \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')\, \Delta(\sigma_1 - \sigma_1')\, \Delta(\sigma_2 - \sigma_2'),$$

$$\Delta(\sigma - \sigma') = \begin{cases} 1 & \sigma = \sigma' \\ 0 & \sigma \neq \sigma' \end{cases} \tag{2}$$

представляет собой потенциальную энергию парного взаимодействия частиц, а операторы рождения a_f^+ и уничтожения a_f частиц удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$a_{k\sigma}a_{k'\sigma'} + a_{k'\sigma'}a_{k\sigma} = 0, \quad a^+_{k\sigma}a^+_{k\sigma'} + a^+_{k'\sigma'}a^+_{k\sigma} = 0,$$

$$a_{k\sigma}a^+_{k'\sigma'} + a^+_{k'\sigma'}a_{k\sigma} = \Delta(\vec{k} - \vec{k}')\,\Delta(\sigma - \sigma').$$

Вводя операторные волновые функции

$$\Psi(\vec{r}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a_{k\sigma}e^{+i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\Psi^+(\vec{r}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a^+_{k\sigma}e^{-i\vec{k}\vec{r}},$$

найдем функции распределения в представлении вторичного квантования

$$F_1(t, x_1, x_1') = \frac{1}{v}\langle \Psi^+(t, x_1')\,\Psi(t, x_1)\rangle,$$

$$F_2(t, x, x_2, x_1', x_2') = \frac{1}{v^2}\langle \Psi^+(t, x_1')\,\Psi^+(t, x_2')\,\Psi(t, x_2)\,\Psi(t, x_1)\rangle, \tag{3}$$

. . . . . .

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s, x_1', \ldots, x_s') =$$

$$= \frac{1}{v^s}\langle \Psi^+(t, x_1')\ldots\Psi^+(t, x_s')\,\Psi(t, x_s)\ldots\Psi(t, x_1)\rangle,$$

где совокупность спинов σ и координат $\vec{r}$ обозначена через x и $v = \frac{V}{N}$, а усреднение происходит по статистическому ансамблю.

В монографии Н. Н. Боголюбова [1] для F_s была выведена зацепляющаяся цепочка уравнений

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \Big[\sum_{1\leqslant i\leqslant s} T(i), F_s\Big] + \frac{1}{v}\operatorname*{Sp}_{(s+1)}\Big[\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\Phi(i, s+1), F_{s+1}\Big], \tag{4}$$

$$[AB] = \frac{[AB - BA]}{c\hbar}, \quad s = 1, 2\ldots,$$

в которых уже выполнен предельный переход $N \to \infty$, $V \to \infty$, при $v = \text{const}$.

Предполагая, что потенциальная энергия взаимодействия пары частиц мала, введем малый параметр $\varepsilon \ll 1$; тогда $\Phi = \varepsilon\Phi_0$, где Φ_0—конечна. Тогда система (4) в развернутом виде имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial F(t, x_1, x_1')}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1} - \Delta_{r_1'})F_1(t, x_1, x_1') +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{v}\int\{\Phi_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \Phi_0(\vec{r}_1' - \vec{r}_2)\}F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2)\,dx_2,$$

$$i\hbar\frac{\partial F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2')}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2} - \Delta_{r_1'} - \Delta_{r_2'})F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2') +$$

$$+ \varepsilon\{\Phi_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')\}F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2') + \frac{\varepsilon}{v}\int\{\Phi_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) +$$

$$+ \Phi_0(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) - \Phi_0(\vec{r}_1' - \vec{r}_3) - \Phi_0(\vec{r}_2' - \vec{r}_3)\}F_3(t, x_1, x_2, x_3 x_1', x_2', x_3'), \tag{5}$$

где $\int dx$ означает квазидискретную сумму $\sum_{\sigma}\int d\vec{r}$. Н. Н. Боголюбовым и К. П. Гуровым [2] для системы бозе-частиц было показано, что в предельном случае отсутствия взаимодействия ($\varepsilon=0$) решением системы (5) являются симметризованные мультипликативные функции

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s, x_1', \ldots, x_s') = \gamma_s F_1(t, x_1, x_1') \ldots F_1(t, x_s, x_s'). \tag{6}$$

Тем же способом можно показать, что (6) являются решением (5) при $\varepsilon=0$, когда $\gamma_s = \sum_{(p)}(-1)^p$. Здесь берется сумма по всем перестановочным аргументам $x_1, \ldots, x_s$ и $(-1)^p = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки. Для расцепления системы (5) используются приближенные методы. Например, положив в первом уравнении (5)

$$F_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2') = F_1(t, x_1, x_1') F_1(t, x_2, x_2') - F_1(t, x_2, x_1') F_1(t, x_1, x_2'),$$

получим кинетическое уравнение с точностью до первого порядка по ε включительно.

Для получения кинетического уравнения с точностью до членов порядка ε^2 воспользуемся методом теории возмущений, описанным в [2]. Предполагая, что корреляционное отклонение функций $F_2(1, 2)$ и $F_3(1, 2, 3)$ от мультипликативных мало, введем оператор g

$$F_2(1, 2) = \gamma_2 F_1(1) F_1(2) + \varepsilon g(1, 2), \tag{7}$$

$$F_3(1, 2, 3) = \gamma_3 F_1(1) F_1(2) F_1(3) + \frac{1}{2}\varepsilon\gamma_3 \{g(1, 2) F_1(3) + g(2, 3) F_1(1) + g(1, 3) F_1(2)\}.$$

Подставляя (7) в (5) и используя

$$\frac{\partial\{\gamma_2 F_1(1) F(2)\}}{\partial t} = [T(1) + T(2), \gamma_2 F_1(1) F_1(2)],$$

получим замкнутую приближенную систему двух уравнений

$$\frac{\partial F_1(1)}{\partial t} = [T(1), F_1(1)] + \frac{\varepsilon}{v}\operatorname*{Sp}_{(2)}[\Phi_0(1, 2), \gamma_2 F_1(1) F_1(2)] + \frac{\varepsilon^2}{v}\operatorname*{Sp}_{(2)}[\Phi_0(1, 2), g(1, 2)], \tag{8}$$

$$\frac{\partial g(1,2)}{\partial t} = [T(1) + T(2), g(1, 2)] + A(1, 2, F_1), \tag{9}$$

где введено обозначение

$$A(1, 2, F_1) = [\Phi_0(1, 2), \gamma_2 F_1(1) F_1(2)] + \frac{1}{v}\operatorname*{Sp}_{(3)}[\Phi_0(1, 3) + \Phi_0(2, 3), \gamma_3 F_1(1) F_1(2) F_1(3)]. \tag{10}$$

Рассмотрим случай пространственно-однородного распределения $F_1(t, \vec{r}_1, \vec{r}_1') = F_1(t, \vec{r}_1 - \vec{r}_1')$.

В импульсном представлении имеем $F_1(t, p_1, p_1') = (2\pi\hbar)^3 w(p_1)\delta(p_1 - p_1')$, где $w(p_1)$ — функция распределения по импульсам одной частицы.

В пространственно-однородном случае

$$[T(1), F_1(1)] = 0, \quad \operatorname*{Sp}_{(2)}[\Phi_0(1, 2), \gamma_2 F_1(1) F_1(2)] = 0$$

и уравнения (8) и (9) в импульсном представлении принимают вид

$$\frac{\partial w(p_1)}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{(2\pi\hbar)^3 vi\hbar} \int dp_2\, dp_1''\, dp_2''\, dp_1' \{\widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1'')\, \delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \times$$

$$\times g(p_1'', p_2'', p_1', p_2) - g(p_1, p_2, p_1'', p_2'')\, \widetilde{\Phi}_0(p_1'' - p_1')\, \delta(p_1'' + p_2'' - p_1' - p_2)\}, \quad (11)$$

где

$$\widetilde{\Phi}_0(p) = \int \Phi_0(r) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} pr\right\} dr,$$

$$\frac{\partial g(p_1, p_2, p_1', p_2'')}{\partial t} = \frac{g(p_1, p_2, p', p_2')}{i\hbar}(T(p_1') + T(p_2') - T(p_1) - T(p_2)) +$$

$$+ A(p_1, p_2, p_2', t), \quad (12)$$

где

$$A(p_1, p_2, p_1', p_2', t) = \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \frac{\widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1') - \widetilde{\Phi}_0(p_2 - p_1')}{i\hbar(2\pi\hbar)^3} \times$$

$$\times \left\{ w(p_1') w(p_2') \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v} w(p_1) - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v} w(p_2)\right) - \right.$$

$$\left. - w(p_1) w(p_2) \left(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v} w(p_1') - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v} w(p_2')\right)\right\}. \quad (13)$$

Для решения уравнения (12) наложим на $g(1, 2, t)$ начальное условие ослабления корреляции при $t \to -\infty$. Будем считать, что

$$g(1, 2, t) \to 0, \quad t \to -\infty. \quad (14)$$

Условие (14), в отличие от граничных условий, налагаемых на корреляционные функции в [1], не требует медленности изменения $F_1(t)$ со временем по сравнению с $F_2(t)$ и не связано с идеей синхронизации корреляционных функций разного порядка. Поэтому на зависимость $F_1(t)$ от времени не налагается никаких ограничений.

Условие (14) дает возможность более полно использовать метод теории возмущений, изложенный в [2], так как позволяет решить уравнение (12) и получить кинетическое уравнение с точностью до величин порядка ε^2 включительно, в то время как члены порядка ε^2 и выше, вычисленные с помощью указанных граничных условий в [1], оказываются расходящимися. Заметим, что граничные условия, налагаемые на корреляционные операторы с помощью оператора трансляции частиц на бесконечность в работе [3], представляющей квантовый аналог вывода классических кинетических уравнений (см. [1]), являются формальными и не имеют той физической интерпретации, как в классическом случае; тогда как условие (14) представляет собой граничное квантовомеханическое условие и потому более естественно. Кроме того, условие (14) применимо для любого потенциала, в то время как граничные условия в [3] применимы лишь к потенциалу вида $u_1(2) + \alpha u_2(2)$, где u_1 — монотонно убывающая функция расстояния между частицами, а α — малый параметр. Таким образом, применение оператора трансляций частиц для формулирования граничных условий вводит в теорию второй малый параметр и затрудняет вывод кинетического уравнения.

Итак, условие (14) позволяет получить кинетическое уравнение в более общем предположении, которое в частном случае медленного изменения $F_1(t)$ по сравнению с $F_2(t)$ переходит в кинетическое уравнение,

аналогичное [2]. Более того, условие ослабления корреляции в начальный момент дает возможность обобщить метод теории возмущений [2] на потенциальную энергию парного взаимодействия частиц, матрица которой в координатном представлении не диагональна, а также на пространственно-неоднородный случай, как это показано в работе [4].

Решение уравнения (12) с начальным условием (14) представляется в виде

$$g(p_1, p_2, p_1', p_2', t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(T(p_1) + T(p_2) - \right.$$
$$\left. - T(p_1') - T(p_2'))(t-\tau)\right\} A(t). \tag{15}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2'))(t-t)\right\} A(t) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \frac{i}{\hbar}(T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2') \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')(t-\tau)\right\} A(\tau) =$$
$$= A(t) + \frac{g}{i\hbar}(T(p_1') + T(p_2') - T(p_1) - T(p_2)).*$$

Подставляя (15) в (11), получим кинетическое уравнение для функции распределения w

$$\frac{\partial w(p, t)}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{(2\pi\hbar)^3 vi\hbar} \int_{-\infty}^{t} d\tau \left\{\widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1'')\,\delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \times\right.$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(T(p_1'') + T(p_2'') - T(p_1') - T'(p_2))(t-\tau)\right] A(p_1'', p_2'', p_1', p_2, \tau) -$$
$$- \widetilde{\Phi}_0(p_1'' - p_1')\,\delta(p_1'' + p_2'' - p_1' - p_2) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(T(p_1) + T(p_2) - T(p_1'') -\right.$$
$$\left.\left. - T(p_2''))(t-\tau)\right] A(p_1, p_2, p_1'', p_2'', \tau)\right\} dp_2\, dp_1'',\, dp_2''\, dp_1', \tag{16}$$

где $A(t)$ дается формулой (13).

Вводя средние числа заполнения частиц с импульсом p

$$n_p = \frac{(2\pi\hbar)^3}{v} w(p),$$

можем переписать уравнение (16)

$$\frac{\partial n_{p_1}}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{i\hbar v} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int dp_1''\, dp_2''\, dp_1'\, dp_2 \left\{\widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1'')\,\delta(p_1 + p_2 - p_1'' - p_2'') \times\right.$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(T(p_1'') + T(p_2'') - T(p_1') - T(p_2))(t-\tau)\right] A(p_1, p_2, p_1, p_2, \tau) -$$

* То есть уравнение (12).

$$-\widetilde{\Phi}(p_1''-p_1')\,\delta(p_1''+p_2''-p_1'-p_2)\times$$

$$\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}(T(p_1)+T(p_2)-T(p_2'')-T(p_1''))(t-\tau)\right]A(p_1,p_2,p_1'',p_2'',\tau)\},$$

где

$$A(p_1,p_2,p_1'',p_2'',t)=\frac{1}{i\hbar(2\pi\hbar)^3}\{\widetilde{\Phi}_0(p_1-p_1')-\widetilde{\Phi}_0(p_2-p_1')\}\times$$

$$\times\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\{n_{p_1}\;n_{p_2}(1-n_{p_1'})(1-n_{p_2'})-n_{p_1'}\;n_{p_2'}(1-n_{p_1})(1-n_{p_2})\}.$$

В случае медленного изменения $F_1(t)$ со временем по сравнению с $F_2(t)$ уравнение (16) упрощается. В этом случае $A\,(1,2,F_1(t))$ медленно меняется со временем, и его можно вынести из-под знака интеграла в формуле (15)

$$g(p_1,p_2,p_1',p_2',t)=A(p_1,p_2,p_1',p_2',F_1(t))\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\;\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(T(p_1))+T(p_2)-T(p_1')-T(p_2'))(t-\tau)\right\}.$$

Совершая в оставшемся интеграле замену переменной интегрирования $\omega=t-\tau$, $-d\omega=d\tau$, получим

$$g(p_1,p_2,p_1',p_2',t)=A(p_1,p_2,p_1',p_2',t)\,\hbar\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i(T(p_1)+T(p_2)-T(p_1')-T(p_2')\omega}\,,d\omega=$$

$$=2\pi\hbar\delta_+(T(p_1)+T(p_2)-T(p_1')-T(p_2'))\,A(p_1,p_2,p_1,p_2,t).\qquad(17)$$

Подставляя (17) в (16) и используя представление $\delta_+(x)=\frac{1}{2}\delta(x)+$ $+\frac{i}{2\pi x}$, получим уравнение

$$\frac{\partial\omega(p_1)}{\partial t}=\frac{\varepsilon^2}{2v(2\pi\hbar)^3 i\hbar}\int\widetilde{\Phi}_0(|p_1-p_1'|)\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\,\delta(T(p_1)+$$

$$+T(p_2)-T(p_1')-T(p_2')(\theta(p_1',p_2',p_1,p_2)+\theta(p_1,p_2,p_1',p_2'))\,dp_1'\;dp_2'\;dp_2+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{v(2\pi\hbar)^4}\mathfrak{P}\int\widetilde{\Phi}(|p_1-p_1'|)\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\times$$

$$\times\frac{\theta(p_1',p_2',p_1,p_2)+\theta(p_1,p_2,p_1',p_2')}{T(p_1+T(p_2)-T(p_1')-T(p_2')}\,dp_1',dp_2',dp_2,\qquad(18)$$

где введено

$$A(p_1,p_2,p_1',p_2')=\frac{1}{2\pi\hbar}\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\,\theta(p_1,p_2,p_1',p_2').$$

Уравнение (18) можно упростить следующим образом. Запишем его для $F_{p_1,p_1'}=(2\pi\hbar)^3\,w(p_1)\,\delta(p_1-p_1')$

$$\frac{\partial F_{p_1p_1'}}{\partial t}=\frac{\varepsilon^2}{2vi\hbar}\int\widetilde{\Phi}_0(p_1-p_1')\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\times$$

$$\times\delta(T_1+T_2-T_1'-T_2')(\theta(p_1',p_2',p_1,\;p_2)+\theta(p_1,p_2,p_1',p_2'))\times$$

$$\times\, dp_2 dp_2' dp + \frac{\varepsilon^2}{v(2\pi\hbar)^4}\, \mathfrak{P}\int \widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1')\,\delta(p_1 + p_2 - p_1' -$$

$$- p_2')\, \frac{\theta(p_1', p_2', p_1, p_2) + \theta(p_1, p_2, p_1', p_2')}{T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')}\, dp_2' dp_2. \qquad (19)$$

Перепишем уравнение (19) для F_{p_1', p_1} и совершим в нем замену переменного интегрирования $p_2 \rightleftarrows p_2'$. Сложив полученное уравнение с уравнением (19) и поделив сумму на два, проинтегрируем результат по p_1'. Учитывая, что в пространственно-однородном случае $F_{p_1 p_1'} = (2\pi\hbar)^3 w(p_1)\,\delta(p_1 - p_1') = (2\pi\hbar)^3 w(p_1')\,\delta(p_1 - p_1') = F_{p_1' p_1}$, заметим, что члены, содержащие интеграл в смысле главного значения, исчезают. Получаем уравнение

$$\frac{\partial w(p_1)}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{(2\pi\hbar)^5 v h^2} \int \Big\{ \widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1')\, \widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1') -$$

$$- \widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1')\, \widetilde{\Phi}_0(p_1' - p_2) \Big\} \cdot \Big\{ w(p_1)\, w(p_2) \Big(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v} \times$$

$$\times\, w(p_1') - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_2') \Big) - w(p_1')\, w(p_2') \times$$

$$\times \Big(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_1) - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_2) \Big) \Big\}\, \delta(p_1 + p_2 - p_1' -$$

$$- p_2')\, \delta(T_1 + T_2 - T_1' - T_2')\, dp_1\, dp_2'\, dp_2. \qquad (20)$$

Переставляя в уравнении (20) индексы p'_1 и p'_2, складывая получаемое при этом уравнение с уравнением (20) и деля сумму пополам, получим кинетическое уравнение в симметричном виде

$$\frac{\partial w(p_1)}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{2(\pi\hbar)^5 v\hbar^2} \int \Big| \widetilde{\Phi}_0(|p_1 - p_1'|) - \widetilde{\Phi}(|p_2 - p_1'|) \Big|^2 \times$$

$$\times\, \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\, \delta(T_1 + T_2 - T_1' - T_2') \{ w(p_1) \times$$

$$\times\, w(p_2) \Big(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_1') - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_2') \Big) - w(p_1')\, w(p_2') \times$$

$$\times \Big(1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_1) - \frac{(2\pi\hbar)^3}{v}\, w(p_2) \Big) \Big\}\, dp_1'\, dp_2'\, dp_2.$$

Переходя к числам заполнения состояний с определенными импульсами, окончательно получим

$$\frac{\partial n_{p_1}}{\partial t} = \frac{\pi\varepsilon^2}{(2\pi\hbar)^6 \hbar} \int |\widetilde{\Phi}_0(p_1 - p_1') - \widetilde{\Phi}_0(p_2 - p_1')|^2\, \delta(p_1 +$$

$$+ p_2 - p_1' - p_2')\, \delta(T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')) \times$$

$$\times \{ n_{p_1}, n_{p_2}(1 - n_{p_1'})(1 - n_{p_2'}) - n_{p_1'}, n_{p_2'}(1 - n_{p_1}) \times$$

$$\times (1 - n_{p_2}) \}\, dp_1', dp_2', dp_2. \qquad (21)$$

Уравнение (21) совпадает с кинетическим уравнением, выведенным в работе [2] с помощью граничных условий другого вида. Полученное уравнение содержит амплитуду рассеяния двух частиц в первом бор-

Научная библиотека им. Горького МГУ

новском приближении. Кинетическое уравнение (21) получено с точностью до членов ε^2 с помощью метода теории возмущений, изложенного в [2].

Исследуем возможность дальнейших приближений. Уравнение (9) для $g(1,2)$ было составлено с точностью до членов первого порядка по ε. Если учесть отброшенные члены, получим

$$\frac{\partial g(1,2)}{\partial t} = [T(1) + T(2), g(1,2)] + A(1, 2, F_1) + \varepsilon B(1, 2, F, g),$$

где

$$B(1, 2, F_1, g) = [\Phi_0(1,2), g(1,2)] + \frac{1}{2v} \operatorname*{Sp}_{(3)} [\Phi_0(1,3) +$$
$$+ \Phi_0(2,3), \gamma_3 \{g(1,2) F_1(3) + g(2,3) F_1(1) + g(3,1) F_1(3)].$$

Так как g входит лишь в члены B, пропорциональный ε, то, представляя g в виде $g = g_0 + \varepsilon g$, получим уравнения

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} = [T(1) + T(2), g_0] + A(1, 2, F_1),$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} = [T(1) + T(2), g_1] + B(1, 2, F_1, g_0),$$

которые легко решаются с помощью нашего начального условия (14). Решения их в p-представлении имеют вид

$$g_0(t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(T_1 + T_2 - T_1' + T_2')(t - \tau)\right\} A(p_1, p_2, p_1', p_2', \tau),$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left\{\frac{1}{\hbar}(T_1 + T_2 - T_1' - T_2')(t - \tau)\right\} B[p_1, p_2, p_1', p_2', F_1(\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau' \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(T_1 + T_2 - T_1' - T_2')(\tau - \tau')\right\} A(p_1, p_2, p_1', p_2', F_1(\tau'))].$$

Предполагая, что $F_1(t)$ медленно меняется со временем, для $g_1(t)$ легко получить решение, содержащее $\delta_+^2 (T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2))$, в силу чего g_1 оказывается расходящимся. С помощью приема, изложенного в [2], эту расходимость можно устранить, в результате чего для g получается выражение, содержащее

$$\delta_+ (E(p_1) + E(p_2) - E(p_1') - E(p_2')),$$

где

$$E(p) = T(p) + \frac{\varepsilon}{v} \int \widetilde{\Phi}(|p - p'|) w(p') dp' = T(p) + \varepsilon R(p),$$

откуда видно, что расходимость в g_1 связана с невозможностью разложения δ_+ функции в ряд по целым степеням ε.

Таким образом, возникает трудность получения высших приближений кинетического уравнения. Дело в том, что энергетические уровни даже слабо неидеального газа лишь квазистационарны и характеризуются конечным временем жизни. Поэтому энергия, соответствующая этим квазиуровням, комплексна. Кроме того, в высших приближениях,

как показано в [2], энергия E зависит от чисел заполнения и, следовательно, кинетическое уравнение, содержащее член порядка ε^3 уже нельзя интерпретировать в больцмановской схеме парных соударений из-за наличия коллективных эффектов. Рассмотрение этого члена, как описывающего соударения между «элементарными возбуждениями» приводит к той же трудности, так как само понятие об идеальном газе «элементарных возбуждений» приближенно и справедливо лишь при малой ширине уровня по сравнению с энергией возбуждения.

К разрешению этой трудности (см., например, [5]) приводит применение функций Грина и исследование их полюсов в комплексной энергетической плоскости. Метод функций Грина позволяет оценить и границу применимости понятия об «элементарных возбуждениях». Таким образом, наиболее естественно было бы получить и исследовать замкнутые уравнения для функций Грина, связанных с приближенным кинетическим уравнением в квантовой механике. Это исследование составит предмет следующей статьи.

Мы глубоко признательны академику Н. Н. Боголюбову за ценные советы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, 1946.
2. Боголюбов Н. Н., Гуров К. П. ЖЭТФ, 17, 614, 1947.
3. Гуров К. П. Диссертация, МГУ, 1947.
4. Ниукканен А. В. Дипломная работа, МГУ, 1962.
5. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. Физматгиз, М., 1961.

Поступила в редакцию
29.4 1962 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой
теории