Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1963

В. В. МИГУЛИН

# О РАСЧЕТЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ НА ЧАСТОТЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРА

Рассмотрены особенности параметрического возбуждения колебаний с частотой, равной частоте изменения параметра, и показано, что небольшая модификация метода медленно меняющихся амплитуд позволяет применить его для расчета условий возбуждения и определения ширины области допустимых уклонений собственной частоты возбуждаемой системы от частоты изменения параметра.

1. Как известно, в колебательной системе при периодическом изменении одного из энергоемких параметров возможно параметрическое возбуждение колебаний. При этом должны выполняться определенные соотношения между глубиной модуляции параметра, частотой его изменения и затуханием и собственной частотой самой системы.

Например, в электрическом колебательном контуре с постоянными $L$ и $R$ и с емкостью, меняющейся по закону

$$C = \frac{C_0}{1 + m\cos 2pt}, \tag{1}$$

возможно возбуждение нарастающих электрических колебаний с частотой $\omega = np$, если при этом удовлетворяются определенные условия, налагаемые на величины $m$ и $\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC_0}$.

Для случая $n=1$, соответствующего первой области нестабильности решения уравнения с периодическими коэффициентами, эти условия имеют вид [1]

$$m^2 > 16\vartheta^2 + 4\xi^2 \tag{2}$$

с точностью до высших степеней $m$, $\vartheta$ и $\xi$,
где

$$2\vartheta = \frac{R}{pL}; \quad \xi = \frac{p^2 - \omega_0^2}{p^2}.$$

Эти же условия, полученные с точностью до высших степеней $m$ и $\xi$ из рассмотрения границ областей нестабильности решений уравнения Матьё, непосредственно получаются при применении к данной задаче метода медленно меняющихся амплитуд (см., например, [2, 3]).

Исследуемая система описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\vartheta\dot{x} + (1 - \xi)(1 + m\cos 2\tau)\,x = 0, \tag{3}$$

где $\tau = pt$.

При ее приближенном рассмотрении методом медленно меняющихся амплитуд принимаем следующие выражения для $x$ и $\dot{x}$:

$$\begin{aligned} x &= u\cos\tau + v\sin\tau, \\ \dot{x} &= -u\sin\tau + v\cos\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

где $u(\tau)$ и $v(\tau)$ медленно меняющиеся функции $\tau$ так, что $\dot{u} \ll u$ и $\dot{v} \ll v$ и изменениями $u$ и $v$ за один период колебаний (за время $\tau = 2\pi$) можно пренебречь.

Определяя, как обычно, устойчивость нулевого решения состояния покоя — $u = v = 0$, получаем, что это состояние будет неустойчиво, если

$$\sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} - 2\vartheta > 0. \tag{5}$$

Это условие совпадает с условием (2) и определяет значения $m$ и $\xi$, при которых для данного затухания возможно параметрическое возбуждение колебаний с частотой, равной половине частоты изменения параметра.

Соответствующая область допустимых расстроек $\xi$, внутри которой осуществляется параметрическое возбуждение колебаний, будет

$$\Delta\xi = \sqrt{m^2 - 16\vartheta^2}. \tag{6}$$

Для $\vartheta = 0$ это дает $\Delta\xi = m$, что соответствует ширине первой области нестабильности уравнения Матьё (см., например, [1, 4]).

Как и следовало ожидать, для этого случая метод медленно меняющихся амплитуд дает результаты, совпадающие с полученными из общего рассмотрения задачи в пренебрежении членами порядка высших степеней $m$, $\vartheta$ и $\xi$ и их произведениями.

Поскольку метод медленно меняющихся амплитуд при выводе приближенных (укороченных) уравнений для $u$ и $v$ предусматривает пренебрежение членами порядка высших степеней $m$, $\vartheta$ и $\xi$ и их произведениями, то естественно, что этим методом в его обычной форме невозможно рассчитывать условия возбуждения колебаний при $n \neq 1$, т. е. во второй и последующих областях нестабильности.

2. При общем рассмотрении линейных уравнений с периодическими коэффициентами решения ищутся в виде рядов по степеням $m$ и учет в решении членов порядка $m$ и более высоких степеней $m$ позволяет учесть влияние негармоничности решения (см., например, [4]). При этом для $n = 2$ соответствующий член порядка $m$ будет содержать постоянную составляющую и периодические компоненты с основной и кратными частотами. Только учет этих членов порядка $m$ позволяет найти границы области неустойчивости и, следовательно, определить условия параметрического возбуждения для данного соотношения частот. Это указывает на то, что возбуждение колебаний в этом случае определяется уклонением формы возбуждаемых колебаний от строгой гармоничности. При этом на затухание (или соответственно на коэффициент глубины модуляции параметра) накладываются условия более жесткие, чем для случая $n = 1$ (в первой области нестабильности).

Указанные особенности параметрического возбуждения колебаний с частотой, равной частоте изменения параметра, могут быть рассмотрены с применением метода медленно меняющихся амплитуд.

В этом случае рассматриваемая система описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\vartheta\dot{x} + (1 - \xi)(1 + m\cos\tau)\,x = 0, \tag{7}$$

где $\tau = pt$ и $p$ — частота изменения параметра.

Если, как обычно, принять

$$x = u\cos\tau + v\sin\tau, \quad \dot{x} = -u\sin\tau + v\cos\tau,$$

то укороченные уравнения будут

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [\xi x - 2\vartheta\dot{x} - mx\cos\tau]\sin\tau\,d\tau, \\ \dot{v} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [\xi x - 2\vartheta\dot{x} - mx\cos\tau]\cos\tau\,d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

откуда

$$\dot{u} = -\vartheta u - \frac{1}{2}\xi v, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}\xi u - \vartheta v. \tag{9}$$

Состояние покоя $u = v = 0$ будет устойчивым, так как всегда

$$\mathrm{Reel}\left|-\vartheta \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\xi^2}\right| < 0.$$

Таким образом, непосредственное применение метода медленно меняющихся амплитуд в его обычной форме не позволяет найти условие параметрического возбуждения колебаний с частотой изменения параметра.

Нетрудно видеть, что использованный вид решения (4) в данном случае неприменим. Подстановка этого решения в уравнение (7) приводит к появлению составляющей $(1-\xi)\frac{m}{2}u$ в третьем члене этого уравнения, в то время как все остальные составляющие будут осциллирующими. При медленности изменения амплитуд $u$ и $v$ указанная составляющая не может быть скомпенсирована за счет остальных членов уравнения (7). Следовательно, в предполагаемом решении должен быть предусмотрен член, обеспечивающий компенсацию этой составляющей.

3. В соответствии со сделанными выше замечаниями следует искать решение с не осциллирующей (медленно меняющейся) составляющей. Примем

$$\begin{aligned} x &= u\cos\tau + v\sin\tau + d(u, v), \\ \dot{x} &= -u\sin\tau + v\cos\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

При этом предполагается, что величина $d$ порядка $m$ и что произведениями $\frac{\partial}{\partial u} d(u, v)\,\dot{u}$ и $\frac{\partial}{\partial v} d(u, v)\,\dot{v}$ при выводе укороченных уравнений можно пренебречь.

Укороченные уравнения будут

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\xi x - 2\vartheta\dot{x} - mx\cos\tau]\sin\tau\,d\tau,$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\xi x - 2\vartheta\dot{x} - mx\cos\tau]\cos\tau\,d\tau.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\vartheta u - \frac{1}{2}\xi v,\\ \dot{v} &= \frac{1}{2}\xi u - \vartheta v - m\frac{d}{2}.\end{aligned} \tag{11}$$

В эти уравнения входит пока еще неопределенная величина $d(u, v)$. Для ее определения используем условие исчезновения неосциллирующих слагаемых в выражении

$$(1 + m\cos\tau)(u\cos\tau + v\sin\tau + d),$$

т. е. требование, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi}(1 + m\cos\tau)\,x\,d\tau = 0. \tag{12}$$

Это условие, очевидно, вытекает из требования отсутствия постоянного напряжения на переменной емкости электрического контура при периодическом изменении ее заряда. Наличие же постоянных составляющих заряда в емкости (или смещения в эквивалентной механической системе) нисколько не противоречит физическим свойствам реальных систем и является следствием периодического изменения соответствующего параметра системы при наличии в ней колебательного процесса.

Из условия (12) получаем

$$d = -\frac{m}{2}u. \tag{13}$$

Тогда укороченные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\vartheta u - \frac{1}{2}\xi v,\\ \dot{v} &= \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{m^2}{2}\right)u - \vartheta v.\end{aligned} \tag{14}$$

Устойчивость состояния покоя $u = v = 0$ определяется, как обычно, знаком вещественной части корней уравнения

$$\begin{vmatrix} -\vartheta - \lambda; & -\frac{1}{2}\xi \\ \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{m^2}{2}\right); & -\vartheta - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\vartheta \pm \sqrt{-\frac{1}{4}\xi\left(\xi - \frac{m^2}{2}\right)}. \tag{15}$$

Из (15) получаем, что состояние покоя будет неустойчивым — будет иметь место параметрическое возбуждение колебаний, если

$$\xi\left(\frac{m^2}{2}-\xi\right)>4\vartheta^2. \tag{16}$$

Это будет иметь место для

$$\xi^2-\frac{m^2}{2}\xi+4\vartheta^2<0,$$

т. е. при

$$\xi_1<\xi<\xi_2,$$

где

$$\xi_{12}=\frac{m^2}{4}\pm\sqrt{\frac{m^4}{16}-4\vartheta^2}.$$

Таким образом, параметрическое возбуждение колебаний в исследуемом случае будет иметь место, если

$$\frac{m^2}{4}-\sqrt{\frac{m^4}{16}-4\vartheta^2}<\xi<\frac{m^2}{4}+\sqrt{\frac{m^4}{16}-4\vartheta^2}. \tag{17}$$

Ширина области возбуждения

$$\Delta\xi=\sqrt{\frac{m^4}{4}-16\vartheta^2}. \tag{18}$$

Это выражение для $\vartheta=0$, т. е. для решений уравнения Матьё приводит к известному (см., например, [4]) значению для ширины второй области нестабильности $\Delta\xi=\frac{m^2}{2}$.

Заметим, однако, что расчет, проведенный методом медленно меняющихся амплитуд, дает для границ второй области нестабильности решения уравнения Матьё другие значения, чем те, которые получаются при последовательном анализе задачи в пренебрежении высшими степенями $m$. Метод медленно меняющихся амплитуд дает следующие границы области нестабильности:

$$\xi_1=0,\ \xi_2=\frac{m^2}{2},$$

в то время, как последовательный анализ с точностью до третьих степеней $m$ дает значения [4]

$$\xi_1=-\frac{1}{12}m^2,\quad \xi_2=+\frac{5}{12}m^2.$$

Таким образом, при периодическом изменении емкости электрического колебательного контура возможно параметрическое возбуждение колебаний с частотой изменения параметра, если при этом выполняется условие

$$\frac{m^4}{16}>4\vartheta^2,$$

или

$$m^2>8\vartheta \tag{19}$$

и

$$\xi_1<\xi<\xi_2.$$

Эти условия являются более жесткими, чем условия возбуждения колебаний с частотой, в два раза меньшей, чем частота изменения параметра. Из проведенного расчета также следует, что все вложение энергии — работа сил, изменяющих параметр,— связано исключительно с асимметрией возбуждаемого колебания, т. е. с наличием «постоянной» составляющей в решении для заряда (или смещения в механической системе). Величина этой составляющей пропорциональна глубине модуляции параметра и имеет тот же порядок величины, что и $m$.

4. В заключение следует сделать некоторые выводы.

В работе показана возможность применения метода медленно меняющихся амплитуд к расчету параметрического возбуждения колебаний с частотой изменения параметра.

Показано, что в этом случае вложение энергии в колебательную систему за счет работы сил, изменяющих параметр, имеет место лишь благодаря несимметрии возбуждаемых колебаний. Эта несимметрия может быть учтена в методе медленно меняющихся амплитуд посредством добавления в отыскиваемое решение не осциллирующего члена, имеющего тот же порядок малости, что и коэффициент глубины модуляции параметра.

В работе показано, что связь величины этого члена с амплитудой рассматриваемых колебаний может быть определена из очевидного условия равенства нулю среднего за период колебания значения напряжения на конденсаторе, емкость которого периодически изменяется.

Расчет параметрического возбуждения электрических колебаний с частотой, совпадающей с частотой изменения емкости, проведенный указанным путем, позволил получить условия возбуждения и выражение для ширины области возбуждения. Ширина этой области для случая отсутствия затухания оказалась совпадающей со значением, полученным при вычислении ширины второй области нестабильности уравнения Матьё с точностью до высших степеней коэффициента глубины модуляции параметра. Границы этой области, полученные методом медленно меняющихся амплитуд с указанной модификацией, оказались несколько смещенными по сравнению со значениями, полученными при общем анализе особенностей решения уравнения Матьё.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Леонтович М. А. ЖРФХО, 59, вып. 5—6, 429, 1927; А. А. Андронов. Сб. трудов. Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 19.
2. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. ЖТФ, 4, 5, 1934.
3. Гуляев В. П., Мигулин В. В. ЖТФ, 4, 48, 1934.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГТТИ, М., 1956, гл. V.

Поступила в редакцию
14. 4 1962 г.

Кафедра
теории колебаний