Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1963

ФИЗИКА

Ю. Н. ДНЕСТРОВСКИЙ, Д. П. КОСТОМАРОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ПЛАЗМОЙ

Рассматриваются электромагнитные волны в полупространстве с магнитоактивной плазмой, распространяющиеся поперек внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$. Показывается, что поле вдали от границы плазмы имеет вид плоской волны, постоянная распространения которой определяется дисперсионным уравнением для неограниченной плазмы. Исследуется поведение решения при $T \to 0$.

Рассмотрим плазму, заполняющую полупространство $x > 0$ и находящуюся в однородном стационарном внешнем магнитном поле $\vec{H}_0$, параллельном оси z $(\vec{H}_0 = (0, 0\ H_0))$. Пусть на границе плазмы в плоскости $x = 0$ заданы тангенциальные составляющие электрического поля

$$E_y|_{x=0} = E_y(0)\, e^{-i\omega t}, \quad E_z|_{x=0} = E_z(0)\, e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

Требуется определить электромагнитное поле в плазме, имеющее при $x \to \infty$ характер уходящей волны. Если $E_y(0) = 0$, то мы приходим к задаче, рассмотренной в работе [1].

Для решения задачи мы используем линеаризованное кинетическое уравнение для электронов и систему уравнений Максвелла. Влияние волнового магнитного поля на электроны не учитывается. Как и в работе [1], для описания границы плазмы используется модель, основанная на следующих предпосылках:

1) в области $x < 0$ электроны отсутствуют; 2) электроны удерживаются в области $x > 0$ магнитным полем $\vec{H}_0$; 3) вдали от границы плазмы невозмущенная функция распределения становится максвелловской

$$\lim_{x\to\infty} f_0 = N\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2T}\right),$$

где N — плотность электронов, T — температура электронов в энергетических единицах.

Сведение задачи к системе интегро-дифференциальных уравнений

Введем обозначения: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4\pi N e^2}{m}}$ — плазменная частота, $\omega_H = \dfrac{eH_0}{mc}$ — ларморовская частота, $x_0 = \sqrt{\dfrac{2T}{m}}\dfrac{1}{\omega_H}$ — средний ларморовский радиус, $\mu_0 = \dfrac{2T}{mc^2}\dfrac{\omega_0^2}{\omega_H^2} = \dfrac{NT}{\dfrac{1}{8\pi}H_0^2}$ — отношение давления плазмы к магнитному давлению. В безразмерных переменных ξ, β, γ и δ:

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad v_x = \sqrt{\frac{2T}{m}}\,\beta\cos\delta, \quad v_y = \sqrt{\frac{2T}{m}}\,\beta\sin\delta, \quad v_z = \sqrt{\frac{2T}{m}}\,\gamma; \tag{2}$$

исходная система уравнений, описывающая распространение волн рассматриваемого типа в плазме, имеет вид

$$-i\frac{\omega}{\omega_H} f + \beta\cos\delta\frac{\partial f}{\partial\xi} - \frac{\partial f}{\partial\delta} = -\frac{e}{m\omega_H}\left(\frac{m}{2T}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{\partial f_0}{\partial\beta_x}E_x + \frac{\partial f_0}{\partial\beta_y}E_y + \frac{\partial f_0}{\partial\gamma}E_z\right), \tag{3}$$

$$\frac{dE_x}{d\xi} = 4\pi x_0 e\left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^\infty \beta\,d\beta\int\limits_0^{2\pi} d\delta\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,d\gamma, \tag{4}$$

$$\frac{d^2E_y}{d\xi^2} + k^2x_0^2E_y = -i\frac{4\pi e}{\omega}k^2x_0^2\left(\frac{2T}{m}\right)^2\int\limits_0^{2\pi}\sin\delta\,d\delta\int\limits_0^\infty\beta^2\,d\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,d\gamma, \tag{5}$$

$$\frac{d^2E_z}{d\xi^2} + k^2x_0^2E_z = -i\frac{4\pi e}{\omega}k^2x_0^2\left(\frac{2T}{m}\right)^2\int\limits_0^{2\pi} d\delta\int\limits_0^\infty\beta\,d\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\gamma\,d\gamma. \tag{6}$$

Здесь $f_0 = f_0(\xi, \beta, \gamma, \delta)$ — невозмущенная функция распределения, удовлетворяющая уравнению

$$\beta\cos\delta\frac{\partial f_0}{\partial\xi} - \frac{\partial f_0}{\partial\delta} = 0, \tag{7}$$

$f = f(\xi, \beta, \gamma, \delta)$ — малое возмущение, вызванное электромагнитной волной. Множитель $e^{-i\omega t}$ у f и $\vec{E}$ опущен.

Пусть [1]

$$f_0 = N\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-(\beta^2+\gamma^2)}\eta(\xi + \beta(\sin\delta - 1)), \tag{8}$$

где $\eta(\xi)$ — ступенчатая функция; $\eta(\xi) = 1$ при $\xi > 0$, $\eta(\xi) = 0$ при $\xi < 0$. Функция (8) удовлетворяет уравнению (7) и поставленным выше условиям удержания электронов в полупространстве $x > 0$. Ее линия разрыва $\xi = \beta(1 - \sin\delta)$ является характеристикой уравнения (7). При указанном выше выборе невозмущенной функции распределения в плазме течет стационарный ток в направлении оси y

$$j_y(\xi) = \frac{1}{\pi} N_e \sqrt{\frac{2T}{m}} \int_0^{2\pi} \sin\delta\, d\delta \int_0^{\frac{\xi}{1-\sin\delta}} e^{-\beta^2}\beta^2\, d\beta,$$

причем $\lim\limits_{\xi\to\infty} j_y(\xi) = 0$. Этот ток создает добавочное стационарное неоднородное магнитное поле, параллельное оси z, которое экспоненциально стремится к нулю на бесконечности. Давление этого поля должно компенсировать уменьшение давления плазмы при приближении к ее границе. Мы не будем принимать во внимание неоднородность магнитного поля. Такое приближение справедливо, если $\mu_0 \ll 1$ [1].

Рассмотрим уравнение (3). Легко построить решение этого уравнения, периодическое по δ, с периодом 2π. Такое решение является единственным и имеет следующий вид:

$$f = \frac{i}{2\pi^{\frac{3}{2}} \sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi} \cdot \frac{N_e}{m\omega_H}\left(\frac{m}{2T}\right)^2 \int_{\delta-2\pi}^{\delta} \{q_1(\xi, \beta, \alpha, \delta) E_x(\xi') +$$

$$+ q_2(\xi, \beta, \alpha, \delta) E_y(\xi') + q_3(\xi, \beta, \alpha, \delta) E_z(\xi')\} e^{-\gamma^2} d\alpha,$$

где

$$\xi' = \xi + \beta(\sin\delta - \sin\alpha),$$

$$q_1 = \exp\left[-\beta^2 + i\frac{\omega}{\omega_H}(\alpha - \delta + \pi)\right][2\beta\eta(\xi + \beta(\sin\delta - 1)) +$$

$$+ \eta'(\xi + \beta(\sin\delta - 1))]\cos\alpha,$$

$$q_2 = \exp\left[-\beta^2 + i\frac{\omega}{\omega_H}(\alpha - \delta + \pi)\right][2\beta\eta(\xi + \beta(\sin\delta - 1))\sin\alpha +$$

$$+ \eta'(\xi + \beta(\sin\delta - 1)(\sin\alpha - 1))],$$

$$q_3 = \exp\left[-\beta^2 + i\frac{\omega}{\omega_H}(\alpha - \delta + \pi)\right] 2\eta(\xi + \beta(\sin - 1))$$

(производная от функции η есть δ-функция).

Подставляя (9) в (4) — (6) и проводя интегрирование по γ, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно компонентов электрического поля

$$\frac{dE_x}{d\xi} = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \cdot \frac{i}{2\pi\sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi} \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \int_0^{\infty} \{q_1 E_x(\xi') + q_2 E_y(\xi')\}\beta\, d\beta, \quad (10)$$

$$\frac{d^2E_y}{d\xi^2} + k^2x_0^2E_y = \mu_0 \frac{\frac{\omega}{\omega_H}}{2\pi\sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi} \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \int_0^{\infty} \{q_1 E_x(\xi') +$$

$$+ q_2 E_y(\xi')\} \sin\delta\beta^2\, d\beta, \quad (11)$$

$$\frac{d^2E_z}{d\xi^2} + k^2x_0^2E_z = \mu_0 \frac{\frac{\omega}{\omega_H}}{2\pi\sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi} \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \int_0^{\infty} q_3 E_z(\xi')\beta\, d\beta. \quad (12)$$

Как и в случае плоских волн, в однородной неограниченной плазме система уравнений (10) — (12) распадается. Уравнение (12) описывает чисто поперечную волну, поляризованную вдоль магнитного поля H_0. Система уравнений (10), (11) описывает волну с электрическим вектором, перпендикулярным магнитному полю H_0. Эта волна имеет как поперечный, так и продольный компонент электрического поля. Волны первого типа были исследованы нами раньше [1], теперь мы рассмотрим волны второго типа. Задача состоит в отыскании решения системы уравнений (10), (11), удовлетворяющего при $\xi = 0$ граничному условию

$$E_y|_{\xi=0} = E_y(0) \tag{13}$$

и ведущего себя при $\xi \to \infty$, как уходящая волна.

Исследование системы уравнений для электрического поля

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x\infty}(e^{ihx_0\xi} + u_1(\xi)), \\ E_y &= E_{y\infty}(e^{ihx_0\xi} + u_2(\xi)), \end{aligned} \tag{14}$$

где $u_1(\xi)$ и $u_2(\xi)$ — новые неизвестные функции, которые должны обращаться в нуль на бесконечности, а h, $E_{x\infty}$ и $E_{y\infty}$ — некоторые постоянные. Для их определения рассмотрим линейную алгебраическую систему уравнений

$$E_{x\infty} = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \cdot \frac{1}{hx_0\pi \sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi} \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \times$$

$$\times [E_{x\infty}\cos\alpha + E_{y\infty}\sin\alpha] \int_0^{\infty} \exp[z_1]\beta^2 d\beta,$$

$$(k^2 - h^2)x_0^2 E_{y\infty} = \frac{\mu_0\frac{\omega}{\omega_H}}{\pi \sin\frac{\omega}{\omega_H}\pi} \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha [E_{x\infty}\cos\alpha + E_{y\infty}\sin\alpha] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp[z_1] \sin\delta \beta^2 d\beta, \tag{15}$$

где

$$z_1 = -\beta^2 + i\frac{\omega}{\omega_H}(\alpha - \delta + \pi) + ihx_0\beta(\sin\delta - \sin\alpha).$$

Определитель этой системы является четной функцией h; $D = D(h^2)$, причем уравнение $D(h^2) = 0$ представляет собой дисперсионное уравнение для волн рассматриваемого типа в однородной неограниченной плазме. Возьмем в качестве h корень этого уравнения, соответствующий волне, которая распространяется в положительном направлении оси x, и определим из системы (15) отношение $\frac{E_{x\infty}}{E_{y\infty}}$. Значение каждой из этих постоянных в отдельности можно найти с помощью граничного условия (13):

$$E_{y\infty} = \frac{E_y(0)}{1 + u_2(0)}. \tag{16}$$

Подставляя (14) в уравнения (10), (11) и принимая во внимание (15), а также требование равенства нулю функций u_1 и $u_2(\xi)$ на бесконечности, получим для их определения систему интегральных уравнений

$$u_1(\xi) = -\frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \cdot \frac{i}{2\pi \sin \frac{\omega}{\omega_H} \pi} \int\limits_{\xi}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{2\pi} d\delta \int\limits_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{\infty} \left\{ q_1 u_1(s') + q_2 \frac{E_{y\infty}}{E_{x\infty}} u_2(s') \right\} \beta \, d\beta + W_1(\xi), \tag{17}$$

$$u_2(\xi) = \mu_0 \frac{\frac{\omega}{\omega_H}}{2\pi \sin \frac{\omega}{\omega_H} \pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin kx_0 (s-\xi)}{kx_0} ds, \tag{18}$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\delta \int\limits_{\delta-2\pi}^{\delta} \left\{ \frac{E_{x\infty}}{E_{y\infty}} q_1 u_1(s') + q_2 u_2(s') \right\} \sin \delta \beta^2 \, d\beta + W_2(\xi),$$

где

$$s' = s + \beta (\sin \delta - \sin \alpha),$$

$$W_1(\xi) = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \cdot \frac{i}{2\pi \sin \frac{\omega}{\omega_H} \pi} e^{ihx_0\xi} \int\limits_{0}^{2\pi} d\delta \int\limits_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \times$$

$$\times \int\limits_{\xi}^{\infty} \left\{ \exp[z_2] \frac{s}{(1-\sin\delta)^2} \left(\cos\alpha + \frac{E_{y\infty}}{E_{x\infty}} (\sin\alpha - 1) \right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{s}{1-\sin\delta}}^{\infty} \exp[z_1] \left(\cos\alpha + \frac{E_{y\infty}}{E_{x\infty}} \sin\alpha \right) 2\beta^2 \delta\beta \right\} ds, \tag{19}$$

$$W_2(\xi) = \frac{\mu_0 \frac{\omega}{\omega_H}}{2\pi \sin \frac{\omega}{\omega_H} \pi} e^{ihx_0\xi} \int\limits_{0}^{2\pi} d\delta \int\limits_{\delta-2\pi}^{\delta} d\alpha \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\sin kx_0(s-\xi)}{kx_0} \times$$

$$\times \left\{ \exp[z_2] \frac{s^2 \sin\delta}{(1-\sin\delta)^3} \left(\frac{E_{x\infty}}{E_{y\infty}} \cos\alpha + \sin\alpha - 1 \right) + \int\limits_{\frac{s}{1-\sin\delta}}^{\infty} \exp[z_1] \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sin\alpha + \frac{E_{x\infty}}{E_{y\infty}} \cos\alpha \right) \sin\delta \, 2\beta^3 \, d\beta \right\} ds, \tag{20}$$

$$z_2 = -\left(\frac{s}{1-\sin\delta} \right)^2 + i \frac{\omega}{\omega_H} (\alpha - \delta + \pi) + ihx_0 s \frac{\sin\delta - \sin\alpha}{1-\sin\delta}.$$

Функции W_1 и W_2 экспоненциально стремятся к нулю при $\xi \to \infty$.

Вернемся в формулах (14) к исходной независимой переменной x и обсудим структуру поля в плазме. При $x \to \infty$ оно ведет себя, как плоская волна, постоянная распространения которой h является корнем дисперсионного уравнения для неограниченной однородной плазмы. Функции $u_1\left(\frac{x}{x_0}\right)$ и $u_2\left(\frac{x}{x_0}\right)$, которые определяются системой интегральных уравнений (17), (18), описывают искажение поля у границы плазмы. Они заметно отличны от нуля в пограничной полосе ширины x_0, а при удалении от границы плазмы стремятся к нулю. Такой же особенностью обладало решение задачи для волны, поляризованной по полю H_0 [1]. Следует отметить, что учет неоднородности стационарного магнитного поля не изменяет этих особенностей решения; он только приводит к усложнению системы уравнений для функций u_1 и u_2.

Остановимся на поведении решения при $T \to 0\,(x_0 \to 0,\ \mu_0 \to 0)$. Из (18) и (20) видно, что $u_2 = 0\,(\mu_0)$. Следовательно, $E_y \to E_y(0)\,e^{ihx}$. Поведение продольного компонента более сложно. Функция u_1 не стремится к нулю при $T \to 0$. Однако если рассматривать $u_1\left(\frac{x}{x_0}\right)$ при фиксированном $x > 0$ и $x_0 \to 0$, то будем иметь $u_1\left(\frac{x}{x_0}\right) \to u_1(\infty) = 0$. С другой стороны, $u_1(0) \neq 0$, т. е. E_x при $T \to 0$ стремится к функции, имеющей разрыв при $x = 0$. Причина этого состоит в том, что волна при прохождении через неоднородную пограничную часть плазмы вызывает за счет этой неоднородности появление дополнительного пространственного заряда. Этот заряд в основном сосредоточен в слое шириной x_0, причем при $T \to 0$ толщина этого слоя стремится к нулю. Таким образом, при $T \to 0$ появляется поверхностный заряд, который и приводит к разрыву нормальной составляющей электрического поля.

В заключение кратко остановимся на задаче с граничным условием более общего вида:

$$E_y|_{x=0} = E_y(0)\,e^{ih_y y}\,. \tag{21}$$

Ее решение запишется следующим сбразом:

$$E_x(x, y) = E_{x\infty}\left[e^{i(h_x x + h_y y)} + e^{ih_y y}\,u_1\left(\frac{x}{x_0}\right)\right., \tag{22}$$

$$E_y(x, y) = E_{y\infty}\left[e^{i(h_x x + h_y y)} + e^{ih_y y}\,u_2\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]. \tag{23}$$

Здесь $h_x = \sqrt{h^2 - h_y^2}$, где h — корень дисперсионного уравнения, u_1 и u_2 — функции, описывающие искажение поля у границы. Они определяются системой интегральных уравнений, аналогичных (17), (18). Направление распространения волны (22), (23) по-прежнему перпендикулярно магнитному полю, поэтому для данного случая сохраняются все особенности решения задачи с граничным условием (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. ЖЭТФ 39, № 9, 845, 1960.

Поступила в редакцию
22. 1 1961 г.

Кафедра
математики