ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1963

В. Л. ПАНТЕЛЕЕВ

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Задача об определении решения линейных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися параметрами сводится к отысканию возмущенной частоты колебания системы, близкой к частоте собственных колебаний, методом итераций. В качестве примера рассматривается движение маятника на вертикально колеблющейся опоре.

При решении некоторых задач в теории определения силы тяжести на море часто приходится сталкиваться с линейными или близкими к линейным дифференциальными уравнениями, которые имеют медленно изменяющиеся параметры. Так, уравнение движения маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания, имеет вид

$$\ddot{\theta} + n^2\left(1 + \frac{\ddot{z}}{g}\right)\theta = 0, \tag{1}$$

где θ — угол отклонения маятника от положения равновесия, n — частота собственных колебаний, $\ddot{z}$ — вертикальное ускорение точки подвеса маятника, g — ускорение силы тяжести. Малые члены порядка θ^2 в данном случае опущены и силы трения в расчет не приняты.

В дальнейшем условимся называть функцию $f(t)$ медленной по отношению к функции $\varphi(t)$, если выполняется неравенство

$$\frac{\left|\dfrac{d^{k-1}f}{dt^{k-1}}\right|_{\max}}{\left|\dfrac{d^{k-1}\varphi}{dt^{k-1}}\right|_{\max}} > \frac{\left|\dfrac{d^{k}f}{dt^{k}}\right|_{\max}}{\left|\dfrac{d^{k}\varphi}{dt^{k}}\right|_{\max}}$$

для любого k. Нетрудно показать, что возмущающая функция $\dfrac{\ddot{z}}{g}$ будет медленной по отношению к собственным колебаниям маятника

$$\theta = \theta_0 \cos(nt + \varphi_0),$$

если она выражает некоторый случайный процесс с энергетическим спектром, равным нулю для всех частот, больших собственной частоты колебания маятника.

Рассмотрим уравнение более общего типа

$$\ddot{\theta} + 2\varepsilon\dot{\theta} + n^2\theta = 0, \tag{2}$$

где ε и n^2 — медленные функции времени. Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\theta = A \exp\left\{-\int_0^t h\,dt\right\} \cos\left\{\int_0^t p\,dt + \varphi_0\right\}, \tag{3}$$

где A и φ_0 — постоянные интегрирования, а h и p — неизвестные функции времени. С учетом (3) вычислим следующий трехчлен:

$$\ddot{\theta} + 2h\dot{\theta} + p^2\theta = \frac{\dot{p}}{p}(\dot{\theta} + h\theta) - (\dot{h} + h^2)\theta.$$

Перенесем правую часть полученного выражения в левую, получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\theta} + \left(2h - \frac{\dot{p}}{p}\right)\dot{\theta} + \left(p^2 + h^2 + \dot{h} - h\frac{\dot{p}}{p}\right)\theta = 0,$$

которому, так же как и уравнению (2), удовлетворяет решение (3). Отсюда делаем вывод, что эти уравнения тождественны, и для определения неизвестных h и p получаем уравнения

$$2\varepsilon = 2h - \frac{\dot{p}}{p}, \tag{4}$$

$$n^2 = p^2 + h^2 + \dot{h} - h\frac{\dot{p}}{p}. \tag{5}$$

Из уравнения (4) определяем h

$$h = \varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\dot{p}}{p}. \tag{6}$$

Интегрируя, находим

$$\int_0^t h\,dt = \int_0^t \varepsilon\,dt + \ln C\sqrt{p}. \tag{7}$$

Постоянную интегрирования получим из начальных условий

$$p(0) = p_0, \ \ln C\sqrt{p_0} = 0, \ C = \frac{1}{\sqrt{p_0}}. \tag{8}$$

С помощью (7) и (8) исключим h из выражения (3)

$$\theta = A\sqrt{\frac{p_0}{p}} \exp\left\{-\int_0^t \varepsilon\,dt\right\} \cos\left\{\int_0^t p\,dt + \varphi_0\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, решение уравнения (2) будет найдено, если каким-либо способом сумеем найти возмущенную частоту p.

Для получения уравнения, определяющего p, исключим h с помощью (6) из уравнения (5)

$$p^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\ddot{p}}{p} = n^2 - \varepsilon^2 - \dot{\varepsilon}. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$q = p^2, F(t) = n^2 - \varepsilon^2 - \dot{\varepsilon}. \tag{11}$$

Теперь уравнение (10) принимает вид

$$q - \frac{5}{16}\left(\frac{\dot{q}}{q}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\ddot{q}}{q} = F(t). \tag{12}$$

Уравнение (10) можно представить и в другом виде. Введем новую переменную

$$\xi = \frac{1}{4}\ln\frac{q}{B}, \tag{13}$$

где B — постоянная величина. Подставляя (13) в (12), получим

$$\ddot{\xi} - \dot{\xi}^2 + Be^{4\xi} = F(t).$$

Учитывая, что $F(t)$ — медленная функция, для решения уравнения (12) можно воспользоваться методом итераций. Пусть индекс при квадрате возмущенной частоты q обозначает номер итерации. Тогда в первом приближении, отбрасывая малые члены уравнения (12), содержащие производные функции $F(t)$, будем иметь

$$q_1 = F(t).$$

При $\varepsilon = 0$ это решение эквивалентно асимптотическому решению по методу Джеффриса [3], который широко применяется в теории определения силы тяжести на море маятниковым способом [2].

Во втором приближении получаем

$$q_2 = F(t) + \frac{5}{16}\left[\frac{\dot{F}(t)}{F(t)}\right]^2 - \frac{1}{4}\frac{\ddot{F}(t)}{F(t)}. \tag{14}$$

Каждое новое приближение можно получить из рекуррентного соотношения

$$q_i = F(t) + \frac{5}{16}\left(\frac{\dot{q}_{i-1}}{q_{i-1}}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\ddot{q}_{i-1}}{q_{i-1}}.$$

Нужно отметить, что, вообще говоря, этот процесс последовательных приближений может и не сходиться, так как искомая функция q не является в строгом смысле медленной функцией времени. Это видно уже из выражения для второго приближения q_2, которое представляет собой нелинейное дифференциальное преобразование функции $F(t)$, содержащее гармоники какого угодно высокого порядка. Для определения q с достаточной степенью точности приходится накладывать ограничения не только на спектр возмущающей функции $F(t)$, но и на ее амплитуду. Ошибка в определении q приводит к тому, что отличие приближенного решения от точного возрастает с течением времени. Это обстоятельство не позволяет построить решение для неограниченно большого интервала времени. Однако на практике этот интервал времени всегда ограничен и определяется условиями конкретно поставленной задачи. Определение радиуса сходимости последовательных итераций — довольно трудное теоретическое исследование и выходит за рамки поставленных автором настоящей статьи задач.

В качестве примера найдем решение уравнения (1).

Согласно (11) имеем

$$F(t) = n^2\left(1 + \frac{\ddot{z}}{g}\right).$$

По формуле (14) находим второе приближение квадрата «возмущенной частоты»

$$q = n^2\left(1 + \frac{\ddot{z}}{g}\right) + \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{(g+\ddot{z})^2}\left(\frac{d\ddot{z}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(g+\ddot{z})}\frac{d^2\ddot{z}}{dt^2}.$$

Пренебрегая малыми порядка $\frac{\ddot{z}^3}{g}$, получим «частоту» возмущенного движения маятника

$$p = n\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\ddot{z}}{g} - \frac{1}{8gn^2}\frac{d^2\ddot{z}}{dt^2} - \frac{1}{8}\frac{\ddot{z}^2}{g^2} + \frac{3}{16}\cdot\frac{\ddot{z}}{n^2g^2}\frac{d^2\ddot{z}}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{32}\cdot\frac{1}{n^2g^2}\left(\frac{d\ddot{z}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{128n^4g^2}\left(\frac{d^2\ddot{z}}{dt^2}\right)^2\right].$$

Решение в окончательном виде получим, если подставим найденное значение возмущенной частоты в формулу (9). После небольших преобразований получим

$$\theta = a\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\ddot{z}}{g} + \ldots\right)\cos\left[\bar{p}t + \varphi_0 + \psi(t)\right],$$

где a и φ_0 — постоянные интегрирования, $\psi(t)$ — медленные флуктуации фазы возмущенного движения маятника

$$\psi(t) = \int_0^t (p - \bar{p})\, ht,$$

а $\bar{p}$ — среднее значение возмущенной частоты

$$\bar{p} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p\,dt = n\left[1 - \frac{1}{8}\frac{\overline{\ddot{z}^2}}{g^2} - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{n^2g^2}\overline{\left(\frac{d\ddot{z}}{dt}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{128}\cdot\frac{1}{n^4g^2}\overline{\left(\frac{d^2\ddot{z}}{dt^2}\right)^2}\right].$$

В ряде случаев в задачах морской гравиметрии приходится иметь дело с уравнениями, которые не относятся к типу линейных уравнений с медленно изменяющимися параметрами, но которые могут быть сведены к такому типу. Например, пусть $\ddot{z}$ в уравнении (1) имеет вид

$$\ddot{z} = \ddot{z}_0\cos\omega t,$$

причем $\omega \approx 2n$.

Уравнение (1) можно свести к уравнению с медленно изменяющимися параметрами с помощью очевидных преобразований:

$$\theta = a\cos\varphi,$$

$$\ddot{z}\theta = \ddot{z}_0 [\cos(\omega t - 2\varphi)\cos 2\varphi - \sin(\omega t - 2\varphi)\sin 2\varphi]\, a\cos\varphi =$$

$$= \frac{a\ddot{z}_0}{2}\Big\{\cos(\omega t - 2\varphi)\cos\varphi - \sin(\omega t - 2\varphi)\sin\varphi +$$

$$+ \cos(\omega t - 2\varphi)\cos 3\varphi - \sin(\omega t - 2\varphi)\sin 3\varphi\Big\} = \frac{\ddot{z}_0}{2}\Big[\cos(\omega t - 2\varphi)\,\theta -$$

$$- \left(\frac{\dot{a}}{a\dot{\varphi}}\theta - \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\dot{\theta}\right)\sin(\omega t - 2\varphi)\Big] +$$

$$+ \frac{a\ddot{z}_0}{2}\Big[\cos(\omega t - 2\varphi)\cos 3\varphi - \sin(\omega t - 2\varphi)\sin 3\varphi\Big].$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$\ddot{\theta} + \frac{n^2}{\dot{\varphi}}\frac{\ddot{z}_0}{2g}\sin(\omega t - 2\varphi)\,\dot{\theta} + n^2\Big\{1 + \frac{\ddot{z}_0}{2g}\Big[\cos(\omega t - 2\varphi) -$$

$$- \frac{\dot{a}}{a\dot{\varphi}}\sin(\omega t - 2\varphi)\Big]\Big\}\theta = n^2\frac{a\ddot{z}_0}{2g}[\cos(\omega t - 2\varphi)\cos 3\varphi - \sin(\omega t - 2\varphi)\sin 3\varphi]. \qquad (15)$$

Левая часть полученного уравнения имеет коэффициенты, которые являются медленно изменяющимися функциями. Конечно, эти коэффициенты, строго говоря, нельзя считать известными, так как они содержат неизвестную функцию φ. Однако при условии, что $\frac{\ddot{z}_0}{g}$ малая величина, в первом приближении фазу можно считать известной и равной $nt+\varphi_0$, уточняя ее с каждым новым приближением.

Правая часть уравнения (15) содержит гармоники с частотой, близкой к $3n$, и создает обертоны с малой амплитудой порядка $\frac{a\ddot{z}_0}{2g}\frac{n^2}{9n^2 - n^2} = \frac{1}{16}\frac{a\ddot{z}_0}{g}$, которыми в большинстве случаев можно пренебречь.

Изложенный метод построения решения в случае малых колебаний значительно эффективнее, чем метод Боголюбова — Митропольского [1], особенно если основной нашей задачей является определение среднего значения возмущенной частоты колебания маятника. Так, чтобы получить первое приближение, достаточно коэффициент при θ приравнять квадрату возмущенной частоты и воспользоваться формулой (9). Второе приближение эквивалентно первым трем приближениям в методе Боголюбова — Митропольского, но требует значительно меньшего количества преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.

2. Жонголович И. Д. Определение силы тяжести при помощи маятника на колеблющейся подставке, ч. 1. Основные формулы. Записки по гидрографии. Приложение № 2, 1941.

3. Jeffreys H. Proc. Lond. Math. Soc., **23**, 2, 1923.

Поступила в редакцию
2. 4 1962 г.

Кафедра
небесной механики и
гравиметрии