

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1963

В. Г. ДМИТРИЕВ

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ЛИНИЯХ

Теоретически исследован процесс генерации 2-й гармоники в нелинейной линии с кубической реактивной нелинейностью. Средние реактивные параметры такой линии зависят от амплитуды распространяющейся волны. Полученные результаты сравниваются с результатами для линии с квадратичной реактивной нелинейностью. Обсуждаются некоторые возможности наблюдения исследуемых эффектов в нелинейной оптике.

### Введение

В последнее время проявляется все возрастающий интерес к проблеме распространения волн в нелинейных диспергирующих линиях. Особое внимание уделяется указанной проблеме в связи с развитием нелинейной оптики (генерация оптических гармоник, параметрическое усиление света и т. п.). Оптическим нелинейным явлениям посвящен целый ряд работ (например [1, 2]), носящих в основном экспериментальный характер. Теоретическое исследование нелинейных явлений в оптике представляется затруднительным в связи с анизотропией нелинейных сред и объемным характером взаимодействия волн в среде. Тем не менее многие качественные особенности рассматриваемых явлений могут быть выяснены на основе исследования процесса распространения волн в одномерной нелинейной линии передачи. Такое исследование подробно выполнено в работах Р. В. Хохлова [3, 4], где рассматривается линия с квадратичной нелинейностью распределенного заряда

$$Q = C_0(v + \eta v^2), \quad (1)$$

где  $v$  — напряжение на распределенной емкости  $C_0$ .

Исследование выполнено для двух предельных случаев: отсутствия дисперсии [3] и сильнодиспергирующей линии [4]. В первом случае форма распространяющегося сигнала с расстоянием искажается и приобретает вид ударной волны, во втором имеет место взаимодействие только основной и второй гармонических составляющих.

Определенный интерес представляет учет более высоких степеней в разложении  $Q(v)$  и в связи с этим исследование нелинейных явлений в линии с кубической нелинейностью:

$$Q = C_0(v + \eta_1 v^2 + \eta_2 v^3), \quad (2)$$

Исследование нелинейных явлений в средах с нелинейностью вида (2) имеет значение и для нелинейной оптики. Действительно, экспериментальные данные по генерации 3-й гармоники в кальците [2] свидетельствуют о наличии кубической нелинейности в оптических средах.

Настоящая работа посвящена анализу процесса распространения волн основной и второй гармонических составляющих в линии с кубической нелинейностью в форме (2) и сравнению полученных результатов с результатами для линии с квадратичной нелинейностью. Отметим, что если квадратичные члены в разложении (2) характеризуют изменение реактивных параметров линии во времени, то кубичный член характеризует изменение средних значений реактивных параметров линии.

### § 1. Основные уравнения

Запишем уравнение нелинейной линии передачи в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - L \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - LG \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

где  $Q$  — распределенный заряд в линии, зависящий от напряжения  $v$  в форме (2),  $z$  — расстояние вдоль системы,  $t$  — время,  $L$  и  $G$  соответственно распределенные индуктивность и проводимость линии.

Ищем решение уравнения (3) в виде суперпозиции основной и второй гармонических составляющих

$$v = V_1(\mu z) \cos(\omega t - \beta_1 z + \varphi_1(\mu z)) + V_2(\mu z) \cos(2\omega t - \beta_2 z + \varphi_2(\mu z)), \quad (4)$$

где  $V_{1,2}$  и  $\varphi_{1,2}$  — амплитуды и фазы волн, медленно меняющиеся с расстоянием  $z$  (параметр  $\mu$  характеризует медленность этого изменения),  $\beta_{1,2}$  — постоянные распространения на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ .

Укороченные уравнения для амплитуд и фаз имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dz} + \sigma_1 V_1 V_2 \sin \Psi + \delta_1 V_1 &= 0, \\ \frac{dV_2}{dz} - \sigma_2 V_1^2 \sin \Psi + \delta_2 V_2 &= 0, \\ 2 \frac{d\varphi_1}{dz} + \Delta + 2\sigma_1 V_2 \cos \Psi + \gamma_1 V_1^2 + 2\gamma_2 V_2^2 &= 0, \\ \frac{d\varphi_2}{dz} + \sigma_2 \frac{V_1^2}{V_2} \cos \Psi + 2\gamma_2 V_1^2 + \gamma_3 V_2^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Psi$  — разность фаз:

$$\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2, \quad (6)$$

параметр  $\Delta$  характеризует рассогласование распространяющихся волн по фазовым скоростям:

$$\Delta = 2\omega \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right), \quad (7)$$

параметры

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \eta_1 \beta_1; \quad \sigma_2 = \frac{1}{4} \eta_1 \beta_2 \quad (8)$$

характеризуют глубину модуляции реактивных параметров линии, а параметры

$$\gamma_1 = \frac{3}{4} \eta_2 \beta_1; \quad \gamma_2 = \frac{3}{8} \eta_2 \beta_2 \quad (9)$$

изменение средних реактивных параметров линии при распространении волн конечной амплитуды;

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2} (LGu)_{1,2} \quad (10)$$

суть коэффициенты затухания на частотах соответственно  $\omega$  и  $2\omega$ .

Вычитая в (5) одно из фазовых уравнений из другого, получим уравнение для фазы

$$\frac{d\Psi}{dz} + \Delta + \left( 2\sigma_1 V_2 - \sigma_2 \frac{V_1^2}{V_2} \right) \cos \Psi + (\gamma_1 - 2\gamma_2) V_1^2 + (2\gamma_1 - \gamma_2) V_2^2 = 0. \quad (11)$$

Система уравнений (5) и (11) не может быть решена аналитически в общем случае; процесс взаимодействия волн может быть рассмотрен с помощью численного интегрирования. Однако в случае отсутствия затухания система (5) позволяет аналитически найти уравнение семейства фазовых траекторий на плоскости переменных  $V, \cos \psi$ , что в свою очередь дает фазовую картину системы без затухания. В дальнейшем везде рассматривается именно этот случай.

## § 2. Качественный анализ уравнения семейства фазовых траекторий

В случае отсутствия затухания ( $\delta_i = 0$ ) система уравнений (5) и (11) допускает первый интеграл, имеющий смысл закона сохранения энергии:

$$\sigma_2 V_1^2 + \sigma_1 V_2^2 = \sigma_2 V_1^2(0) + \sigma_1 V_2^2(0) = \sigma_1 V_0^2, \quad (12)$$

где  $V_{1,2}(0)$  — входные значения величин  $V_{1,2}$ .

Поделив второе уравнение в (5) на (11) с учетом (12), получим уравнение, описывающее поведение интегральных кривых на плоскости переменных  $\psi, V_2$ :

$$-\frac{d\Psi}{dV_2} = \frac{\Delta - \varepsilon V_0^2 + \rho V_2^2 + \sigma_1 \frac{3V_2^2 - V_0^2}{V_2} \cos \Psi}{\sigma_1 (V_0^2 - V_2^2) \sin \Psi}, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (2\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (2\gamma_2 - \gamma_1) + (2\gamma_1 - \gamma_2). \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (13) относительно  $\cos \Psi$ , имеем

$$\cos \Psi = \frac{\frac{\Delta - \varepsilon V_0^2}{2\sigma_1 V_0} r^2 + \frac{\rho V_0^2}{4\sigma_1 V_0} r^4 + C}{r(1 - r^2)}, \quad (15)$$

где  $r = \frac{V_2}{V_0}$  — приведенная амплитуда второй гармоники,  $C$  — постоянная интегрирования, характеризующая амплитуду  $r$  и фазу  $\Psi$  на входе линии.

Заметим, что вследствие слабой дисперсионности линии в области частот от нуля до  $2\omega$ , в выражениях (13) — (15) без ограничения общности можно положить  $\sigma_1 \approx \sigma_2 = \sigma$ ,  $\gamma_1 \approx \gamma_2 = \gamma$ . Тогда уравнение (15) примет вид

$$\cos \Psi = \frac{\Delta}{2\sigma V_0} r^2 - \frac{\gamma V_0^2}{2\sigma V_0} r^2 (1 - r^2) + C}{r(1 - r^2)} \quad (16)$$

Как легко видеть из (16), поведение фазовых траекторий определяется не самими параметрами расстройки и нелинейности, а их отношениями. Указанный факт позволяет построить семейство кривых (16), задавая

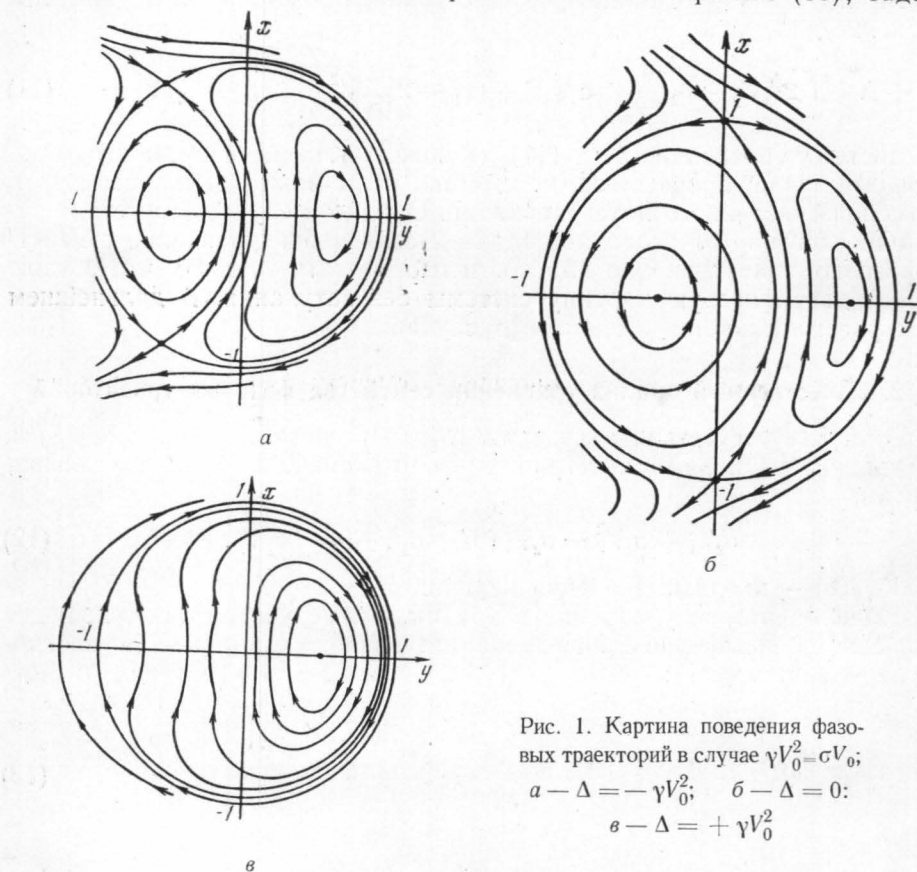


Рис. 1. Картина поведения фазовых траекторий в случае  $\gamma V_0^2 = \sigma V_0$ ;  
 а —  $\Delta = -\gamma V_0^2$ ; б —  $\Delta = 0$ ;  
 в —  $\Delta = +\gamma V_0^2$

амплитуду  $r$  на отрезке  $[0; 1]$  при различных отношениях параметров, входящих в (16)\*.

Однако более наглядным является использование плоскости полярных координат:

$$x = r \sin \Psi; \quad y = r \cos \Psi, \quad (17)$$

где фазовые траектории системы являются замкнутыми кривыми.

Переход к полярным координатам  $x, y$  непосредственно в выражении (16) нецелесообразен, так как в этом случае мы получим уравнение семейства траекторий, заданное в неявной форме. Построение

\* Построение должно выполняться, естественно, в квадрате  $-1 \leq \cos \Psi \leq +1$ ;  $0 \leq r \leq 1$ .

фазовой картины системы на плоскости  $(x, y)$  легко выполняется геометрическим перенесением фазовых кривых с плоскости  $\cos \psi, \tau$ .

На рисунках 1, 2, 3 представлена картина поведения фазовых траекторий системы для различных соотношений параметров  $\Delta, \sigma V_0$  и  $\gamma V_0^2$ . Отметим ее основные особенности.

Основной особенностью рассматриваемых кривых является более сложная, чем в случае  $\gamma = 0$ , форма сепаратрисы — интегральной кривой, проходящей через две особые точки типа седла. Следствием этого

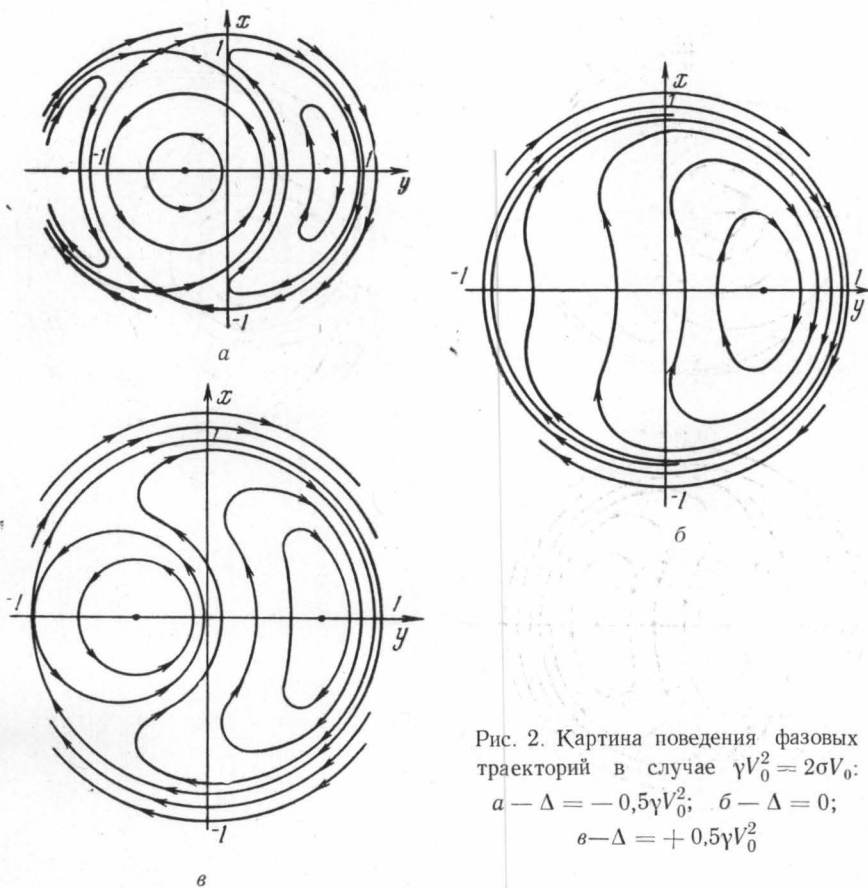


Рис. 2. Картина поведения фазовых траекторий в случае  $\gamma V_0^2 = 2\sigma V_0$ :  
 $a - \Delta = -0,5\gamma V_0^2$ ;  $б - \Delta = 0$ ;  
 $в - \Delta = +0,5\gamma V_0^2$

является значительно бóльшая «нелинейность» овалов, окружающих правый (синфазный) центр; при этом овалы, окружающие левый (антифазный) центр, становятся более «линейными», чем в случае  $\gamma = 0$ .

Интересно проследить за изменением характера фазовой плоскости в зависимости от расстройки  $\Delta$ . В случае  $\gamma = 0$  (см. [4]) вид фазовой плоскости для рассматриваемой системы можно охарактеризовать величиной  $|\Delta|$ . В случае же  $\gamma \neq 0$ , как видно из рисунков 1, 2, 3, приобретает значение и знак расстройки. Картина поведения фазовых траекторий для линии с нормальной дисперсией ( $\Delta > 0$ ) качественно отличается от таковой для линии с аномальной дисперсией ( $\Delta < 0$ ) при одном и том же значении  $|\Delta|$  (например, рис. 1, случаи  $\Delta = \gamma V_0^2$  и  $\Delta = -\gamma V_0^2$ ). Этот факт может быть объяснен тем, что входящие в фазовое уравнение (11) квадратичные члены (их можно назвать «нелинейной расстройкой» в отличие от «линейной») могут как компенсиро-



вать расстройку  $\Delta$ , так и увеличивать последнюю в зависимости от ее знака.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа двух практически интересных задач. Первой задачей является исследование параметрического усилителя бегущей волны; в этом случае волна частоты  $2\omega$  является накачкой, волна частоты  $\omega$  — сигналом, т. е. усилитель работает в вырожденном режиме. Во втором случае нелинейная линия используется для создания волноводного умножителя частоты; при этом на вход линии подается только волна частоты  $\omega$ .

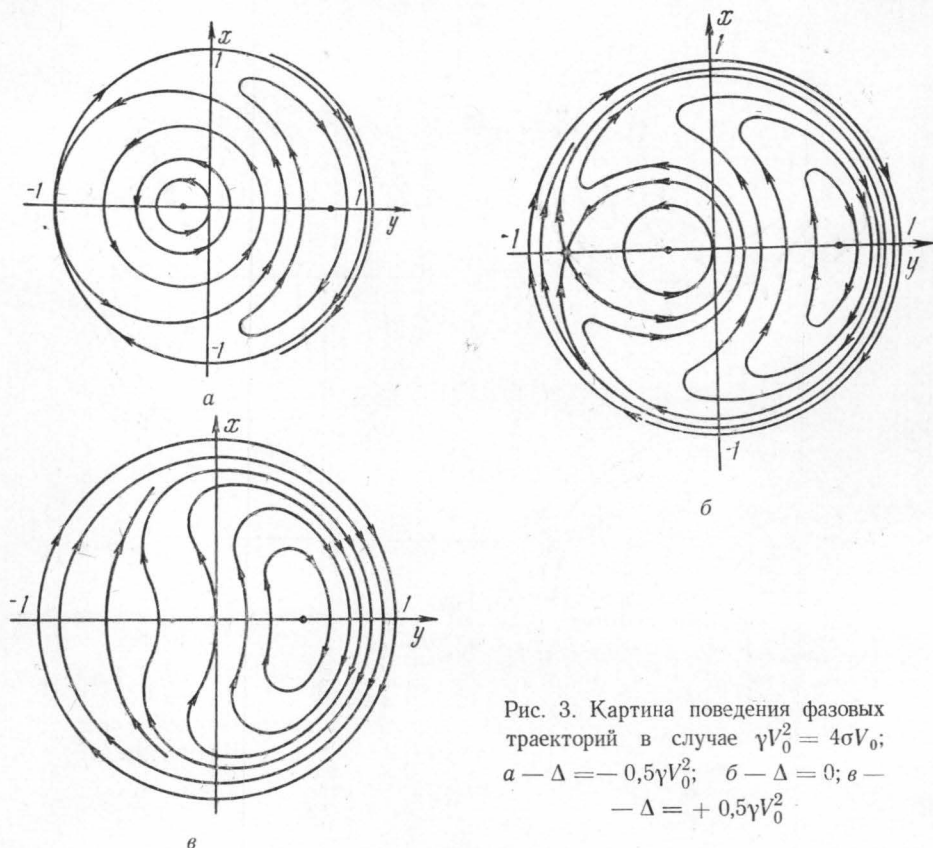


Рис. 3. Картина поведения фазовых траекторий в случае  $\gamma V_0^2 = 4\sigma V_0$ :  
 $a - \Delta = -0,5\gamma V_0^2$ ;  $b - \Delta = 0$ ;  $c - \Delta = +0,5\gamma V_0^2$

Рассмотрим случай умножения частоты. Вид фазовой траектории, изображающей движение в системе, характеризуется входными значениями амплитуд и фаз волн. В частности, при умножении частоты ( $V_2(0) = 0$ ) соответствующая фазовая траектория на плоскости переменных  $(\cos \psi, r)$  проходит через начало координат. Находя на этой траектории для каждого набора параметров  $\Delta$ ,  $\delta V_0$  и  $\gamma V_0^2$  максимальное значение приведенной амплитуды второй гармоники  $r_{\text{макс}}$ , легко построить зависимость величины  $r_{\text{макс}}^2$ , характеризующей эффективность умножения, от параметра  $\Delta/\sigma V_0$  при различных значениях  $\gamma V_0^2/\sigma V_0$  (рис. 4). Из рис. 4 видно, что для систем с нормальной дисперсией ( $\Delta > 0$ ) эффективность умножения в линии с кубической нелинейностью может быть существенно повышена по сравнению с таковой для линии с квадратичной нелинейностью. Однако в отсутствие расстройки ( $\Delta = 0$ ) наличие кубической нелинейности в линии может только ухудшить эффективность умножения.

Отметим, что на рис. 4 не указаны пространственные масштабы процессов; для получения максимальной эффективности умножения набег фазы  $\Psi$  на длине системы  $l$  должен составлять величину

$$|\Psi(l) - \Psi(0)| = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Точно так же можно построить кривые зависимости максимального коэффициента усиления системы от расстройки для параметрического усилителя бегущей волны. Следует отметить, что в этом случае оптимальная с точки зрения максимального усиления длина системы существенно определяется входными значениями амплитуд и фаз волн.

### § 3. Пространственные масштабы процессов в системе без затухания

Изучение масштабов процессов в системе без затухания требует аналитического решения уравнений (5), что в общем случае оказывается невозможным. Как и в [4], неэлементарные случаи, допускающие аналитическое решение, ограничиваются случаями движения по сепаратрисам и случаями малых колебаний амплитуд и фаз вблизи особых точек типа центр. В последнем случае, при линеаризации системы (5) вблизи этих точек мы отбрасываем нелинейные члены; получаемые при этом результаты полностью совпадают с результатами работы [4]. Мы рассмотрим движение системы по сепаратрисам.

Движение по ограничивающей окружности  $r \equiv 1$  или  $V_2 \equiv V_0$ ,  $V_1 \equiv 0$  описывается фазовым уравнением

$$\frac{d\Psi}{dz} + \Delta + \gamma V_0^2 + 2\sigma V_0 \cos \Psi = 0. \quad (19)$$

Согласно [4], это уравнение при

$$|\Delta + \gamma V_0^2| < 2\sigma V_0 \quad (20)$$

описывает процесс экспоненциального перехода из стационарной фазы

$$\Psi_{\text{стац}} = \arccos \frac{\Delta + \gamma V_0^2}{2\sigma V_0} \quad (21)$$

с положительным значением  $\sin \Psi_{\text{стац}}$  в стационарную фазу (21) с отрицательным значением  $\sin \Psi_{\text{стац}}$ . Этот переход в основном совершается на длине  $l_0$ , имеющей порядок

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{4\sigma V_0^2 - (\Delta + \gamma V_0^2)^2}} \quad (22)$$

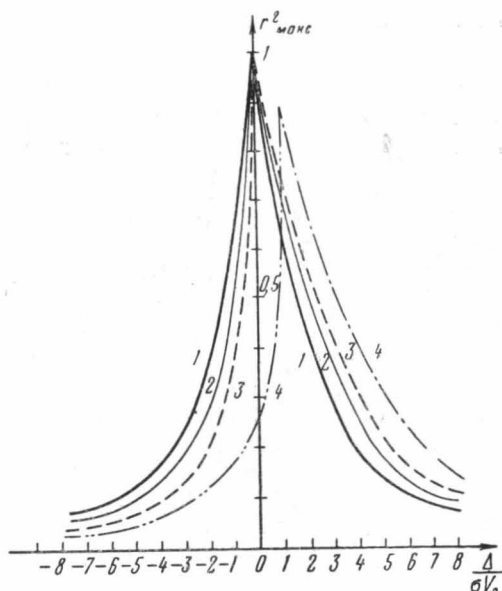


Рис. 4. Зависимость эффективности умножения частоты в нелинейной линии без потерь от параметра  $\frac{\Delta}{\sigma V_0}$ : 1 —  $\gamma = 0$ ; 2 —  $\gamma V_0^2 = \sigma V_0$ ; 3 —  $\gamma V_0^2 = 2\sigma V_0$ ; 4 —  $\gamma V_0^2 = 4\sigma V_0$

При выполнении условия

$$|\Delta + \gamma V_0^2| > 2\sigma V_0 \quad (23)$$

становится возможной реализация ограничивающей окружности, так как последняя в этом случае перестает быть сепаратрисой.

Другая часть сепаратрисы при выполнении условия (20) проходит внутри окружности  $r \equiv 1$ . Ее аналитическое определение в общем виде затруднительно. Поэтому рассмотрим случай отсутствия «линейной» расстройки ( $\Delta = 0$ ). В этом случае указанная ветвь сепаратрисы при выполнении условия

$$\gamma V_0^2 < 2\sigma V_0 \quad (24)$$

проходит через точку  $r = 0, \cos \psi = 0$ . Последнее обстоятельство позволяет положить в (16)  $C = 0$  и записать уравнение сепаратрисы в виде

$$V_2 = -\frac{2\sigma}{\gamma} \cos \Psi. \quad (25)$$

Подставляя (25) в уравнение (5) и исключая фазу  $\Psi$ , для  $V_2$  имеем уравнение

$$\frac{dV_2}{dz} = \frac{1}{2} (V_0^2 - V_2^2) (4\sigma^2 - \gamma V_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Решение (25) имеет вид

$$V_2 = 2\sigma V_0 \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} V_0 (4\sigma^2 - \gamma^2 V_0^2)^{\frac{1}{2}} (z - z_0) \right] \times \\ \times \left\{ 4\sigma^2 - \gamma^2 V_0^2 \operatorname{sch}^2 \left[ \frac{1}{2} V_0 (4\sigma^2 - \gamma^2 V_0^2)^{\frac{1}{2}} (z - z_0) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

где  $z_0$  — постоянная интегрирования. При  $\gamma = 0$  выражение (27) переходит в решение, полученное в [4] (для случая  $\Delta = 0$ ).

Из выражений (22) и (27) следует, что в системе с кубической нелинейностью период пространственных биений вблизи сепаратрисы несколько больше такового в линии с квадратичной нелинейностью. Вблизи центров период биений в первом приближении не зависит от параметра  $\gamma$ .

При использовании рассматриваемой линии в качестве усилителя бегущей волны следует учесть следующее обстоятельство. Из рисунков 1, 2, 3 следует, что коэффициент усиления и распределение амплитуды вдоль системы могут существенно определяться фазой на входе линии  $\Psi(0)$ . При движении представляющей точки вокруг антифазного (левого) центра распределение амплитуды по оси  $z$  носит почти синусоидальный характер. Овалы, окружающие синфазный (правый) центр, соответствуют распределению, значительно отличающемуся от синусоидального. Можно показать, что в последнем случае коэффициент усиления менее критичен к длине системы, чем в первом. Отметим, что указанные явления имеют место даже в случае  $\Delta = 0$  (см. рис. 2), в то время как в случае линии с квадратичной нелинейностью при  $\Delta = 0$  распределение амплитуды вдоль системы не зависит от входной фазы.

В заключение отметим, что аналогичный анализ может быть проделан и для случая  $\gamma < 0$ . Анализ взаимодействия волн в диссипативной системе может быть выполнен только методом численного интегрирования системы уравнений (5) и (11) ввиду отсутствия у этой системы интеграла энергии типа (12).



## СОДЕРЖАНИЕ

### *Физика*

Ф. А. Королев, С. М. Дьякова, В. И. Гриднев. Выделение излучений в далекой инфракрасной области по методу остаточных лучей . . . . .	3
В. И. Вышин. Интерпретация оптической активности теллура . . . . .	6
С. И. Грибкова, Л. С. Штеменко. Оценка членов второго порядка приближения в опытах по температурному скачку . . . . .	11
И. П. Базаров. К теории плавления . . . . .	18
Ю. М. Трифонов. О синхронизации генератора СВЧ, работающего на передающий тракт, содержащий отражающие неоднородности . . . . .	26
Н. Н. Колесников, Ю. П. Григорьев. К теории изотопических смещений . . . . .	32
В. В. Удалова, Н. А. Потемкина. Электронографическое изучение текстур роста индия при напылении в вакууме на скол каменной соли . . . . .	44
В. Л. Лёвшин, Б. М. Орлов. Изучение оптической вспышки и оптического тушения кристаллофосфоров . . . . .	48
Ю. А. Рылов. Нормальные координаты и общий принцип относительности . . . . .	55
Н. И. Кожевников. К вопросу о флуктуациях показателя преломления световых волн в приземных слоях атмосферы . . . . .	66
Ю. Г. Павленко. Амплитуда рассеяния в квазиклассическом приближении . . . . .	70
В. А. Городцов. Модель квантовой теории поля с $n$ фиксированными фермионами . . . . .	75
В. В. Алексеев. О роли прицельного расстояния при множественном рождении частиц . . . . .	81
В. Г. Дмитриев. К теории распространения волн в нелинейных диспергирующих линиях . . . . .	85

## CONTENTS

### *Physics*

F. A. Korolev, S. M. Djakova, V. I. Gridnev. Identification of radiations in the far infra-red region by means of the residual rays method . . . . .	3
V. I. Vischin. The interpretation of the optical activity of tellurium . . . . .	6
S. I. Gribkova, L. S. Schtemenko. The estimation of the second order approximation terms in the temperature jump experiments . . . . .	11
I. P. Bazarov. To the fusion theory . . . . .	18
Ju. M. Trifonov. About synchronization of the microwave generator working to the transmission line containing reflecting inhomogeneities . . . . .	26
N. N. Kolesnikov, Ju. P. Grigoriev. To the theory of isotopic shifts . . . . .	32
V. V. Udalova, N. A. Potemkina. Electronographic study of textures of the indium growth at dusting in vacuum on the break of sodium diloride crystal . . . . .	44
V. L. Levshin, B. M. Orlov. The study of the optical flash and optical quenching of the crystalline phosphores . . . . .	48
Ju. A. Rylov. Normal coordinates and the principle of the general relativity . . . . .	55
N. I. Koschevnikov. On the fluctuation of the refractive index of the light waves in the lower atmospheric layers . . . . .	66
Ju. G. Pavlenko. The amplitude of dispersion at quasiclassic approximation . . . . .	70
V. A. Gorodtsov. The model of the quantum field theory with $n$ fixed fermions . . . . .	75
V. V. Alexeev. On the influence of the blow parameter for the multiply production of the particles . . . . .	81
V. G. Dmitriev. On the theory of the wave propagation in the nonlinear lines with dispersion . . . . .	85

## Выводы

Отмечены некоторые особенности процесса взаимодействия волн в диспергирующей линии с кубической нелинейностью без потерь: 1) фазовые траектории, окружающие синфазное стационарное состояние, значительно искажаются, в то время как фазовые траектории вокруг антифазного стационарного состояния, напротив, становятся более «линейными»; 2) распределение амплитуды второй гармонической составляющей вдоль оси системы существенно определяется входной фазой  $\psi(0)$ ; 3) для нелинейных сред с нормальной дисперсией и кубической нелинейностью может быть значительно повышена эффективность умножения частоты или усиления за счет компенсации расстройки так называемой «нелинейной» расстройкой.

Учет кубической нелинейности имеет определенное значение для задач нелинейной оптики, где кубические члены в разложении индукции поля по степеням его напряженности могут достигать заметной величины.

Пользуюсь случаем выразить благодарность С. А. Ахманову и Р. В. Хохлову за обсуждение настоящей работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Franken P. A., Hill A. F., Peters C. W., Weinreich G. Phys. Rev. Lett., 7, 118, 1961.
2. Terhune R. W., Maker P. D., Savage C. M. Phys. Rev. Lett. 8, 404, 1962.
3. Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», 6, 917, 1961.
4. Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», 6, 1116, 1961.

Поступила в редакцию  
10. 10 1962 г.

Кафедра  
радиотехники