Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1963

Ю. А. РЫЛОВ

НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Показано, что общий принцип относительности может быть сформулирован в форме, аналогичной форме специального принципа относительности, т. е. как инвариантность метрического тензора плоского пространства $E_{x'}$, касательного к пространству — времени в точке x', относительно некоторой 14-параметрической группы преобразований. При этом специальный принцип относительности является частным случаем общего принципа относительности.

В работах [1—3] нами предложен новый подход к описанию гравитационных явлений, а именно было предложено описывать гравитационное поле не с помощью скобок Кристоффеля, а с помощью так называемого относительного гравитационного поля. Относительное гравитационное поле представляет собой гравитационное поле в точке x по отношению к произвольной опорной точке x', где гравитационное поле равно нулю. Математически оно определяется следующим образом: в кривом пространстве — времени V_4 выбирается некоторая система координат K и некоторая опорная точка x'. Далее вводится плоское четырехмерное пространство $E_{x'}$, касательное к V_4 в точке x'. Затем V_4 отображается на $E_{x'}$ так, чтобы геодезические в V_4, проходящие через точку x', отображались в прямые в $E_{x'}$, проходящие через точку x', и чтобы углы между этими геодезическими в точке x' и длины их не изменялись при отображении. При этом система координат K в V_4 отображается в систему координат $K_{x'}$ в $E_{x'}$, и координаты x^α нумеруют как точки пространства V_4, так и точки пространства $E_{x'}$,

Пусть $g_{\mu\nu}(x)$, $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ и $G_{\mu\nu}(x, x')$, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, x')$ суть метрические тензоры и скобки Кристоффеля соответственно в V_4 в системе координат K и в $E_{x'}$ в системе координат $K_{x'}$. Условимся обозначать прописными буквами двухточечные величины, а строчными — одноточечные. Тогда, по определению, относительным гравитационным полем будет тензор

$$Q^\alpha_{\beta\gamma}(x, x') = \gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, x'). \tag{1}$$

Относительное гравитационное поле является тензором, точнее двухточечным тензором (двутензором). Это дает ему ряд преимуществ перед нетензорной величиной $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Для задания относительного гравитационного поля при заданном V_4 нужно задать способ рассмотрения. Под способом рассмотрения понимается совокупность системы координат K и опорной точки x'. При изменении системы координат, или опорной точки, или того и другого вместе меняется способ рассмотрения. Заметим, что мы можем независимо изменять систему координат и опорную точку. При преобразованиях координат $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ведет себя как тензор и, следовательно, если в какой-нибудь точке $Q^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0$, то никаким преобразованием координат нельзя обратить $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в нуль в этой точке. Это очень удобно и означает, что поле $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в отличие от поля $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ является локализуемым, точнее локализуемым относительно данной опорной точки. Однако, если нельзя обратить $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в нуль в некоторой точке преобразованием координат, то это всегда можно сделать преобразованием способа рассмотрения, для этого достаточно выбрать эту точку за опорную точку. Действительно [4],

$$[Q^{\alpha}_{\beta\gamma}]_{x=x'} = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, несмотря на тензорность относительного гравитационного поля принцип эквивалентности выполняется. Это достигается обобщением способа рассмотрения: обычно способ рассмотрения определяется только заданием системы координат, в нашей работе он включает еще задание опорной точки. В соответствии с этим преобразование способа рассмотрения не сводится к преобразованию координат, а включает еще преобразование опорной точки.

В настоящей работе мы используем аппарат относительного гравитационного поля, чтобы получить координатные условия для нормальных координатных систем и сформулировать общий принцип относительности в форме инвариантности относительно некоторой группы преобразований.

Как известно [5], уравнения тяготения Эйнштейна, являясь общековариантными, могут быть однозначно решены только в том случае, если фиксирована система координат, т. е. если заданы 4 нековариантных условия, которым удовлетворяют компоненты $g_{\mu\nu}$. Эти координатные условия являются принципиально нековариантными и задаются с большой степенью произвола, при этом всегда следует иметь в виду возможную несовместимость координатных условий с уравнениями Эйнштейна.

Мы подойдем к вопросу о координатных условиях следующим образом. Задание системы координат в V_4 означает задание системы координат в $E_{x'}$ и наоборот. При этом, если фиксированная система координат в V_4 имеет не очень ясный физический смысл, то, наоборот, фиксированная система координат в плоском пространстве $E_{x'}$ имеет вполне определенный физический смысл ввиду существования в плоском пространстве $E_{x'}$ класса галилеевых координатных систем. Фиксировать систему координат в $E_{x'}$ означает задать значения $G_{\mu\nu}$ как функции x для данного фиксированного x'. Разумеется, что при этом $G_{\mu\nu}$ должен быть метрикой плоского пространства. Заметим, что задание значений $G_{\mu\nu}$ отнюдь не определяет систему координат однозначно, так как $E_{x'}$ обладает 10-параметрической группой движений. Таким образом, система координат в $E_{x'}$ определяется с точностью до преобразования Лоренца. Воспользуемся тождеством [4] (формула (4, 12))

$$\{g_{\mu\nu}(x) - G_{\mu\nu}(x, x')\}\, G^{\nu}(x, x') = 0, \qquad (3)$$

где

$$G^{\nu}=G^{\nu}(x,x')=g^{\nu\mu}G_{\mu},\quad G_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}G, \tag{4}$$

а $G=G(x,x')$ есть мировая функция Синга [4, 6], определяемая как половина расстояния между точками x и x', причем расстояние измеряется вдоль геодезической, соединяющей точки x и x'. Соотношение (3) является тождеством в том случае, если $G(x,x')$ и $G_{\mu\nu}$ рассматриваются как функционалы от $g_{\mu\nu}$. Если же в (3) $G_{\mu\nu}$ рассматривается как метрический тензор в $E_{x'}$, заданный для всех x и некоторого x', то соотношения (3) представляют собой 4 условия, накладываемые на компоненты $g_{\mu\nu}$, и являются, таким образом, координатными условиями, причем ковариантными координатными условиями.

Опуская аргументы x и x', переписывая (3) в виде

$$(\delta_{\mu}^{\nu}-G_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu})G_{\nu}=0 \tag{5}$$

и учитывая, что для данной фиксированной точки x', наиболее общий вид $G_{\mu\alpha}$ и G_{ν}

$$G_{\mu\alpha}=\frac{\partial f^{\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}}\eta_{\sigma\rho}\frac{\partial f^{\rho}(x)}{\partial x^{\alpha}},$$

$$G_{\nu}=\frac{\partial f^{\sigma}(x)}{\partial x^{\nu}}\eta_{\sigma\rho}\{f^{\rho}(x)-f^{\rho}(x')\},$$

где $\eta_{\mu\nu}=e_{\mu}\delta_{\mu\nu}$, $e_0=1$, $e_i=-1$, $i=1, 2, 3$ и $f^{\rho}(x)$ — четыре произвольные независимые функции, получим из (5) после несложных преобразований

$$\left\{\delta_{\nu}^{\rho}-\frac{\partial f^{\rho}(x)}{\partial x^{\gamma}}g^{\gamma\alpha}\frac{\partial f^{\sigma}(x)}{\partial x^{\alpha}}\eta_{\sigma\nu}\right\}\{f^{\nu}(x)-f^{\nu}(x')\}=0. \tag{6}$$

Итак, если 4 функции $f^{\rho}(x)$ заданы, то условия (6) налагают ограничения на $g_{\mu\nu}$ и определяют систему координат в $E_{x'}$ (с точностью до преобразования Лоренца). При этом из способа их получения (они получены из тождеств (3)) следует их совместность с любыми ковариантными уравнениями, которым подчиняются $g_{\mu\nu}$, в том числе с уравнениями Эйнштейна.

В частном случае, когда система координат, галилеева в $E_{x'}$, получаем

$$G_{\mu\nu}(x,x')=\eta_{\mu\nu},\quad G^{\alpha}(x,x')=x^{\alpha}-x'^{\alpha},\quad f^{\alpha}(x)=x^{\alpha}, \tag{7}$$

при этом условия (6) дают

$$(g_{\mu\nu}(x)-\eta_{\mu\nu})(x^{\nu}-x'^{\nu})=0. \tag{8}$$

Условия (8) означают, что в системе координат, галилеевой в $E_{x'}$, отклонение $g_{\mu\nu}$ от $\eta_{\mu\nu}$ ортогонально $x^{\nu}-x'^{\nu}$. Условимся называть систему координат, удовлетворяющую условию (8), системой координат, нормальной в точке x'. Наше определение согласуется с обычным определением нормальной системы координат [7]

$$\gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma}=0,\quad g_{\alpha\beta}(0)=\eta_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Действительно, дифференцируя (8) по x^{λ} и умножая на $x^{\lambda}-x'^{\lambda}$ или $x^{\mu}-x'^{\mu}$, получаем [8] в силу (8)

$$g_{\mu\lambda}-\eta_{\mu\lambda}=-g_{\mu\nu,\lambda}(x^{\nu}-x'^{\nu}),$$

$$g_{\mu\nu,\lambda}(x^{\nu}-x'^{\nu})(x^{\lambda}-x'^{\lambda})=0,\quad g_{\mu\nu,\lambda}(x^{\nu}-x'^{\nu})(x^{\mu}-x'^{\mu})=0. \tag{10}$$

Запятая означает дифференцирование. Полагая в соотношениях (10) $x^{\nu'}=0$ и комбинируя последние два соотношения (10), легко получаем (9). Можно показать, что условие (8) с $x'^{\nu}=0$ эквивалентно условиям (9).

Таким образом, определение (8) является несколько более общим, чем (9), в том смысле, что в нем, вообще говоря, $x'^{\nu}\neq 0$. Мы будем придерживаться определения (8) и будем называть системой координат, нормальной в точке x', систему координат, галилееву в $E_{x'}$, или, что одно и то же, удовлетворяющую (8). Заметим, что условия (8) в отличие от (9) не содержат производных $g_{\mu\nu}$ и это значительно удобнее. Условия (8) нековариантны относительно произвольных преобразований координат, но они ковариантны относительно 10-параметрической группы преобразований Лоренца, что указывает на то, что они определяют систему координат не однозначно, а с точностью до преобразования Лоренца в соответствии со специальным принципом относительности.

Итак, нормальные координаты (8) определяются как координаты, галилеевы в $E_{x'}$. Но галилеевы координаты в плоском пространстве являются выделенными, привилегированными координатами [9]. Они выделены как геометрически (ортогональные координаты, координатные линии которых являются геодезическими), так и физически, т. е. способом измерений. Однозначная инвариантная связь нормальных координат с галилеевыми координатами позволяет рассматривать класс нормальных координат в $E_{x'}$ как класс выделенных координат, определяемый геометрией пространства — времени. В отличие от 10-параметрического класса галилеевых координат класс нормальных координат характеризуется 14 параметрами (10 параметров тех же, что и у галилеевых координат, плюс 4 параметра, характеризующие координаты опорной точки). Все нормальные системы координат являются равноправными, поскольку в силу равноправия всех опорных точек x' все $E_{x'}$ равноправны и равноправны все галилеевы системы координат в каждом из $E_{x'}$.

Таким образом, класс нормальных систем координат в V_4 представляет собой 14-параметрический класс равноправных выделенных систем координат. В подтверждение этого можно указать на следующие свойства нормальных координат: во-первых, в случае плоского пространства — времени нормальные координаты вырождаются в галилеевы, во-вторых, в системе координат, нормальной в точке x' (галилеевой в $E_{x'}$) $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, x')=0$, и, следовательно, согласно (1) относительное гравитационное поле $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равно абсолютному гравитационному полю $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Последнее утверждение можно также сформулировать в форме: относительное гравитационное поле совпадает с абсолютным при нормальном способе рассмотрения. Под нормальным способом рассмотрения мы понимаем совокупность опорной точки x' и системы координат, нормальной в этой точке. В дальнейшем мы будем иметь дело не столько с нормальными координатами, сколько с нормальными способами рассмотрения, поскольку с точки зрения относительного гравитационного поля понятие способа рассмотрения есть более фундаментальное понятие, чем понятие системы координат. Заметим, что для плоского пространства способ рассмотрения определяется только заданием системы координат, так как в этом случае зависимость от опорной точки выпадает. Таким образом, для плоского пространства понятие способа рассмотрения совпадает с понятием системы координат и, в частности, нормальный способ рассмотрения тождествен галилеевым координатам.

Учитывая все сказанное о нормальных координатах, мы можем утверждать, что в кривом пространстве V_4 класс нормальных способов рассмотрения представляет собой 14-параметрический класс равноправных выделенных способов рассмотрения. Наличие этого класса обусловливает существование общего принципа относительности точно так же, как наличие класса равноправных галилеевых координат обусловливает существование специального принципа относительности. Поясним, в чем здесь дело.

Как известно, в плоском пространстве наличие 10-параметрического класса галилеевых координат индуцирует 10-параметрическую группу Лоренца, при этом специальный принцип относительности можно сформулировать так [9]. В плоском пространстве — времени существует класс инерциальных галилеевых систем координат, в которых метрический тензор $g_{\mu\nu}$ имеет вид $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}=e_\mu\delta_{\mu\nu}$, $e_0=1$, $e_i=-1$, $i=1, 2, 3$), при этом $g_{\mu\nu}$ инвариантен относительно 10-параметрической группы преобразований координат (группы Лоренца).

Аналогично в кривом пространстве наличие 14-параметрического класса нормальных способов рассмотрения индуцирует 14-параметрическую группу * нормальных преобразований. Нормальным преобразованием мы называем всякое преобразование от одного нормального способа рассмотрения к другому. От нормального преобразования, которое является преобразованием способа рассмотрения, следует отличать нормальное преобразование координат. Последнее представляет собой преобразование от одних нормальных координат к другим, т. е. является преобразованием координат.

Прежде чем сформулировать общий принцип относительности в форме инвариантности относительно группы нормальных преобразований, сформулируем сначала специальный принцип относительности в другой форме. Заметим, что для плоского пространства V_4 $E_{x'}$ совпадает с V_4 и, следовательно, в этом случае

$$g_{\mu\nu}(x)=G_{\mu\nu}(x, x'),$$

где $G_{\mu\nu}$ (x, x') есть метрический тензор в $E_{x'}$, причем в данном случае он фактически не зависит от опорной точки x'. Теперь можно сформулировать специальный принцип относительности.

В плоском пространстве — времени существует класс галилеевых систем координат, в которых касательный метрический тензор $G_{\mu\nu}$ имеет вид $G_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, при этом $G_{\mu\nu}$ инвариантен относительно 10-параметрической группы преобразований координат (группы Лоренца).

Отсюда легко получить формулировку общего принципа относительности. Действительно, в системе координат, нормальной в точке x', согласно (10) имеем

$$G_{\mu\nu}(x, x')=\eta_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Это означает, что при всяком нормальном способе рассмотрения имеет место (11) и, следовательно, $G_{\mu\nu}$ инвариант при нормальных преобразованиях. Итак, общий принцип относительности можно сформулировать в следующей форме.

В пространстве — времени существует класс нормальных способов рассмотрения, при которых касательный метрический тензор $G_{\mu\nu}$ имеет вид $G_{\mu\nu}$ $(x, x')=\eta_{\mu\nu}$ для всех x и некоторого x', определяемого способом рассмотрения, причем $G_{\mu\nu}$ инвариантен относительно группы нормальных преобразований.

---

* См. приложение.

Сформулированный принцип является более общим, чем специальный принцип относительности, потому, что соответствующая ему группа нормальных преобразований имеет большую размерность (максимальная размерность 14), чем группа Лоренца, являющаяся подгруппой группы нормальных преобразований и соответствующая специальному принципу относительности. Кроме того, специальный принцип относительности является частным случаем общего принципа относительности. Действительно, для плоского V_4 класс нормальных способов рассмотрения вырождается в класс галилеевых координат, и 14-параметрическая группа нормальных преобразований вырождается в группу Лоренца.

В заключение сделаем некоторые замечания в историческом плане. Эйнштейн [10] первый сформулировал общий принцип относительности, причем он понимал его как физическое равноправие всех возможных систем отсчета и отрицал наличие каких бы то ни было привилегированных систем отсчета. Фок подверг критике это положение и показал [9], что такая формулировка не содержит какой-либо относительности, аналогичной специальной относительности, поскольку метрический тензор неинвариантен относительно группы произвольных преобразований координат, да и вообще не существует тензора (за исключением δ^{μ}_{ν}), инвариантного относительно этих преобразований. Отсюда Фок сделал заключение об отсутствии общего принципа относительности, кроме того, он пришел к выводу о существовании класса привилегированных систем координат. Наша точка зрения является в некотором смысле компромиссной, мы признаем и общий принцип относительности и существование класса привилегированных координат, причем у нас одно не противоречит другому, а, наоборот, одно другое обусловливает.

Автор глубоко признателен проф. Я. П. Терлецкому за внимание и интерес, проявленные к работе.

Приложение

Определим нормальное преобразование и покажем, что множество этих преобразований образует группу. Условимся нормальные координаты обозначать прописными буквами, а тензорные индексы в нормальных координатах латинскими буквами. Тогда условие нормальности координат (8) перепишется в виде

$$\{g_{ik}(X^i) - \eta_{ik}\}(X^k - X'^k) = 0. \tag{12}$$

Пусть имеется некоторая фиксированная система координат K с координатами x^{α}. Связь системы кординат X', нормальной в точке x', с системой координат K дается соотношением

$$X^i = X'^i - \lambda^{i\cdot}_{\cdot\beta'} G^{\beta'}(x, x'), \tag{13}$$

где X'^i — нормальные координаты точки x', а $G^{\beta'}(x, x')$ дается соотношением

$$G^{\beta'} = G^{\beta'}(x, x') = g^{\beta'\gamma'}(x') G_{\gamma'}(x, x') = g^{\beta'\gamma'} \partial_{\gamma'} G(x, x'),$$

$G = G(x, x')$ — мировая функция Синга. Отсутствие штриха у индекса означает, что индекс относится к точке x, штрих у индекса означает, что индекс относится к точке x', два штриха означают, что индекс относится к точке x'', и т. д. Аргументы мы будем опускать в тех случаях, когда индексы его определяют *, например, $g^{\alpha'\beta'} \equiv g^{\alpha'\beta'}(x')$. Величины $\lambda^{i}{}_{\beta'}$ в (13) суть компоненты ортонормированного репера в точке x' в системе координат K, причем латинские индексы нумеруют орты репера, а греческие — компоненты ортов в системе координат K. В силу ортонормированности репера имеем

$$\lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha'} g^{\alpha'\beta'} \lambda^{k}_{\cdot\beta'} = \eta^{ik}, \quad \lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha'} \eta_{ik} \lambda^{k\cdot}_{\cdot\beta'} = g_{\alpha'\beta'},$$
$$\eta_{ik} = e_i \delta_{ik}, \quad e_0 = 1, \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1. \tag{14}$$

* Подробнее о формализме см. [4].

Убедимся в том, что координаты X, определяемые (13), действительно являются нормальными координатами и удовлетворяют (12). Для этого достаточно доказать, что система координат K является галилеевой в $E_{x'}$, т. е. что

$$G_{ik}(X, X') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial X^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial X^{k}} G_{\alpha\beta}(x, x') = \eta_{ik}. \tag{15}$$

Дифференцируя (13) по x^{α} и учитывая, что [4]

$$\partial_{\alpha} G^{\beta'}(x, x') = G^{\beta'\gamma} G_{\gamma\alpha} = - P_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta'}(x. x'),$$

где $G^{\beta'\gamma}$ определяется из соотношений

$$G^{\beta'\gamma} G_{\alpha'\gamma} = \delta_{\alpha'}^{\beta'}, \quad G_{\alpha'\gamma} = \partial_{\gamma}\partial_{\alpha'} G(x, x'),$$

а $P_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta'}(x, x')$ представляет собой [4] тензор параллельного переноса в $E_{x'}$ из точки x' в точку x, получим

$$\frac{\partial X^{i}}{\partial x^{\alpha}} = - \lambda^{i\cdot}_{\cdot\beta'} G^{\beta'\gamma} G_{\gamma\alpha} = \lambda^{i\cdot}_{\cdot\beta'} P_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta'} \equiv \lambda^{i\cdot}_{\cdot\hat{\alpha}'}. \tag{16}$$

Обозначим посредством $\lambda_{i\cdot}^{\cdot\beta'}$ матрицу, обратную матрице $\lambda^{i\cdot}_{\cdot\beta'}$.

$$\lambda_{i\cdot}^{\cdot\beta'} = \eta_{ik} \lambda^{k\cdot}_{\cdot\alpha'} g^{\alpha'\beta'}. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (15) и используя соотношение [4]

$$g_{\alpha'\beta'} = G_{\alpha'\mu} G^{\mu\nu} G_{\beta'\nu},$$

а также следующее из (17) и (14) соотношение,

$$\lambda_{i\cdot}^{\cdot\alpha'} g_{\alpha'\beta'} \lambda_{k\cdot}^{\cdot\beta'} = \eta_{ik},$$

получим

$$G_{ik}(X. X') = \lambda_{i\cdot}^{\cdot\beta'} G_{\beta'\gamma} G^{\gamma\mu} G_{\mu\nu} G^{\nu\rho} G_{\alpha'\rho} \lambda_{k\cdot}^{\cdot\alpha'} = \eta_{ik}.$$

Это доказывает, что система координат (13) является нормальной в точке x'.

Из соотношения (13) видно, что нормальные координаты X^{i} являются реперными компонентами вектора — $G^{\beta'}(x, x')$ и инвариантны относительно произвольных преобразований системы координат K. Заметим, что мы нумеруем нормальные координаты латинскими буквами как раз для того, чтобы оттенить эти обстоятельства и выделить нормальные координаты из всех остальных координат. При фиксированной системе координат K и заданной мировой функции G нормальные координаты однозначно определяются заданием 14 величин $(X'^{i},\ x'^{\alpha},\ \lambda^{i}{}_{\beta'})$, поэтому всякое преобразование от одной нормальной системы координат к другой может быть представлено в виде преобразования от $(X,\ x'^{\alpha} \lambda^{i}{}_{\beta'})$ к $(X''^{i},\ x''^{\alpha}\ \lambda^{i\cdot}{}_{\beta''})$. Заметим, что выбор величин $(X'^{i},\ x'^{\alpha},\ \lambda^{i\cdot}{}_{\beta'})$, характеризующих нормальную систему координат, очень сильно зависит от выбора системы координат K. Это относится в первую очередь к координатам опорной точки x'. Нам хотелось бы определить представление нормальной системы координат способом, не зависящим от выбора системы координат K, поэтому удобнее характеризовать нормальную систему координат совокупностью величин $(X'^{i},\ y^{i},\ \Lambda^{i\cdot}{}_{\alpha})$, где $\Lambda^{i\cdot}{}_{\alpha}$— компоненты репера в некоторой фиксированной точке z в системе координат K, причем $\Lambda^{i\cdot}{}_{\alpha}$ удовлетворяют условию

$$\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha} \eta_{ik} \Lambda^{k\cdot}_{\cdot\beta} = g_{\alpha\beta}(z), \tag{18}$$

y^{i} суть реперные компоненты вектора — $G^{\alpha}(z, x')$

$$y^{i} = - \Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha} G^{\alpha}(z, x'). \tag{19}$$

Индексы без штриха относятся здесь к точке z, а индексы со штрихом — к точке x'. Репер $\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ связан с репером $\lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha'}$ соотношением

$$\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha} = \Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}(z, x') = \lambda^{i\cdot}_{\cdot\beta'} V^{\beta'\cdot}_{\cdot\mu'}(z, x') P^{\mu'\cdot}_{\cdot\alpha}(z, x'), \tag{20}$$

где $P^{\mu'\cdot}_{\cdot\alpha}(z, x')$ есть тензор параллельного переноса из точки x' в точку z в плоском пространстве E_{z}, касательном к V_{4} в точке z. Для $P^{\mu'\cdot}_{\cdot\nu}$ имеем [4]

$$P^{\mu'\cdot}_{\cdot\nu}(z, x') = - G_{\nu\alpha'}(z, x') G^{\alpha'\mu'}(z, x'). \tag{21}$$

Тензор $V^{\alpha'}_{\cdot\mu'}(z, x')$ в (20) определяется из соотношения

$$V^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu'}(z, x')\, g_{\alpha'\beta'}(x')\, V^{\beta'\cdot}_{\cdot\nu'}(z, x') = G_{\mu'\nu'}(z, x'). \qquad (22)$$

Здесь $G_{\mu'\nu'}(z, x')$ и $G^{\alpha'\mu'}(z, x')$ суть соответственно ковариантный и контравариантный метрические тензоры в точке x' в пространстве E_z. Легко проверить, что (14) и (18) эквивалентны в силу (20) — (22).

Соотношения (22) не определяют однозначно тензора $V^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu'}$, так как они представляют собой 10 уравнений для определения 16 компонентов $V^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu'}$. Для того чтобы сделать выбор однозначным, наложим на $V^{\alpha'\cdot}_{\cdot\beta'}$ дополнительные условия

$$V^{\alpha'\cdot}_{\cdot\beta'}(z, x') = (V^{\top})^{\alpha'\cdot}_{\cdot\beta'}(z, x') \equiv G^{\alpha'\mu'}(z, x')\, V^{\nu'\cdot}_{\cdot\mu'}(z, x')\, G_{\beta'\nu'}(z, x'), \qquad (23)$$

(23) представляют собой 6 уравнений, которые вместе с (22) дают 16 уравнений, для определения 16 компонентов $V^{\alpha'\cdot}_{\cdot\mu'}$. Величины y^i и $\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ практически не зависят от выбора системы координат K, а зависят только от выбора точки z (y^i инвариантны по отношению к преобразованиям системы координат K, а $\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ зависят от характера системы координат только в одной точке z). По величинам y^i, $\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ всегда можно с помощью (19) и (20) найти x'^{α} и $\lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha'}$.

Таким образом, 14 величин $(X'^i, y^i, \Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha})$ определяют нормальную систему координат и всякое нормальное преобразование координат, т. е. преобразование от одних нормальных координат к другим, эквивалентно преобразованию

$$(X'^i,\ y^i,\ \Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}) \to (\overline{X}''^i,\ \overline{y}^i,\ \Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}), \qquad (24)$$

причем связь $\overline{y}^i$ и $\overline{\Lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ с x''^{α} и $\lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha''}(x'')$ дается соотношениями

$$\overline{y}^i = -\overline{\Lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha} G^{\alpha}(z, x''), \qquad (25)$$

$$\overline{\Lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha} = \overline{\Lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha}(z, x'') = \overline{\lambda}^{i\cdot}_{\cdot\beta''}(x'')\, V^{\beta''\cdot}_{\cdot\mu''}(z, x'')\, P^{\mu''\cdot}_{\cdot\alpha}(z, x'').$$

Отметим, что в то время как $\overline{\lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha''}$ удовлетворяют соотношению

$$\overline{\lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha''}\eta_{ik}\overline{\lambda}^{k\cdot}_{\cdot\beta''} = g_{\alpha''\beta''}(x''),$$

отличному от соотношения, которому удовлетворяют $\lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha'}$, $\overline{\Lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$, удовлетворяют соотношению (18) тому же, что $\Lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$.

Определим нормальное преобразование координат (24) следующим образом:

$$\overline{X}''^i = X'^i + a^i + b^i, \quad y^i = a^{i\cdot}_{\cdot k} y^k + b^i,$$

$$\overline{\Lambda}^{i\cdot}_{\cdot\alpha} = a^{i\cdot}_{\cdot k}\Lambda^{k\cdot}_{\cdot\alpha}, \qquad (26)$$

причем $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ ограничены соотношением

$$a^{i\cdot}_{\cdot k}\,\eta_{ij} a^{j\cdot}_{\cdot l} = \eta_{kl}.$$

14 величин $(a^i, b^i, a^{i\cdot}_{\cdot k})$ суть параметры, характеризующие нормальное преобразование координат. Легко проверить, что множество преобразований (26) образует группу, причем, если преобразования g_1 и g_2 характеризуются соответственно параметрами $(a^i_{(1)}, b^i_{(1)}, a^{i\cdot}_{(1)\,k})$ и $(a^i_{(2)}, b^i_{(2)}, a^{i\cdot}_{(2)\,k})$, то произведение этих преобразований $g = g_2 g_1$ будет характеризоваться параметрами $(a^i, b^i, a^{i\cdot}_{\cdot k})$, и они будут выражаться через параметры преобразований g_1 и g_2 следующим образом:

$$a^i = a^i_{(1)} + a^i_{(2)} - a^{i\cdot}_{(2)\,k} b^k_{(1)} + b^i_{(1)},$$

$$b^i = a^{i\cdot}_{(2)\,k} b^k_{(1)} + b^i_{(2)}, \qquad (27)$$

$$a^{i\cdot}_{\cdot k} = a^{i\cdot}_{(2)l}\, a^{l\cdot}_{(1)\,k}.$$

В явном виде нормальное преобразование координат в силу (13), (20), (25) и (26) запишется

$$X^i \to \overline{X}^i = X'^i + a^i + b^i - a^{i\cdot}_{\cdot k}\lambda^{k\cdot}_{\cdot\beta'}T^{\beta'}_{\cdot\alpha''}(x', x'', z)\,G^{\alpha''}(x, x''), \tag{28}$$

где x''^α и x^α суть функции X^i, X'^i и x'^α, определяемые из соотношений

$$X^i = X'^i - \lambda^{i\cdot}_{\cdot\beta'}G^{\beta'}(x, x'), \tag{29}$$

$$b^i = a^{i\cdot}_{\cdot k}\lambda^{k\cdot}_{\cdot\beta'}V^{\beta'\cdot}_{\cdot\mu'}(z, x')\,P^{\mu'\cdot}_{\cdot\alpha}(z, x')\cdot\{G^\alpha(z, x') - G^\alpha(z, x'')\}, \tag{30}$$

а через $T^{\beta'\cdot}_{\cdot\alpha''}(x', x'', z)$ мы здесь обозначили величину

$$T^{\beta'\cdot}_{\cdot\alpha''}(x', x'', z) = V^{\beta'\cdot}_{\cdot\mu'}(z, x')P^{\mu'\cdot}_{\cdot\nu}(z, x')\cdot P^{\nu\cdot}_{\cdot\sigma''}(z, x'')'\,(V^{-1})^{\sigma''\cdot}_{\cdot\alpha''}\cdot(z, x''), \tag{31}$$

где $(V^{-1})^{\sigma''\cdot}_{\cdot\alpha''}$ — матрица, обратная матрице $V^{\sigma''\cdot}_{\cdot\alpha''}$. Величины a^i, b^i, $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ суть параметры, характеризующие преобразование.

Если из уравнений (29)—(31) исключить x^α и x''^α, то получим

$$X^i \to \overline{X}^i = \varphi^i(X, X', x', z, a^i, b^i, a^{i\cdot}_{\cdot k}),$$

однако на самом деле φ^i не зависят от координат x', но зависят от X' и z. Действительно, соотношения (28) — (31) ковариантны относительно произвольных преобразований системы координат K. В частности, (28) — (31) справедливы, когда система координат K совпадает с системой координат X. Тогда

$$x^\alpha = X^\alpha, \quad x'^\alpha = X'^\alpha, \quad z^\alpha = Z^\alpha, \quad x''^\alpha = X''^\alpha.$$

В силу (7) имеем из (29)

$$X^i - X'^i = \lambda^{i\cdot}_{\cdot\alpha}(X^\alpha - X'^\alpha), \quad \lambda^{i\cdot}_{\cdot k} = \delta^i_k.$$

Теперь для (28) — (30) имеем

$$X^i \to \overline{X}^i = X'^i + a^i + b^i - a^{i\cdot}_{\cdot k}T^{k'\cdot}_{\cdot l''}(X', X'', Z)\,G^{l''}(X, X''),$$

где X'' определяется из соотношения

$$b^i = a^{i\cdot}_{\cdot k}V^{k'\cdot}_{\cdot l'}(Z, X')\,P^{l'\cdot}_{\cdot j}(Z, X')\,\{G^j(Z, X') - G^j(Z, X'')\}. \tag{32}$$

Теперь можно записать нормальное преобразование, т. е. преобразование от одного нормального способа рассмотрения к другому. Оно имеет вид

$$\begin{gathered} X^i \to \overline{X}^i = Y^i + a^i + b^i - a^{i\cdot}_{\cdot k}T^{k'\cdot}_{\cdot l''}(X', X'', Z)\,G^{l''}(X, X''), \\ Y^i \to \overline{Y}^i = Y^i + a^i + b^i, \end{gathered} \tag{33}$$

где X'' определяется из (32). Здесь Y^i суть нормальные координаты X опорной точки X', а $\overline{Y}^i$ — нормальные координаты $\overline{X}$ опорной точки X''. Мы положили здесь $Y^i = X'^i$ для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что X^i и Y^i являются независимыми переменными и определяются способом рассмотрения.

Проиллюстрируем разницу между нормальным преобразованием и нормальным преобразованием координат на простом примере. Пусть $A_{ik}(X, Y)$ есть относительный тензор в точке X, вычисленный относительно опорной точки Y. При нормальном преобразовании имеем

$$A_{ik}(X, Y) \to A_{ik}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{\partial X^j}{\partial \overline{X}^i}\,\frac{\partial X^l}{\partial \overline{X}^k}\,A_{jl}(X, Y), \tag{34}$$

где в правой части равенства X и Y суть функции $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, определяемые из (33). При нормальном преобразовании координат $A_{ik}(X, Y)$ преобразуется по (34), но X и Y суть функции $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, определяемые из

$$X^l \to \overline{X}^l = Y^l + a^l + b^l - a^{l\cdot}_{\cdot k} T^{k'}_{\cdot l''}\, (X', X'', Z)\, G^{l''}(X, X''),$$

$$Y^l \to \overline{Y}^l = Y^l + a^l + b^l - a^{l\cdot}_{\cdot k} T^{k'}_{\cdot l''}\, (X', X'', Z)\, G^l Y, X''),$$

где X'' определяется из (32). Таким образом, разница в том, что при нормальном преобразовании спорная точка Y, вообще говоря, изменяется, а при нормальном преобразовании координат — нет.

Запись конечного нормального преобразования (33) в виде, не содержащем X'', затруднительна, однако для бесконечно малого преобразования ее можно получить. После расчетов, которые мы опускаем, для бесконечно малого нормального преобразования получается следующее выражение:

$$X^l \to \overline{X}^l = X^l + \delta X^l = X^l + \delta a^l + \eta^{ij}\delta\omega_{jk}\,(X^k - Y^k) + \{\delta^i_j - (V^{-1})^{i'\cdot}_{j'}\,(Z, X')\}\,\delta b^j +$$

$$+ \left\{\frac{1}{2}\,\eta^{ik}\,(Q_{l'k'm'}\,(Z, X') - Q_{k'l'm'}\,(Z, X')) + Q^{i'}_{m'l'}\,(X\ X')\right\}(X^l - Y^l)\cdot(V^{-1})^{m'\cdot}_{\cdot j'}\,\delta b^j, \quad (35)$$

$$Y^l \to \overline{Y}^l = Y^l + \delta Y^l = Y^l + \delta a^l + \delta b^l,$$

где $Q_{l'k'm'} = \eta_{l'i}Q^{i'}_{k'm'}$, $Q^{i'}_{k'm'}\,(Z, X')$ и $Q^{i'}_{k'm'}\,(X, X')$ суть относительное гравитационное поле в точке X' относительно точек соответственно Z и X, а δa^i, δb^i и $\delta\omega_{ij}$ суть бесконечно малые параметры, характеризующие нормальное преобразование, причем $\delta\omega_{ij} = -\delta\omega_{ji}$.

Итак, нам удалось инвариантным образом определить группу преобразований, зависящую от произвольной фиксированной точки z. Это означает, что задание мировой функции $G\ (x, x')$ и точки z сразу определяет группу нормальных преобразований. Наибольший интерес представляла бы группа нормальных преобразований, определенная инвариантным образом и не зависящая от выбора точки z. Вопрос о существовании такой группы остается открытым.

Рассмотрим некоторые свойства группы нормальных преобразований. Прежде всего заметим, что для плоского пространства V_4 группа нормальных преобразований вырождается в группу Лоренца. Действительно, для плоского V_4 и галилеевых координат в нем из (22), (23) и (1) имеем

$$V^{i'\cdot}_{\cdot k'} = \delta^i_k, \qquad Q^{i'}_{k'l'} = 0$$

и (35) переходит в

$$\delta X^i = \delta a^i + \eta^{ij}\delta\omega_{ij}\,(X^k - Y^k), \qquad \delta Y^l = \delta a^l + \delta b^l.$$

В результате величина параметра b^i никак не сказывается на преобразовании X^i, т. е. группа имеет уже размерность 10, так как выбор опорной точки для плоского V_4 несуществен.

Смысл параметров a^i, $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ и b^i таков: a^i характеризует перенос начала координат, $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ характеризует вращение системы координат вокруг опорной точки, а b^i описывает сдвиг опорной точки. В этом легко убедиться, рассматривая бесконечно малое нормальное преобразование (35).

Как легко видеть из (27), группа нормальных преобразований распадается на две подгруппы: группу Лоренца, описываемую 10 параметрами a^i и $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ (при $b^i = 0$) и группу преобразований локализации, описываемую 4 параметрами b^i (при $a^i = 0$ и $a^{i\cdot}_{\cdot k} = \delta^i_k$). Бесконечно малое преобразование локализации можно записать в виде

$$\delta X^l = \overline{X}^l - X^l = \{\delta^i_j - (V^{-1})^{i'\cdot}_{\cdot j'}\,(Z, X')\}\,\delta b^j + \left\{\frac{1}{2}\,\eta^{ik}\,(Q_{l'k'm'}\,(Z, X') - \right.$$

$$\left. - Q_{k'l'm'}\,(Z, X')) + Q^{i'}_{l'm'}\,(X, X')\right\}(X^l - Y^l)\cdot(V^{-1})^{m'\cdot}_{\cdot j'}\,(Z, X')\,\delta b^j \quad (36)$$

$$\delta Y^l = \overline{Y}^l - Y^l = \delta b^l.$$

Из (36) видно, что тензор гравитационного поля $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}$ явно входит в преобразование локализации. Если $Q^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ всюду, то преобразование локализации вырождается в тождественное преобразование. Таким образом, преобразование локализации тесно связано с гравитационным полем и обусловлено его наличием. Легко видеть из (36), что группа локализации изоморфна группе трансляций, однако преобразование локализации, в отличие от преобразования трансляции, некоммутативно с преобразованием вращения системы координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов Ю. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 70, 1962.
2. Рылов Ю. А. ДАН СССР, 144, № 5, 1030, 1962.
3. Рылов Ю. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 45, 1962.
4. Рылов Ю. А. «Изв. вузов», математика, № 3, 131, 1962.
5. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. ГИТТЛ, М., 1947, стр. 239.
6. Synge J. L. Relativity the General Theory. Amsterdam, 1960.
7. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. ГИТТЛ, М., 1948, стр. 70.
8. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, 1961, стр. 50.
9. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
10. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. ИЛ, М., 1955.

Поступила в редакцию
17. 9 1962 г.

Кафедра
статистической физики и
механики