Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1963

В. А. ГОРОДЦОВ

МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С n ФИКСИРОВАННЫМИ ФЕРМИОНАМИ

Введение

Используемый в квантовой теории поля метод возмущений является удовлетворительным лишь при небольшой величине константы связи g. Но эта константа уже не мала для $\pi - N$ взаимодействия. Для того чтобы стало возможным точное решение, приходится рассматривать упрощенные модели теории поля.

Одной из таких моделей является модель с фиксированными фермионами. Предполагается, что нуклоны (фермионы) обмениваются мезонами (бозонами) массы μ, не испытывая отдачи, т. е. нуклоны считают бесконечно тяжелыми ($M \to \infty$). По этой причине в модели отсутствуют антинуклоны, и число нуклонов постоянно. Сами нуклоны выступают лишь как фиксированные источники квантованного бозонного поля.

Так как в этой модели нуклоны считаются нерелятивистскими, то целесообразно ввести в описание взаимодействия фактор, запрещающий обмен мезонами больших импульсов. Это можно сделать, введя взаимодействие, «размазанное» по конечной пространственной области (нелокальное взаимодействие с форм-фактором). Следовательно, получаемые ниже результаты могут дать представление о процессах, в которых сказываются лишь «периферические» явления в реальных фермионах.

Аналогическая модель без учета вторичного квантования поля мезонов хорошо исследована. В частности, она приводит к потенциалу Юкавы для взаимодействия неподвижных источников [1]. Представляется интересным провести рассмотрение с учетом квантования, что позволяет, в частности, более последовательно, используя понятие о числе бозонов, проанализировать нестационарные процессы.

Уравнение для n нуклонов

Для системы n взаимодействующих фиксированных нуклонов и нейтральных скалярных мезонов * плотность гамильтониана взаимо-

* О псевдоскалярных мезонах в данной модели см. ниже.

действия с контрчленом можно записать в виде

$$H_{вз}(\vec{x}, t) = g\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{a}_\alpha a_\alpha f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)\,\varphi(\vec{x}, t) - \lambda\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{a}_\alpha a_\alpha f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha).$$

Функция $f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)$ описывает протяженность нуклонов (для точечных частиц $f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)=\delta(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)$) и играет роль «обрезающей» функции (формфактора).

Операторы $\bar{a}_\alpha$ и a_α — операторы рождения и уничтожения α-го нуклона (расположенного в точке $\vec{r}_\alpha$) обладают следующими коммутационными свойствами:

$$a_\alpha\bar{a}_\alpha + \bar{a}_\alpha a_\alpha = 1, \quad a_\alpha^2 = \bar{a}_\alpha^2 = 0,$$

$$a_\alpha\bar{a}_\beta - \bar{a}_\beta a_\alpha = 0, \quad a_\alpha a_\beta - a_\beta a_\alpha = 0.$$

$$|\alpha \neq \beta|$$

Это так называемые «операторы Паули» [2], которые можно преобразовать к обычным σ операторам Паули спина $^1/_2$.

Кроме того, в соответствии с определением фермионного вакуума $|0>$

$$a_\alpha|0> = <0|\bar{a}_\alpha = 0.$$

Операторы бозе поля $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ обладают обычными коммутационными свойствами [3]. Их вакуум $|0>$ определяется $\varphi^-|0> = <0|\varphi^+ = 0$.

В представлении взаимодействия для оператора S-матрицы имеем следующее уравнение:

$$i\frac{\partial}{\partial t}S(t) = \left(g\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{a}_\alpha a_\alpha\int d^3x f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)\,\varphi(\vec{x}, t) - \sum_{\alpha=1}^{n}\bar{a}_\alpha a_\alpha\lambda_\alpha\right)S(t),$$

где

$$\lambda_\alpha = \lambda\int d^3x f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha) = \lambda$$

при условии нормировки $\int d^3\vec{x} f(\vec{x}) = 1$.

Чтобы его упростить, подействуем слева и справа фермионными векторами $<n| = <0|a_1a_2\ldots a_n$, $|n>$. Коммутационные правила позволяют избавиться от операторов $\bar{a}_\alpha$, a_α, так как $<n|\bar{a}_\alpha a_\alpha = <n|$. Это физически естественно в силу постоянства числа нуклонов в модели. Применяя обозначения

$$\lambda_0 = -i\lambda, \quad S(n) = \langle n|S|n\rangle,$$

$$\Phi = -ig\sum_{\alpha=1}^{n}\int d^3x f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)\,\varphi(\vec{x}, t),$$

уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}S(n) = (\Phi(t) - n\lambda_0)\,S(n). \tag{1}$$

При рассмотрении нестационарных процессов начальное условие имеет вид

$$S(n)|_{t=-\infty}=1. \tag{1a}$$

Подчеркнем, что уравнение (1) имеет операторный характер лишь по $\Phi=\Phi^{+}+\Phi^{-}$.

Решение уравнения

Расшифруем операторную структуру уравнений (1) и (1a). Воспользовавшись рассуждениями работы [4], получим систему зацепляющихся уравнений:

$$\frac{\partial S_0(n)}{\partial t}=\underbracket{\Phi^{-}S_1}(n)-n\lambda_0 S_0(n),$$

$$\frac{\partial S_j(n)}{\partial t}=\Phi^{+}S_{j-1}(n)+\underbracket{\Phi^{-}S_{j+1}}(n)-n\lambda_0 S_j^{(n)}, \tag{2}$$

$$S_j(n)|_{t=-\infty}=\delta_{j0},$$

где $S_j(n)$ означает часть $S(n)$-матрицы с j операторами Φ^{+}, а черта в выражении $\underbracket{\Phi^{-}S_{j+1}}(n)$ — спаривание Φ^{-} с одним из $\Phi^{+}\in S_{j+1}(n)$.

Будем искать решение в виде

$$S_j(n)=f_n(t)\,N\,\frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{t}\Phi^{+}(t')\,dt'\right]^{j}}{j!},$$

где $f_n(t)=S_0(n)$ — неоператорная функция, N — знак нормального произведения. Тогда вся цепочка операторных уравнений (2) вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение для $f_n(t)$

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t}=\left(\underbracket{\Phi^{-}(t)\int\limits_{-\infty}^{t}\Phi^{+}}(t')\,dt'-n\lambda_0\right)f_n(t), \tag{3}$$

$$f_n(t)|_{t=-\infty}=1.$$

Проведем перенормировку, вводя дополнительное условие, определяющее константу λ_0. Для этого рассмотрим однонуклонную задачу для α-го нуклона

$$\frac{\partial S_0(1_\alpha)}{\partial t}=\Big(-g^2\iint d^3x\,d^3y\,f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha)\,f(\vec{y}-\vec{r}_\alpha)\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\,\overline{\varphi}(\vec{x},t)\,\varphi^{+}(\vec{y},t)-\lambda_0\Big)S_0(1_\alpha),$$

$$S_0(1_\alpha)|_{t=-\infty}=1.$$

Взяв

$$\lambda_0=\frac{ig^2}{8\pi}\iint d^3x\,d^3y\,f(\vec{x})f(\vec{y})\,\frac{\exp\{-\mu|\vec{x}-\vec{y}|\}}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \tag{4}$$

получим для $S_0(1_\alpha)$ решение, не зависящее от $\lambda_0^{(\alpha)}$:

$$S_0(1_\alpha)=1. \tag{4a}$$

Последнее равенство имеет ясный физический смысл, а именно так как

$$S_0(1_\alpha) \equiv \langle 1_\alpha | S_0 | 1_\alpha \rangle = \langle 0 | a_\alpha (1 + \bar{a}_\alpha a_\alpha U_0) \bar{a}_\alpha | 0 \rangle =$$

$$= 1 + U_0 = 1, \; U_0 = 0,$$

где U_0 зависит от бозонных сверток, то $S_0(1\alpha)$ означает отсутствие радиационных поправок в однонуклонной перенормированной задаче.

При переходе к точечному взаимодействию $(f(\vec{x} - \vec{r}_\alpha) \to \delta(\vec{x} - \vec{r}_\alpha))$, $\lambda_0 = -i\lambda \to \infty$.

Используя условие перенормировки однонуклонной задачи (4), решение уравнения (3) можно записать для состояния n нуклонов без излучения реальных бозонов в виде

$$S_0(n) = \exp\Big[-g^2 \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2 \sum_{\alpha \neq \beta}^{n} \iint d^3x\, d^3y f \times$$

$$\times (\vec{x} - \vec{r}_\alpha) f(\vec{y} - \vec{r}_\beta)\, \underbrace{\varphi^-(\vec{x}, t_1)\, \varphi^+(\vec{y}, t_2)}\Big] \tag{5}$$

и для состояния с излучением j бозонов:

$$S_j(n) = S_0(n) N \frac{\left[-ig \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \int d^3x f(\vec{x} - \vec{r}_\alpha) \varphi^+(\vec{x}, t')\right]}{j!}. \tag{5a}$$

З а м е ч а н и е 1. Одновременно с решением n-нуклонной задачи мы установили и достаточность для нее однонуклонного условия перенормировки (4). Окончательный результат (5) не зависит от констант перенормировки $\lambda_0^{(\alpha)}$ (бесконечных для точечного взаимодействия).

З а м е ч а н и е 2. Из уравнения (3) для $f_n(t)$ можно видеть, что при однородных начальных условиях $f_n(t)|_{t=-\infty} = 0$ имеется лишь тривиальное решение $f_n = 0$. Отсюда можно показать, что $\langle n | S | m \rangle \neq 0$ лишь при $n \equiv m$, или, что то же самое, при $|m\rangle = \langle n|^+$.

З а м е ч а н и е 3. В данной модели нуклон после акта излучения бозона тождествен нуклону до излучения. Следовательно, в диаграммной технике (Фейнмана) все вершины переставимы по фермионной линии, и точное решение задачи должно совпадать с решением методом теории возмущений уравнений (1).

Действительно, преобразуем неперенормированное решение для $S(n)$:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}(n) = S_0(n) \sum_{i,j}^{\infty} N \times$$

$$\times \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{t} \Phi^+(t')\, dt'\right]^j}{i!} \; \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{t} \Phi^-(t')\, dt'\right]^j}{j!} =$$

$$= S_0(n) N \exp\left[\int\limits_{-\infty}^{t} \Phi^+(t')\, dt'\right] \exp\left[\int\limits_{-\infty}^{t} \Phi^-(t')\, dt'\right] =$$

$$= S_0(n) N \exp\left[-ig \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x f(\vec{x} - \vec{r}_\alpha)\, \varphi(\vec{x}, t')\right].$$

Но согласно зависимости между N и T [5]:

$$T \exp\left[-ig \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x f(\vec{x} - \vec{r}_\alpha)\, \varphi(\vec{x}, t')\right].$$

Потенциал взаимодействия n нуклонов

До сих пор рассматривалась задача рассеяния с начальным условием

$$S(t)|_{t=-\infty} = 1.$$

Поскольку это условие при $t=-\infty$ предполагает частицы свободными (адиабатическая гипотеза в представлении взаимодействия), оно неудобно при изучении связанных состояний. Поэтому для изучения последних необходимо изменить начальные условия.

Рассмотрим задачу о потенциале взаимодействия системы n нуклонов в данной модели. Для этого мы должны выделить (связанное) состояние n нуклонов, т. е. часть S-матрицы с n операторами $\bar{a}_i$ и n операторами a_i без свободных бозонных операторов $S_{00}^{nn} \equiv \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n a_1 \ldots \ldots a_n U_0^{(n)}$. Начальными условиями задачи будут

$$S_{j0}^{kk}|_{t=-\infty} = \delta_{kn}\delta_{j0}\,\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n a_1 \ldots a_n.$$

В силу соотношения

$$\langle k | S_{j0} | k \rangle = \langle k | S_{j0}^{00} | k \rangle + \ldots + \langle k | S_{j0}^{kk} | k \rangle$$

начальные условия можно переписать в виде

$$\langle k | S_{j0}^{kk} | k \rangle |_{t=-\infty} = \langle k | S_{j0} | k \rangle |_{t=-\infty} = \delta_{kn}\delta_{j0}.$$

Из сказанного выше, для любых t имеем

$$\langle k | S_{00}^{kk} | k \rangle = \delta_{kn} S_0(n).$$

При этом потенциал взаимодействия n нуклонов, записанный как среднее оператора энергии взаимодействия, будет

$$V_n = \left\langle n \left| S_{00}^{nn+} i \frac{\partial}{\partial t} S_{00}^{nn} \right| n \right\rangle = \left\langle 0 \left| S_0^{+}(n)\, i \frac{\partial}{\partial t} S_0(n) \right| 0 \right\rangle.$$

Используя решение при начальном условии $S_0(n)|_{t=-\infty} = 1$, т. е. решение (5а), получим (см. также (4))

$$V_n = -\frac{g^2}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta}^{n} \iint d^3x d^3y f(\vec{x} - \vec{r}_\alpha)\, f(\vec{y} - \vec{r}_\beta)\, \frac{\exp\{-\mu |\vec{x} - \vec{y}|\}}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Следовательно, потенциал взаимодействия системы фиксированных нуклонов есть суперпозиция потенциалов Юкавы.

Для точечного скалярного взаимодействия

$$f(\vec{x} - \vec{r}) \to \delta(\vec{x} - \vec{r}),$$

$$V_n = -\frac{g^2}{4\pi} \sum_{\substack{\text{по} \\ (\alpha,\beta) \\ \alpha>\beta}}^{n} \sum_{\text{парам}}^{n} \frac{\exp\{-\mu |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|\}}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}.$$

Для псевдоскалярных мезонов точной модели бесконечно тяжелых нуклонов нет, так как $\bar{\psi}\gamma_s\psi \to 0$ при $M \to \infty$. Но для больших конечных M, т. е. в нерелятивистской области, псевдоскалярная теория приводит к тем же результатам, что и нерелятивистский член псевдовекторной связи $g\bar{\psi}\vec{\sigma}\psi\vec{\nabla}\varphi$ (см. [1]). Поэтому мы можем рассмотреть модель с квазиспином $\vec{\sigma}$ и градиентной связью в рамках решенной модели с форм-фактором

$$f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha) = \vec{\sigma}_\alpha\vec{\nabla}_x\delta(\vec{x}-\vec{r}_\alpha):$$

$$V_n = -\frac{g^2}{4\pi}\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\\ \alpha>\beta}} \vec{\sigma}_\alpha\vec{\nabla}_{r_\alpha}\vec{\sigma}_\beta\vec{\nabla}_{r_\beta}\frac{\exp\{-\mu|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. И. Григорьеву за непосредственное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, тт. 1, 2. Физматгиз, М., 1957.
2. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. М. — Л., 1961.
3. Боголюбов Н. Н., Широков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. Физматгиз, М., 1957.
4. Григорьев В. И. ЖЭТФ, **30**, 843, 1956. Вавилов Б. Т., Григорьев В. И. ЖЭТФ, **39**, 794, 1960.
5. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.

Поступила в редакцию
16. 10 1962 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой
теории