Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1963

Ю. П. РЫБАКОВ

О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрено нелинейное уравнение скалярного поля с произвольной нелинейностью, допускающей существование частицеподобных решений. Показано, что требование устойчивости безузлового частицеподобного решения приводит к ряду ограничений на нелинейную функцию. Эти ограничения сформулированы в виде необходимых и достаточных условий устойчивости.

Рассмотрим нелинейное скалярное поле, описываемое лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\{\dot{\psi}\dot{\psi}^* - \nabla\psi\nabla\psi^* - m^2\psi\psi^* + m^2F(\psi\psi^*)\},$$

и предположим, что функция $F(\psi\psi^*)$ такова, что существуют частицеподобные решения вида $\psi_0(r, t) = u(r)e^{-i\varepsilon t}$. (Условием частицеподобности является регулярность и квадратичная интегрируемость во всем пространстве: физически это означает, что поле локализовано практически в очень малой области пространства, представляя тем самым некоторое самостоятельное образование, по многим своим свойствам похожее на частицу.) Простейшим примером подобного нелинейного поля может послужить поле с нелинейностью $F(v) = \frac{\lambda}{2}v^2$, где $\lambda > 0$ (в случае же $\lambda < 0$ частицеподобных решений не существует).

Частицеподобные решения в таком поле были изучены в работе [1]. В работе [2] с использованием метода А. М. Ляпунова была исследована устойчивость этих решений и было показано, что узловые частицеподобные решения (для которых $u(r)$ имеет нули) неустойчивы независимо от выбора нелинейности $F(v)$. Безузловое же решение ($u(r) > 0$) оказалось неустойчивым только по отношению к действительным возмущениям амплитуды поля и устойчивым по отношению к мнимым возмущениям (возмущенное решение искалось в виде $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t)\,e^{-i\varepsilon t}$, где φ — амплитуда поля). Такая условная устойчивость безузловых частицеподобных решений наводит на мысль: нельзя ли так ограничить класс нелинейных функций $F(v)$, чтобы безузловое решение было устойчивым полностью.

Для решения этой задачи обратимся к методу исследования устойчивости решений А. М. Ляпунова. Доказательство устойчивости некоторого решения уравнений поля состоит, по Ляпунову, в отыскании такого знакоопределенного функционала V, зависящего от возмущений поля, что его производная по времени $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений поля имеет противоположный V знак или же равна нулю $\left(\frac{dV}{dt}\leqslant 0\right)$.

Имея в виду симметрию уравнений поля во времени, разумно искать V в виде комбинации интегралов движения, т. е. потребовать, чтобы $\frac{dV}{dt}=0$. Если же мы учтем, что исследуемое решение должно быть экстремалью функционала V, то придем к следующей комбинации интегралов энергии и «заряда» *:

$$V[\varphi]-V[u]=(\mathcal{E}[\varphi]-\varepsilon Q[\varphi])-(\mathcal{E}[u]-\varepsilon Q[u])=$$

$$=\frac{1}{2}\int d\tau\{|\dot{\varphi}|^2+|\nabla\varphi|^2+(m^2-\varepsilon^2)\cdot|\varphi|^2-m^2F(|\varphi|^2)\}-$$

$$-\frac{1}{2}\int d\tau\{(\nabla u)^2+(m^2-\varepsilon^2)u^2-m^2F(u^2)\}.$$

Именно такой функционал с $F(v)=\frac{\lambda}{2}v^2$ и исследовался в работе [2], где было показано, что для устойчивости решения $\varphi=u$ необходимо и достаточно, чтобы стационарная точка $\varphi=u$ функционала $V[\varphi]$ была минимумом. Для исследования функционала $V[\varphi]$ разобьем его на две части: $V_{\text{кин}}=\frac{1}{2}\int d\tau\,\{|\dot{\varphi}|^2\}$, которая заведомо положительна, и

$$V_{\text{пот}}\equiv W[\varphi]=\frac{1}{2}\int d\tau\{|\nabla\varphi|^2+(m^2-\varepsilon^2)|\varphi|^2-m^2F(|\varphi|^2)\}.$$

Эти две части можно рассматривать отдельно, независимо друг от друга, так как уравнение поля имеет второй порядок по времени, а значит, $\dot{\varphi}$ и φ как функции координат не связаны между собой.

Запишем теперь уравнение Эйлера для функционала W. Оно имеет следующий вид:

$$\nabla^2\varphi_0=\varphi_0[m^2-\varepsilon^2-m^2F'(|\varphi_0|^2)]. \tag{1}$$

Как и предполагалось, в сферически-симметричном случае решением его будет $\varphi_0=u(r)$. Так как мы задались целью обеспечить устойчивость этого решения, то должны вывести некоторые достаточные условия минимума функционала W. Запишем для этого так называемые уравнения Якоби, которые представляют собой уравнения в вариациях для уравнения (1):

$$\begin{cases}\nabla^2 v_1=v_1(m^2-\varepsilon^2-m^2F'(u^2)-2m^2F''(u^2)u^2),\\ \nabla^2 v_2=v_2(m^2-\varepsilon^2-m^2F'(u^2)).\end{cases}$$

---

* Пока нет внешнего электромагнитного поля, о заряде можно говорить лишь условно.

Здесь v_1 и v_2 являются вариациями соответственно действительной и мнимой частей амплитуды поля φ. В сферически-симметричном случае эти уравнения запишутся так:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 z_1}{d\rho^2} = z_1 \left(1 - \dfrac{m^2}{m^2 - \varepsilon^2} F'(u^2) - \dfrac{m^2}{m^2 - \varepsilon^2} 2F''(u^2)\, u\right), \\ \dfrac{d^2 z_2}{d\rho^2} = z_2 \left(1 - \dfrac{m^2}{m^2 - \varepsilon^2} F'(u^2)\right), \end{cases}$$

де $z_1 = rv_1$, $z_2 = rv_2$, $\rho = r\sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$, $\varepsilon < m$.

Воспользуемся теперь достаточными условиями минимума, предложенными Якоби ([3], стр. 115). Они состоят в том, что наряду с выполнением усиленного условия Лежандра (что было доказано в [2]) исследуемая экстремаль не должна иметь сопряженных точек, т. е. z_1 и z_2 не должны иметь нулей в интервале $0 < r < +\infty$.

Чтобы выяснить, когда это будет возможным, заметим, что очевидным решением уравнения Якоби для z_2 будет $z_2 = ru$, где $(ru) > 0$ в рассматриваемом интервале. Этот факт является отражением того обстоятельства, что W имеет минимум по отношению к чисто мнимым возмущениям. Если теперь окажется, что и $z_1 > 0$, то условия Якоби будут выполнены. Но легко видеть, что условие $z_1 > 0$ выполняется, если $z_1 \geqslant z_2$. Чтобы выяснить, когда это будет так, воспользуемся теоремой С. А. Чаплыгина [4], которая в применении к уравнению вида $y''(x) - p(x)\, y(x) = 0$ гласит следующее:

если существует функция $z(x)$, такая, что $z(x_0) = y(x_0)$, $z'(x_0) = y'(x_0)$, и, кроме того, удовлетворяющая дифференциальному неравенству $z'' - pz < 0$, то $z - y < 0$.

Пределом применимости этой теоремы является то значение x, при котором функция y обращается в нуль.

В нашем случае

$$p = 1 - \frac{m^2}{m^2 - \varepsilon^2} F'(u^2) - \frac{m^2}{m^2 - \varepsilon^2} F''(u^2)\, u^2,$$

$$z = z_2, \quad y = z_1, \quad x = \rho, \quad x_0 = 0,$$

неравенство Чаплыгина выглядит так:

$$\frac{ru}{m^2 - \varepsilon^2} F''(u^2)\, u^2 < 0, \quad \text{или} \quad F''(u^2) < 0.$$

Последнее неравенство и будет достаточным условием устойчивости исследуемого решения, если удастся обосновать применимость теоремы Чаплыгина. Трудность состоит в том, что с помощью теоремы Чаплыгина мы хотим получить неравенство $y > 0$, которое в свою очередь само является условием применимости этой теоремы. Чтобы разорвать логический круг, заметим, что в силу начальных условий $y(0) = z(0) = 0$ и $y'(0) = z'(0) = \alpha > 0$ в окрестности $(.)\, x = 0$ функция $y(x)$ заведомо не равна нулю. Поэтому найдется такое x_1, что внутри интервала $0 < \delta < x < x_1$ теорема Чаплыгина будет применима, а значит, $y(x) > z(x) > 0$. Но тогда, в силу непрерывности $y(x)$, существует такое x_2, что $y(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$, т. е. теорема Чаплыгина применима и на этом интервале, и т. д.

Обосновав таким образом применимость теоремы Чаплыгина, заметим, что полученное нами неравенство $F''(u^2) < 0$ является слишком сильным достаточным условием минимума функционала W. Можно показать, что достаточно потребовать выполнимости этого условия не на всем интервале изменения $\rho \in (0,+\infty)$, а лишь слева от точки перегиба функции $z_1(\rho)$. Это вытекает из того, что функция z_1 не может иметь корней справа от точки перегиба, так как в этом случае асимптотика ее была бы $\sim e^{+\rho}$, а это совершенно исключается, так как уравнения Якоби есть уравнения в вариациях, что предполагает ограниченность $z_1(\rho)$ (в противном случае уравнения Якоби не имели бы смысла).

Итак, достаточным условием устойчивости безузлового частицеподобного решения $u(r)e^{-i\varepsilon t}$ является следующее ограничение на нелинейную функцию $F(u^2)$:

$F''(u^2) < 0$ при $0 < r < r_1$, где r_1 — корень уравнения

$$p(r) = 0. \tag{2}$$

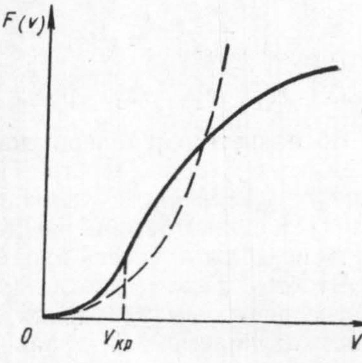

Рис. 1

Получим теперь необходимое условие устойчивости нашего решения. Для этого рассмотрим частный случай возмущений вида $\varphi = cu$, где $c=\text{const}$, и потребуем, чтобы приращение функционала $W[\varphi]$ при таких возмущениях было положительным. Тогда, используя разложение $W[cu]$ в ряд Тейлора вблизи $c^2=1$ и учитывая, что u удовлетворяет уравнению (1), найдем:

$$W[cu] - W[u] = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{-m^2 \frac{1}{2}(c^2-1)^2 u^4 F''(u^2) + \ldots\right\} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int d\tau \{u^4 F''(u^2)\} < 0. \tag{3}$$

Это неравенство и будет необходимым условием устойчивости безузлового частицеподобного решения. Легко видеть, что из выполнимости условия (2) автоматически следует справедливость (3). Действительно, основной вклад в интеграл (3) вносится областью $0 < r < r_1$, где $F''(u^2) < 0$. Область же $r > r_1$ дает гораздо меньший вклад в силу быстрого спадания поля $u(r) \underset{r>r_1}{\sim} \frac{1}{r} e^{-\sqrt{m^2-\varepsilon^2}\,r}$. Из условий (2) и (3) видно, что при амплитуде поля, превышающей некоторое значение, нелинейная функция — $F(v)$ должна быть выпуклой. Примерный вид такой нелинейности изображен на рисунке. Пунктиром изображена простейшая нелинейность $F(v) = \frac{\lambda}{2} v^2$, не удовлетворяющая условиям устойчивости, так как $F'' = \lambda > 0$.

Чтобы подвести итог, отмечу, что имеется, конечно, условие Якоби, из которого мы и исходили и которое необходимо и достаточно для устойчивости решения. Но это условие дает возможность установить устойчивость или неустойчивость уже известного решения. Нашей же целью было найти «рабочие» условия устойчивости, с помощью которых можно было бы нащупать такой класс нелинейных уравнений, безузловые решения которых уже заведомо были бы устойчивы.

В заключение мне хочется выразить глубокую признательность профессору Я. П. Терлецкому за постоянную помощь в работе и неослабный интерес к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
2. Рыбаков Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 4, 24, 1962.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз. М., 1961.
4. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. — Л., 1950.

Поступила в редакцию
27. 11 1962 г.

Кафедра
статистической физики и
механики