

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4 — 1963

В. В. БОЙКО

СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ В СИСТЕМЕ С КВАЗИПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассматривается система, состоящая из неавтономного генератора и перемножителя, опорным сигналом которого являются автоколебания генератора, задержанные по фазе. Система синхронизируется на частоте, близкой к удвоенной собственной частоте автоколебаний. Рассмотрение проведено методом медленно меняющихся амплитуд в предположении достаточной малости шумовой помехи.

Введение

Хорошо известны и достаточно подробно изучены так называемые регенеративные делители частоты [1, 6, 7], для которых характерно наличие своеобразной обратной связи, петля которой замыкается на элемент со свойствами перемножителя. Специфичность такой обратной связи состоит в том, что внешнее воздействие перестает быть аддитивным и на систему действует результат перемножения внешнего сигнала и сигнала обратной связи. Фактически это означает, что система приобрела параметрические свойства: она неустойчива в определенных частотных областях с характерным срывом колебаний на границе области, существует также критический порог амплитуды внешнего воздействия, ниже которого система не самовозбуждается. Наличие порога самовозбуждения является недостатком такого рода делителей частоты и не позволяет использовать их при малых амплитудах внешней силы.

От указанного недостатка свободна система, структурно аналогичная регенеративному делителю с той разницей, что в ней имеется вместо пассивного контура генератор, автоколебания которого поданы на перемножитель в качестве опорного сигнала. На рис. 1 изображена структурная схема такой системы, где обозначены: P — перемножитель, CG — синхронный гетеродин, K — линейный четырехполюсник в цепи обратной связи, Φ — фазовращатель.

Поскольку на перемножителе всегда имеется достаточно большой опорный сигнал $F(t)$, преобразование частоты будет иметь место при любых малых амплитудах внешней силы $f(t)$. Преобразованный сигнал $y(t)$ в свою очередь воздействует на гетеродин и при определенных частотных соотношениях может его захватить. Очевидно, что система будет синхронизоваться на частоте, близкой к $2\omega_0$.

Таким образом, в данной системе режим деления частоты подобен синхронизации на обертоном в обычном автогенераторе [5] с той разницей, что здесь синхронный гетеродин захватывается на частоте, близкой к его собственной, и, кроме того, имеются эффекты, связанные с наличием обратной связи. В частности, регулируя определенным образом

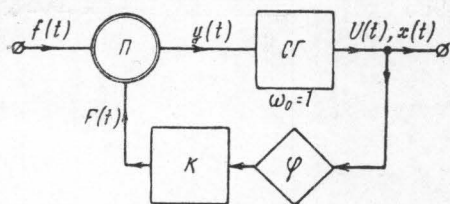


Рис. 1

при необходимости автоматически усиление и фазовую характеристику в канале обратной связи, можно в широких пределах изменять характеристики синхронного режима без изменения условий работы самого автогенератора. Это существенное достоинство рассматриваемой системы, приводящее к большей (по сравнению с автогенератором, синхронизуемым на обертоном)

полосе синхронного режима. При этом полоса синхронизма определяется в основном величиной опорного сигнала в канале обратной связи, а не характером нелинейности в автогенераторе. Таким образом, данное устройство может применяться как для деления частоты, так и в системах когерентного приема, фазовой селекции, автопараметрических и следящих фильтрах более эффективно, чем обычный автогенератор.

Укороченные уравнения системы

Ограничимся рассмотрением автогенератора, работающего в мягком режиме; его уравнение, приведенное к собственному времени ($\omega_0 = 1$), имеет вид

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - 2\delta_0 \left(1 - \frac{4}{U_0^2} U^2 \right) \frac{dU}{dt} + U = y(t). \quad (1)$$

Здесь U — напряжение на емкости контура автогенератора, U_0 — стационарная амплитуда его автоколебаний в отсутствии внешнего воздействия, δ_0 — эквивалентное затухание.

На автогенератор воздействует сигнал $y(t)$ с выхода перемножителя. Реальный перемножитель (смеситель) дает на своем выходе кроме произведения двух функций сами эти функции:

$$y(t) = S_0 f(t) F(t) + S_1 F(t) + S_2 f(t).$$

Рациональным конструированием (балансный и кольцевой модуляторы) можно добиться, чтобы S_1 и $S_2 \ll S_0$. Поскольку нас будет интересовать случай малого внешнего воздействия, последним членом можно пренебречь, так что

$$y(t) = [S_1 + S_0 f(t)] F(t). \quad (2)$$

Опорный сигнал $F(t)$ образуется из напряжения $U(t)$, прошедшего через усилитель K . Полагаем этот усилитель безынерционным с коэффициентом усиления k_0 . В цепи обратной связи имеется также регулируемое запаздывание φ . В этих предположениях сигнал обратной связи, нормированный к стационарной амплитуде автоколебаний, выразится так:

$$F(t) = \frac{k_0}{U_0} U(t - \varphi). \quad (3)$$

В частности, когда нет запаздывания, уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - 2\delta_0 \left(1 - \frac{4}{U_0^2} U\right) \frac{dU}{dt} + \left[1 - \frac{k_0}{U_0} (S_1 + S_0 f(t))\right] U = 0.$$

Таким образом, за счет обратной связи через перемножитель внешнее воздействие входит в уравнение параметрически. В этом смысле система может считаться параметрической, хотя в самом контуре автогенератора и отсутствует физический параметр (например, емкость), модулируемый во времени. Поскольку к параметрическому характеру системы приводит наличие обратной связи через перемножитель, такая обратная связь названа квазипараметрической.

Очевидно, что синхронный с внешним воздействием режим следует искать в первой области параметрической неустойчивости, в которой частота внешней силы близка к удвоенной собственной частоте системы. Учитывая также шум, который будем считать белым, положим

$$f(t) = E \cos 2(1 + 2\nu)t + N(t). \quad (4)$$

Введем новую безразмерную переменную:

$$x(t) = \frac{U(t)}{U_0}. \quad (5)$$

Считая расстройку малой ($\nu \ll 1$) и переходя к новому собственному времени $(1 + 2\nu)t$, которое будем по-прежнему обозначать через t , получим уравнение системы

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\delta_0 (1 - 4x^2) \dot{x} + (1 - 2\nu)x &= \\ = k[2p + \lambda \cos 2t + \xi(t)]x(t - \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$k = k_0 S_0, \quad p = \frac{S_1}{2S_0 U_0}, \quad \lambda = \frac{E}{U_0}, \quad \xi(t) = \frac{N(t)}{U_0}.$$

Как и обычно [3, 5], в этом уравнении не учтены собственные флуктуации автогенератора, поскольку они мало сказываются, если внешнее воздействие имеет достаточную для режима синхронизации величину. Если система близка к томсоновской, т. е.

$$k \langle \xi^2 \rangle, k\rho, k\lambda, \nu \ll \delta_0 \ll 1,$$

то решение уравнения (6) будем искать в виде

$$x = A \cos(t - \vartheta) = A \cos \alpha, \quad (7)$$

где A и ϑ — медленные функции времени, так что

$$\dot{x} = -A \sin \alpha. \quad (8)$$

Для амплитуды и фазы имеем обычные [2, 3] уравнения

$$\dot{A} = -(\ddot{x} + x) \sin \alpha, \quad (9)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{A} (\ddot{x} + x) \cos \alpha.$$

Полагаем задержку φ в цепи обратной связи малой по сравнению с временем релаксации амплитуды и фазы, так что

$$x(t - \varphi) = A \cos(\alpha - \varphi) = x \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi. \quad (10)$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$\ddot{x} + x = [2\delta_0(1 - 4x^2) - k \sin \varphi (2p + \lambda \cos 2t + \xi)] \dot{x} + [2v + k \cos \varphi (2p + \lambda \cos 2t + \xi)] x. \quad (11)$$

Воспользовавшись выражениями (9), получим обычным путем из (11) укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \delta_0(1 - A^2 - kp \sin \varphi) A + \frac{k\lambda}{4} A \sin \Phi - \frac{kA}{2} \xi(t) [\sin \varphi + \sin(2\alpha - \varphi)], \\ \dot{\Phi} &= v + kp \cos \varphi + \frac{k\lambda}{4} \cos \Phi + \frac{k}{2} \xi(t) [\cos \varphi + \cos(2\alpha - \varphi)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\Phi = 2v + \varphi$.

В уравнениях (12) флуктуационные члены пока не упрощены, так как шум является белым, и необходимо предварительно оценить влияние различных участков шумового спектра на флуктуации в системе.

Отметим некоторые особенности уравнений (12). Во-первых, характер явлений в системе зависит от величины фазового сдвига в петле обратной связи. Выбирая различные значения φ , можно управлять некоторыми характеристиками синхронного режима. Во-вторых, фазовое уравнение не зависит от амплитуды, следовательно, жесткость фазы определяется только внешним воздействием; кроме того, флуктуации амплитуды не сказываются на статистических характеристиках фазы.

Стационарный режим в отсутствие шума

Полагая в (12) $\xi = 0$, получим обычным путем стационарные значения амплитуды и фазы:

$$A_0^2 = 1 - kp \sin \varphi + \frac{k\lambda}{4\delta_0} \sqrt{1 - (\Delta + \Delta_0 \cos \varphi)^2}, \quad (13)$$

$$\cos \Phi_0 = \cos(2\vartheta_0 + \varphi) = -\Delta - \Delta_0 \cos \varphi. \quad (14)$$

Здесь введены обобщенные расстройки:

$$\Delta_0 = \frac{4p}{\lambda}, \quad \Delta = \frac{4v}{k\lambda}.$$

Графики амплитуды для двух значений фазового сдвига в канале обратной связи приведены на рис. 2.

Исследуем полученное решение на устойчивость. Как известно [2], движение устойчиво, если стационарные амплитуды и фаза обладают абсолютной устойчивостью, для чего необходимо одновременное выполнение следующих неравенств (с учетом независимости фазового уравнения от амплитуды):

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial A}(A_0, \vartheta_0) + \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi}(A_0, \vartheta_0) < 0,$$

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial A}(A_0, \vartheta_0) \cdot \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi}(A_0, \vartheta_0) > 0.$$

Вычислив соответствующие производные и подставив в них A_0 и θ_0 из (13) и (14), получим

$$-2\delta_0(1 - kp \sin \varphi) - R < 0,$$

$$\left[2\delta_0(1 - kp \sin \varphi) + \frac{R}{2} \right] \frac{R}{2} > 0.$$

Здесь

$$R = \sqrt{k^2 \lambda^2 - 16(v + kp \cos \varphi)^2}.$$

Таким образом, синхронный режим устойчив во всей полосе расстроек, где $R > 0$.

Наличие аддитивной обратной связи приводит к смещению полосы синхронизма относительно собственной частоты системы, причем этот

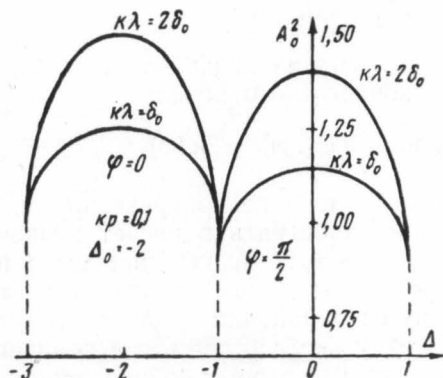


Рис. 2

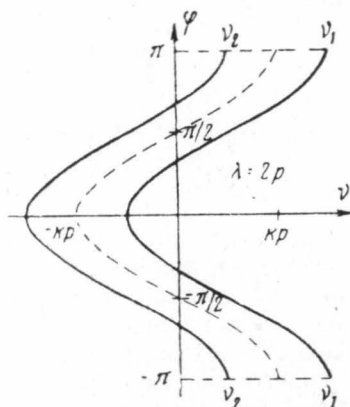


Рис. 3

эффект зависит от фазового сдвига φ . Границы полосы синхронного режима находятся из условия обращения в нуль подкоренного выражения в R :

$$\nu_1 = \frac{k\lambda}{4} - kp \cos \varphi,$$

$$\nu_2 = -\frac{k\lambda}{4} - kp \cos \varphi.$$

При этом ширина полосы синхронизма остается постоянной при изменении φ

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{k\lambda}{2}$$

и определяется амплитудой внешнего воздействия. На рис. 3 приведены графики ν_1 и ν_2 для $\lambda = 2\rho$.

Стационарный режим при малых шумах

Для упрощения флуктуационных членов в уравнениях (12) следует оценить вклад отдельных участков спектра шума в синхронизирующий сигнал $y(t)$. Поскольку при захватывании автогенератора основную роль играет полоса спектра вблизи его собственной частоты

[3, 8], то следует учесть лишь те участки белого спектра, которые после преобразования в перемножителе попадут в диапазон частот, близких к собственной. Очевидно, что кроме шумов, близких по частоте к основному сигналу $\lambda \cos 2t$, на вход синхронного гетеродина пройдет также и низкочастотный шум. Шумом на собственной частоте можно пренебречь, поскольку мы предполагаем конструкцию перемножителя достаточно рациональной, так что аддитивное прохождение сигналов мало.

Учитывая низкочастотный шум и считая шум на двойной частоте узкополосным [8], получим

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1(t) \cos 2t + \xi_2(t) \sin 2t. \quad (15)$$

Здесь $\xi_i(t)$ — независимые случайные функции, медленно изменяющиеся по сравнению с периодом автоколебаний, имеющие нулевое среднее значение

$$\langle \xi_0 \rangle = \langle \xi_1 \rangle = \langle \xi_2 \rangle = 0.$$

Спектральную плотность мощности шума на низкой частоте будем полагать отличной от мощности высокочастотного шума:

$$S(\xi_0, \omega) = 2\kappa_0(\omega); \quad S(\xi_1, \omega) = S(\xi_2, \omega) = 2\kappa(\omega).$$

Автокорреляционные функции этих шумов пока не конкретизируем.

Возникает вопрос: стоит ли вообще принимать в расчет низкочастотный шум, если его можно отфильтровать на входе системы с помощью резонансного контура? Однако эксперимент показывает, что имеющиеся в схеме низкочастотные шумы и наводки в действительности играют заметную роль. Если к тому же учесть, что в реальных диодах, ламповых или полупроводниковых, из которых собран перемножитель, низкочастотный фликкер-шум $1/f$ является превалирующим, то необходимость учета этого шума становится очевидной. Разумеется, тот дробовой шум, который возникает в нелинейностях перемножителя, нельзя считать полностью аддитивным с внешним воздействием. Однако этой неаддитивностью можно пренебречь, если внешняя сила и сигнал $F(t)$ достаточно велики по сравнению с шумом.

Используя (15), упрощаем обычным способом [3] в (12) флуктуационные члены, после чего получим:

$$\dot{A} = \delta_0(1 - A^2 - pk \sin \varphi) A + \frac{kA}{4}(\lambda + 2\xi_1) \sin \Phi - \frac{kA}{2}(\xi_0 \sin \varphi + \xi_2 \cos \Phi) \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = \nu + pk \cos \varphi + \frac{k}{4}(\lambda + 2\xi_1) \cos \Phi + \frac{k}{2}(\xi_0 \cos \varphi + \xi_2 \sin \Phi).$$

Замечаем, что флуктуации, вызываемые низкочастотным шумом, зависят от задержки в цепи обратной связи и могут быть исключены из амплитудного или фазового уравнений путем соответствующего выбора φ .

В силу нелинейности уравнений (16) их исследование при произвольной величине шума затруднительно. Поэтому в дальнейшем будем предполагать шум малым по сравнению с регулярной составляющей внешней силы:

$$\langle \xi_0^2 \rangle, \quad \langle \xi_1^2 \rangle = \langle \xi_2^2 \rangle \ll \lambda^2. \quad (17)$$

При этом в уравнениях (16) шум будет учитываться членами второго порядка малости [4]. Тогда амплитуда и фаза будут отличаться от стационарных лишь малыми флуктуационными поправками:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + a(t), \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \theta(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$a \ll 1, \quad \theta \ll \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя (18) в уравнения (16) и ограничиваясь членами второго порядка малости, при нулевых расстройках получим

$$\begin{aligned} \dot{a} + \left(2\delta_0 + \frac{k\lambda}{2}\right)a &= -\frac{k}{2}(\xi_0 \sin \varphi - \xi_1), \\ \dot{\theta} + \frac{k\lambda}{2}\theta &= \frac{k}{2}(\xi_0 \cos \varphi + \xi_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, в середине полосы синхронизма амплитудные флуктуации определяются синфазной составляющей высокочастотного шума, а фазовые — его квадратурной составляющей. Низкочастотный шум, по выбору, может быть подавлен для фазы или амплитуды.

Поскольку уравнения (19) являются линейными, к ним применимы методы корреляционной теории [3, 4]. При выводе уравнений (16) на случайные функции ξ_i было наложено единственное условие: их время автокорреляции значительно больше периода автоколебаний. Это означает, что спектр этих функций расположен в области низких частот и ширина его значительно меньше собственной частоты автоколебаний. Тем не менее, этот спектр может быть значительно шире полосы захватывания, и, следовательно, время корреляции функций ξ_i будет значительно меньше времени релаксации амплитуды и фазы. Поэтому без ограничения общности можно считать функции ξ_i в уравнениях (19) δ -коррелированными:

$$\langle \xi_0 \xi_{0\tau} \rangle = \kappa_0 \delta(\tau); \quad \langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = \kappa \delta(\tau).$$

При этом условии легко получаем из (19) значения среднеквадратичных флуктуаций амплитуды и фазы

$$\begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= \frac{k^2}{4\delta_0 + k\lambda} (\kappa_0 \sin^2 \varphi + \kappa), \\ \langle \theta^2 \rangle &= \frac{k}{\lambda} (\kappa_0 \cos^2 \varphi + \kappa). \end{aligned} \quad (20)$$

Полученные формулы хорошо согласуются с результатами работ [3, 5], отличаясь присутствием величин k и φ , обусловленных обратной связью. Отмечаем, что с возрастанием обратной связи флуктуации на выходе системы увеличиваются. Как и в обычном автогенераторе, увеличение λ сопровождается ростом жесткости A и ϑ , причем жесткость фазы растет быстрее, чем амплитудная жесткость. Таким образом, в отношении флуктуаций рассматриваемая система качественно мало отличается от обычного автогенератора в режиме захватывания.

Эксперимент

Поскольку в данной системе интересна возможность подавления низкочастотного шума в фазовых флуктуациях, была предпринята экспериментальная проверка этого вывода. Схема эксперимента показана на рис. 4. Низкочастотный шум с генератора шума ГШ добавляется в сумматоре Σ к высокочастотному сигналу. Одновременно сигнал с ГСС запускает импульсный генератор меток ГМ, подаваемых на z -усилитель осциллографа. Метки формируются в моменты прохождения синусоиды $\lambda \cos 2t$ через нуль. Поскольку на горизонтальную развертку подается синусоида $A \cos \alpha$, то в отсутствие шума на экране осциллографа видны две точки, расстояние между которыми меняется в зависимости от расстройки. При нулевой расстройке обе точки сливаются в одну, за пределами полосы синхронизма они расплываются в

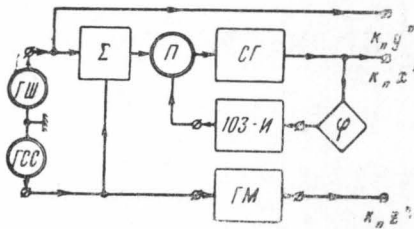


Рис. 4

линию. Размытость точек по горизонтали имеет место и при фазовых флуктуациях, увеличиваясь с ростом шума. Если одновременно шум подавать на вертикальную развертку, то при флуктуациях метки будут отклоняться одновременно по вертикали и за счет флуктуаций фазы по горизонтали, образуя крестообразную фигуру с плавно уменьшающейся к краям яркостью. В зависимости от интенсивности фазовых флуктуаций горизон-

тальный размер фигуры будет различным, увеличиваясь с ростом флуктуаций фазы.

С целью ослабления амплитудных флуктуаций в гетеродине были приняты обычные меры по стабилизации его амплитуды. Фазовращатель в цепи обратной связи позволял изменять фазу от 0 до 180° . После фазовращателя использовался стандартный широкополосный усилитель 103-И, позволявший в широких пределах регулировать k_0 . Собственная частота гетеродина составляла 100 кГц. В качестве перемножителя использовался кольцевой модулятор на вакуумных диодах. Генератором шума служил выход усилителя низкой частоты высокочувствительного связного приемника, и при этом полоса шума ограничивалась частотой 5 кГц, позволяя искусственно имитировать интенсивный фликкер-шум. Как показали измерения, полоса захватывания в отсутствие шума линейно увеличивается с ростом внешнего воздействия или коэффициента усиления в цепи обратной связи. Так, при сигналах порядка 0,01 в и $k_0 = 10$ полоса синхронизма составляла 10 кГц, или 10% от собственной части генератора.

Все основные теоретические выводы как для регулярного режима, так и при воздействии шумов, полностью подтвердились экспериментально. На рис. 5 показаны фотографии с экрана осциллографа. Верхний ряд соответствует отсутствию фазового сдвига в цепи обратной связи.

Нижний ряд соответствует $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Первый и последний снимки в каждом ряду сделаны при разной мощности шума и нулевой расстройке; средние снимки соответствуют расстройке, отличной от нулевой. Отношение сигнал/шум для первых снимков равнялось приблизительно 4, а для последних — 2 при регулярном сигнале около 0,1 в. Отметим, что при $\varphi = 0$ фазовые флуктуации довольно интенсивны, тогда

как при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ они практически неощутимы, хотя интенсивность шума и осталась прежней. Таким образом, с помощью описанной методики качественно подтверждены выводы, следующие из формул (20).

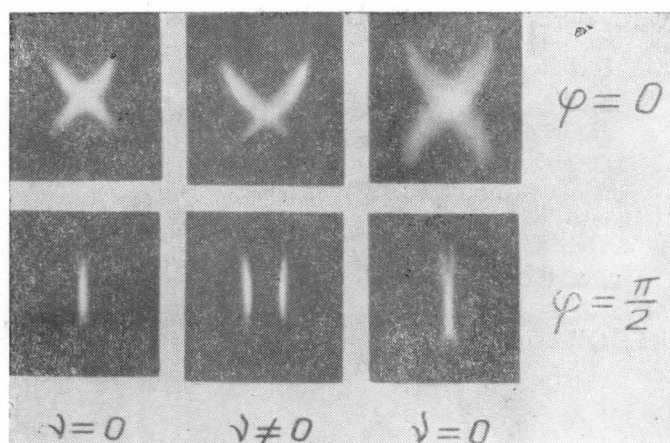


Рис. 5

Выводы

Показана возможность синхронного режима в автогенераторе с квазипараметрической обратной связью.

В рассмотренной системе установление фазы и ее флуктуации не зависят от поведения амплитуды.

Основные отличия характеристик синхронного режима от обычных связаны с квазипараметрической обратной связью: с увеличением k флуктуации в системе возрастают, выбором φ можно исключить влияние низкочастотного шума на флуктуации фазы или амплитуды.

Эксперимент подтвердил основные теоретические выводы.

В заключение выражаю благодарность профессору В. В. Мигулину и доценту Ю. М. Азьяну за постоянное внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич А. А. Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. ГИТТЛ, 1956.
2. Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике. Госэнергоиздат, 1954.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. «Советское радио», 1961.
4. Рытов С. М. ЖЭТФ, 29, № 3, 304, 1955.
5. Акопян И. Г., Ланда П. С. «Радиотехника и электроника», № 8, 1285, 1962.
6. Федосова Т. С., Самойло К. А. «Радиотехника и электроника», № 1, 43, 1959.
7. Демьянченко А. Г., Евтянов С. И. «Радиотехника и электроника», № 10, 25, 1962.
8. Раевский С. Я., Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», № 4, 507, 1958.

Поступила в редакцию
24. 12 1962 г.

Кафедра
теории колебаний