

В. В. КОМАРОВ, А. М. ПОПОВА

ДИАГРАММНЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ НУКЛОНА НА НУКЛОНЕ

Методом суммирования диаграмм теории возмущений получено уравнение для амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне, совпадающее с уравнением Шредингера для системы двух нуклонов и выражение для амплитуды S -рассеяния нуклона на нуклоне в приближении нулевого радиуса действия ядерных сил, согласующееся с аналогичным выражением в теории Бете — Пайрлса.

Амплитуду рассеяния нуклона на нуклоне можно получить, производя суммирование бесконечного ряда диаграмм теории возмущений. Рассмотрим для простоты рассеяние двух идентичных частиц, не имеющих спина в приближении нулевого радиуса действия сил.

Амплитуда рассеяния нуклона на нуклоне в этом случае может быть представлена в виде следующей суммы диаграмм. Значение каждой диаграммы должно определяться матричным элементом $(\Psi_m^* | S | n^0)$, где m — конечное состояние системы, n^0 — начальное состояние системы, S — матрица рассеяния. Поскольку для S -матрицы имеется дифференциальное уравнение $\frac{i\partial S}{\partial t} = V(t) S$ (где $V(t)$ — взаимодействие, описывающее рассеяние нуклонов), ее можно представить в виде $S = 1 + S_1 + S_2 + \dots$, где

$$\begin{aligned}
 S_0 &= 1, & S_1 &= -i \int_{-\infty}^t V(t') dt', \\
 S_2 &= \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' T(V(t') V(t'')), & (1) \\
 &\dots \dots \dots \\
 S_n &= (-i)^n \int_{-\infty}^t V(t') dt' \int_{-\infty}^{t'} V(t'') dt'' \dots \int_{-\infty}^{t^{n-1}} V(t^n) dt^n.
 \end{aligned}$$

Введем операторы рождения и исчезновения нуклонов

$$a^+(\vec{k}, t) = a^+(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \text{ и } a(\vec{k}, t) = a(\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}} t}$$

такие, что $a^+(\vec{k}, t)$, действуя на функцию вакуума ψ_0 , дает функцию нуклона с импульсом \vec{k} , а $a(\vec{k}, t)$, действуя на функцию нуклона, дает функцию вакуума

$$a^+(\vec{k}, t) \psi_0 = e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \psi_N(\vec{k}), \quad (2)$$

$$a(\vec{k}, t) [a^+(\vec{k}, t) \psi_0] = \psi_0.$$

Для того чтобы рассмотреть переход двух нуклонов в дейтерон и последующий распад дейтерона на нуклон, необходимо ввести также операторы рождения и уничтожения дейтерона $b^+(\vec{p}, t)$ и $b(\vec{p}, t)$ такие, что

$$b^+(\vec{p}, t) \psi_0 = e^{iE p t} \psi_d(\vec{p}), \quad (3)$$

$$b(\vec{p}, t) [b^+(\vec{p}, t) \psi_0] = \psi_0.$$

Взаимодействие, описывающее образование дейтерона с импульсом \vec{p} и двух нуклонов с импульсами \vec{k} и $(\vec{p} - \vec{k})$ и затем распад дейтерона на нуклоны, следует записать в виде

$$V(t) = -g \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \sum_{\vec{p}, \vec{k}} \{b^+(\vec{p}, t) a(\vec{k}, t) a(\vec{p} - \vec{k}, t) + a^+(\vec{k}, t) a^+(\vec{p} - \vec{k}, t) b(\vec{p}, t)\}. \quad (4)$$

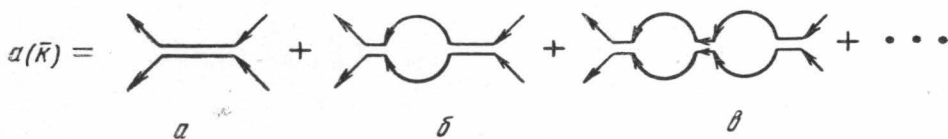


Рис. 1

Используя приведенный вид взаимодействия, можно получить выражение для вершины диаграмм типа рис. 1, a , описывающих распад дейтерона или образование дейтерона. Величина $(m^* |S| n^0)$ для случаев образования дейтерона, где m^* — состояние дейтерона, а n^0 — состояние двух нуклонов, будет иметь вид

$$(m^* |S| n^0) = i g_0 \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k} - \vec{p}) - E(\vec{p})] t\} dt = i g_0 \sqrt{\frac{4\pi}{m}} 2\pi \delta(\omega_1 + \omega_2 - E),$$

где

$$\omega_1 = \omega(\vec{k}); \quad \omega_2 = \omega(\vec{p} - \vec{k}), \quad E = E(\vec{p}). \quad (5)$$

Величина $\delta(\omega_1 + \omega_2 - E)$ есть выражение закона сохранения энергии, так что вершину, соответствующую образованию дейтерона, следует описывать выражением $i g_0 \sqrt{\frac{4\pi}{m}}$. Аналогичный результат получается и для вершины, соответствующей распаду дейтерона.

Рассмотрим теперь переход двух частиц в две с промежуточным образованием дейтерона в первом приближении (рис. 1, a).

Такому процессу соответствует член S_2 в разложении S -матрицы. Выражение для метрического элемента S -матрицы рассматриваемого перехода будет иметь вид

$$(m^* | S_2 | n^0) = \left(ig \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt'' F(t', t''), \quad (6)$$

где

$$F(t', t'') = \exp[i(\omega_1 + \omega_2)t'' - i(\omega'_1 + \omega'_2)t] \langle T(b(\vec{p}, t') b^+(\vec{p}, t'')) \rangle,$$

а

$$\begin{aligned} \langle T(b(\vec{p}, t') b^+(\vec{p}, t'')) \rangle &= \left\{ \begin{array}{l} \exp[-iE(\vec{p})(t'' - t')], t' > t'' \\ 0, t' < t'' \end{array} \right\} = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iE(t' - t'')}}{E_0 - E(\vec{p}) + i\tau} dE. \end{aligned}$$

Тогда для величины $F(t', t'')$ получим выражение

$$F(t', t'') = \sum_E i \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - E)t'' - i(\omega'_1 + \omega'_2 - E)t]^{-1}, \quad (7)$$

а для метричного элемента перехода двух нуклонов в два с образованием промежуточного дейтерона получим выражение

$$M_{2n \rightarrow 2n} = \left(ig_0 \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \right)^2 i [E_0 = E(\vec{p}) + i\tau]^{-1}. \quad (8)$$

Для того чтобы найти выражение для вкладов всех остальных диаграмм, определим вероятность перехода дейтерона в дейтерон с промежуточным распадом на два нуклона, который изображается внутренней частью диаграммы вида рис. 1, б. Легко показать по аналогии с предыдущими выкладками, что

$$\begin{aligned} M_{d \rightarrow d} &= \left(ig \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \right)^2 i^2 \sum_{\vec{k}, E} [E_0 - E(\vec{p}) - i\tau]^{-1}, \\ [E_0 - E - E_N(\vec{p}_0 - \vec{k} + i\tau)]^{-1} &= \Pi(E_0, \vec{p}). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя предыдущие выкладки, нетрудно получить метричный элемент перехода двух частиц в две с учетом всех возможных диаграмм (рис. 1).

Если обозначить сумму всех внутренних линий представленных диаграмм через $G_d(E, \vec{p})$, а внутреннюю линию первой диаграммы через $G_d^0(E, \vec{p})$, то можно записать следующее уравнение для $G_d(E, \vec{p})$:

$$G_d(E, \vec{p}) = G_d^0(E, \vec{p}) + G_p(E, \vec{p}) i\pi(E, \vec{p}) G_d(E, \vec{p}), \quad (10)$$

или

$$[E - E_d(\vec{p}) - i\Pi(E, \vec{p})] G_d(E, \vec{p}) = 1,$$

где

$$\Pi(E, \vec{p}) = -\frac{4\pi m}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k'^2}{k'^2 - k^2 - i\tau}.$$

В нерелятивистском случае следует положить \vec{p} равное нулю, тогда значение энергии нуклона и дейтерона на поверхности энергии есть

$$E(\vec{p}) = -\frac{\alpha^2}{m} \text{ и } E_0 = \frac{k^2}{m},$$

а

$$G d(E) = \left[\frac{k^2}{m} + \frac{\alpha^2}{m} - g^2 \frac{4\pi}{m} I(k^2) \right]^{-1}, \quad (11)$$

где

$$I(k^2) = \frac{4\pi m}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k'^2 dk'}{k'^2 - k^2 - i\tau} = -\left[\frac{im}{2\pi^2} k + \text{Re}I \right]. \quad (12)$$

Вероятность перехода двух частиц в две с учетом многократного рассеяния в промежуточном состоянии dW определяется тогда выражением

$$dW = 2\pi |T_{2 \rightarrow 2}|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3 dE} d\sigma = \frac{d\omega}{v}. \quad (13)$$

Для получения амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне необходимо величину $M_{n \rightarrow n}$ умножить на $\frac{m}{4\pi}$ и $(-i)$, тогда

$$a(k) = -g^2 G d(E) = -g_0^2 m \left[k^2 + \alpha^2 + g^2 m \left(\frac{2}{\pi} \text{Re}I + ik \right) \right], \quad (14)$$

или

$$a(k) = -g_0^2 [E + E_0 + g_0^2 (C + i\sqrt{Em})]^{-1}, \quad (15)$$

где

$$C = \frac{2}{\pi} \text{Re}I.$$

Прежде чем определять константы C и g_0 в (15), рассмотрим вклад в амплитуду рассеяния полюсной диаграммы (рис. 1, а). Он может быть получен из (8)

$$a_0(k) = -g_0^2 (E_0 + E)^{-1}.$$

Очевидно, $a_0(k)$ имеет полюс при $E = -E_0$ или $E = -\frac{\alpha^2}{m}$, вычет в полюсе имеет значение $-g_0^2$.

Полная амплитуда рассеяния имеет полюс в точке, где знаменатель в (15) обращается в нуль. Обозначим его через $H(E)$

$$H(E) = \frac{E + E_0}{g_0^2} + C + i\sqrt{mE}. \quad (16)$$

Если ввести замену переменных $x = \sqrt{mE}$, то для определения полюсов амплитуды рассеяния будем иметь уравнение:

$$\frac{x^2}{mg_0^2} + ix + \left[C + \frac{E_0}{g_0^2} \right] = 0, \quad (17)$$

где
$$E_0 = \frac{\alpha^2}{m}.$$

Откуда

$$x = -i \left[\frac{mg_0^2}{2} \pm \sqrt{mg_0^2} \right] \left[\sqrt{\frac{mg_0^2}{4} + C + \frac{mE_0}{mg_0^2}} \right]. \quad (18)$$

Константу C можно определить, если считать, что один из полюсов $a(k)$ совпадает с полюсом $a_0(k)$, т. е. $a(k) \rightarrow \infty$ при $E = -E_0$ или $\sqrt{E} = i\sqrt{E_0}$ [1].

Тогда для x_1 имеем $x_1 = i\sqrt{mE_0}$, откуда определяем константу $C = \sqrt{mE_0}$. В этом случае амплитуда $a(k)$ будет иметь второй полюс при $x_2 = -i[mg_0^2 + \sqrt{mE_0}]$.

Учитывая, что $C = \sqrt{mE_0}$, представим теперь амплитуду рассеяния $a(k)$ (15) в виде

$$a(k) = \frac{1}{E + E_0} (-g_0^2) \left[\frac{\sqrt{mE_0} - i\sqrt{mE}}{1 + \sqrt{mg_0^2}} \right]. \quad (19)$$

Вычет $a(k)$ в полюсе при $E \rightarrow -E_0$ обозначим новой константой $-g^2$, которая имеет вид

$$-g^2 = -g_0^2 \left[1 + \frac{mg_0^2}{2\sqrt{mE_0}} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Здесь константа g является перенормированной константой связи.

Если считать, что $a(k)$ определяется только одним полюсом при $E = -E_0$, а второй полюс лежит на бесконечности, то $g_0 \rightarrow \infty$. При этом для перенормированной константы связи будем иметь [1]

$$-g^2 = -\frac{m}{2\sqrt{mE_0}}, \text{ т. е. } mg^2 = 2\alpha. \quad (21)$$

В указанных предположениях при $C = \sqrt{mE_0}$ и $g_0 \rightarrow \infty$ полная амплитуда рассеяния будет иметь вид

$$a(k) = -(\sqrt{mE_0} + i\sqrt{mE})^{-1}. \quad (22)$$

Очевидно, выражение (22) для $a(k)$ полностью согласуется с известным выражением для амплитуды рассеяния в теории Бете—Пайрлса.

Получим методом диаграмм точное уравнение для амплитуды рассеяния двух нуклонов. Будем рассматривать также диаграммы, содержащие вершины контактного взаимодействия. Тогда всю совокупность диаграмм для рассеяния двух нуклонов следует представить в виде (рис. 2).

Если воспользоваться для получения вкладов от каждой диаграммы гамильтонианом взаимодействия вида

$$V'(t) = - \sum_{k, k', p} a^+(\vec{k}') a^+(\vec{p} - \vec{k}') V(\vec{k}'\vec{k}) a(\vec{k}) a(\vec{p} - \vec{k}), \quad (23)$$

где

$$V(\vec{k}, \vec{k}') = \int \exp[i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}] V(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (24)$$

то можно вычислить вклад от каждой диаграммы (см. рис. 2). Используя выражение (1) для вероятности перехода, получим значение вклада от диаграммы (рис. 2, а) в виде

$$A_0 = \frac{m}{4\pi} V(\vec{k}, \vec{k}'). \quad (25)$$

Если выбрать $V(\vec{r})$ в виде $-\frac{4\pi}{m} r\delta(\vec{r})$, то в приближении ненулевого радиуса действия ядерных сил A_0 будет пропорционально r_0 . Вычислим теперь вклад в амплитуду рассеяния от диаграммы рис. 2, б. Он будет определяться интегралом вида

$$A_1 = \int \frac{1}{(2\pi)^3} dq \frac{1}{(2\pi)} \int d\varepsilon V(\vec{k}, \vec{q}) V(\vec{q}, \vec{k}') [\varepsilon - \varepsilon_n(\vec{q}) + i\tau]^{-1} \times \\ \times [W - \varepsilon - E_n(\vec{p} - \vec{q}) + i\tau]^{-1}. \quad (26)$$

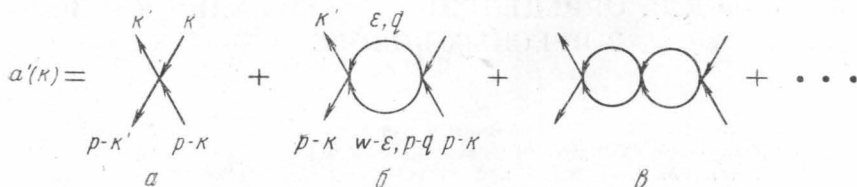


Рис. 2

После интегрирования по энергии ε , которое сводится к взятию вычета в точке $\varepsilon = E_n(q)$ подынтегрального выражения, получим величину A_1 в виде

$$A_1 = \frac{im}{(2\pi)^3} \int V(k, q) V(q, k) (q^2 - k^2 - i\tau)^{-1} dq. \quad (27)$$

Совершенно очевидно, что суммирование диаграмм, представленных на рис. 2, приводит к интегральному уравнению вида

$$a'(k) = A_0 + \frac{1}{2\pi} \int A_0(k', q) A(q, k) (q^2 - k^2 - i\tau)^{-1} dq. \quad (28)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением Шредингера для амплитуды рассеяния двух нуклонов, записанное в представлении, откуда следует, что амплитуду рассеяния можно записать в виде

$$a'(k) = -(\alpha + ik)^{-1} + \frac{r_0}{2} \cdot \frac{\alpha - ik}{\alpha + ik}. \quad (29)$$

Если из этого выражения выделить член, соответствующий вкладу первой диаграммы (рис. 2, а), то получим

$$A(k, k') = \frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha r_0}{\alpha + ik}. \quad (30)$$

Итак, нами получены величины вкладов различных диаграмм, описывающих взаимодействие двух нуклонов, которые использованы для получения амплитуды рассеяния трех или более нуклонов [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Грибов В. Н., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. ИТЭФ, 60, 4, 1960.
2. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, № 7, 1963.

Поступила в редакцию
15. I 1963 г.

НИИЯФ