

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1963

В. М. БЕРЕЗИН

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗА ПОЛЯ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ ПО ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Решается задача прогноза поля атмосферного давления по полной системе уравнений гидродинамики. Решение задачи находим в ограниченном объеме. При этом используется геострофическое приближение и вводится основной поток. Фактически решается краевая задача для уравнения типа С. Л. Соболева с использованием метода разделения переменных.

Разработке и испытанию новых методов прогноза погоды, основанных на физической теории атмосферных процессов, с использованием в качестве исходных уравнений динамики атмосферы в последние годы придается все большее значение как у нас, так и за рубежом [4, 5]. Решение системы исходных уравнений динамики атмосферы при заданных начальных условиях в ряде отношений проще, чем интегрирование уравнений геострофического ветра [6]. Пользуясь квазистатическим соотношением, уравнением дивергенции и граничными условиями задачи, можно построить поля геопотенциала на каждом шаге по времени.

Общий способ решения задачи представляет собой прямое продолжение и развитие метода численного прогноза, предложенного Л. Ричардсоном. В отличие от ряда работ [3, 4, 5] мы используем в качестве исходной систему уравнений гидродинамики, не исключая акустические колебания и учитывая вертикальный компонент скорости ветра, т. е. ищем решение, пригодное для прогноза полей метеоэлементов на основе полных уравнений механики сжимаемой жидкости. В решении учитывается западно-восточный перенос, краевые и начальные условия.

Выберем систему исходных уравнений в виде, предложенном А. Ф. Дюбюком [2],

$$\begin{aligned}u_t - lv + Q_x &= -(\vartheta Q_x + uu_x + vu_y + wu_z) \equiv F_1, \\v_t + lu + Q_y &= -(\vartheta Q_y + uv_x + vv_y + wv_z) \equiv F_2, \\w_t + Q_z &= -[\vartheta(Q_z - g) + uw_x + vw_y + ww_z] \equiv F_3,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} Q_t + u_x + v_y + w_z &= -\frac{1}{c^2} [uQ_x + vQ_y + w(Q_z - g)] \equiv F_4, \\ \vartheta_t + \frac{AR}{c_v} (u_x + v_y + w_z) &= \frac{AR}{c_v} \vartheta (u_x + v_y + w_z) - (u\vartheta_x + v\vartheta_y + w\vartheta_z) \equiv F_5,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $u, v, w$  — компоненты скорости ветра, направленные соответственно по осям  $x, y, z$ . Ось  $y$  направлена по касательной к меридиану на Север, ось  $x$  направлена по касательной к кругу широты на Восток, ось  $z$  перпендикулярна осям  $x$  и  $y$  и направлена от центра земли;  $g$  — ускорение силы тяжести,  $l = 2\omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса,  $\omega$  — угловая скорость вращения земли,  $\varphi$  — широта места. В дальнейшем будем считать  $l = \text{const}$ . Кроме того, полагаем, что  $T' = T - T_0$ , где  $T_0$  — постоянная величина (например,  $273^\circ$ ),

$$\vartheta = \frac{T'}{T_0}, \quad Q = RT_0 \ln \frac{p}{p_0} + gz,$$

$$c^2 = \frac{c_p}{c_v} RT,$$

где  $p_0 = 1000$  мб,  $R$  — газовая постоянная,  $A$  — термический эквивалент работы,  $c_p$  — теплоемкость воздуха при постоянном давлении,  $c_v$  — теплоемкость воздуха при постоянном объеме. Система (1) записана так, что в левой части оставлены только линейные члены.

Решение системы уравнений (1) для неограниченного полупространства было найдено в виде тройных несобственных интегралов в работах [1, 2]. Расчетная схема при реализации этих решений на электронной вычислительной машине получалась довольно сложной в связи с неограниченностью рассматриваемой области.

В настоящей статье ищется решение в общем виде для краевой задачи. Причем задача решается для отклонений искомым функций от их значений, определяемых общим западно-восточным переносом.

Будем считать, что в атмосфере в средних широтах существует западно-восточный перенос и что движение наложено на некоторый «основной поток». Обозначим его скорость через  $\bar{U}$  и примем, что  $\bar{U}$  — постоянная величина.

Аналогичным условием пользовалась Е. Н. Блинова [3] и ряд других авторов при решении прогностических задач. Примем, что

$$u = \bar{U} + u', \quad \vartheta = \vartheta',$$

$$v = \bar{V} + v', \quad Q = \bar{Q} + Q',$$

$$w = w',$$

причем

$$\bar{U}_x = \bar{U}_y = \bar{U}_z, \quad \bar{Q}_y = -l\bar{U}, \quad \bar{Q}_x = l\bar{V},$$

т. е. для основного потока будем считать, что выполняется условие геострофичности. Рассмотрим модель в предположении, что  $\frac{1}{c^2} \approx 0$  и основной перенос атмосферы происходит с геострофической скоростью, неизменной по высоте. Будем решать задачу в замкнутом ограниченном объеме. В качестве граничных условий примем, что производные искомой функции  $Q$  на краях области в горизонтальной плоскости  $xy$  равны нулю, так как горизонтальные градиенты меняются гораздо меньше, чем сами функции. У поверхности земли предполагается выполнение уравнения статики.

Обозначим начальные значения при  $t=0$

$$u' = \overset{\circ}{u}', \quad v' = \overset{\circ}{v}', \quad w' = \overset{\circ}{w}', \quad Q' = \overset{\circ}{Q}', \quad \vartheta' = \overset{\circ}{\vartheta}'$$

и перейдем к новой системе координат, движущейся со скоростью основного потока

$$t = \tau, \quad \xi = x - \bar{U}\tau, \quad \eta = y - \bar{V}\tau, \quad z = z.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \bar{U} \frac{\partial}{\partial \xi} - \bar{V} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3)$$

В новой системе координат (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} u'_\tau - lv' + Q'_\xi + \vartheta' \bar{Q}_x &= 0, \\ v'_\tau + lu' + Q'_\eta + \vartheta' \bar{Q}_y &= 0, \\ w'_\tau + Q'_z - g\vartheta' &= 0, \quad u'_\xi + v'_\eta + w'_z = 0, \\ \vartheta'_\tau &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) следует, что  $\vartheta' = \vartheta'(\xi, \eta, z)$ , т. е.  $\vartheta'$  в подвижной системе координат не зависит от времени и выражается через начальное значение.

Сведем систему (4) к одному дифференциальному уравнению в частных производных относительно  $Q'$  путем исключения  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ . Получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta \Phi' + l^2 \frac{\partial^2 Q'}{\partial z^2} = g l^2 \vartheta'_z, \quad (5)$$

где  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ ; таким образом получим уравнение типа С. Л. Соболева [2]. Причем граничные условия в новой системе координат

$$\begin{aligned} Q'_\xi \Big|_{\substack{\tau=0 \\ \xi=L_1}} = 0, \quad Q'_\eta \Big|_{\substack{\tau=0 \\ \eta=L_2}} = 0, \quad Q' \Big|_{z=H} = g \bar{\vartheta} H + Q' \Big|_{z=0}, \\ Q'_z \Big|_{z=0} = g \vartheta \Big|_{z=0}, \end{aligned}$$

где  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $H$  — длина, ширина и высота области, для которой дается прогноз, т. е. решаем задачу в ограниченном объеме.

Представим отклонение  $Q'$  от основного значения  $\bar{Q}$  в виде

$$Q' = Q''(\zeta, \eta, z, \tau) + \chi(\xi, \eta, z), \quad (6)$$

где  $\chi(\xi, \eta, z)$  — является решением стационарной задачи (5), а  $Q''(\xi, \eta, z, \tau)$  — новая искомая функция. Так как  $\chi(\xi, \eta, z)$  есть стационарное решение, то, не нарушая общности, можем принять его за начальное распределение  $\dot{Q}'$  в пространстве, причем  $\chi(\xi, \eta, z)$  должно удовлетворить уравнению

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = g \vartheta'_z.$$

Тогда для  $Q''$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta Q'' + l^2 \frac{\partial^2 Q''}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Используя принятые ранее граничные условия для  $Q'$  и равенство (6), получим граничные условия для искомой функции, входящей в уравнение (7),

$$Q'_\xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=L_1} = 0, \quad Q'_\eta \Big|_{\eta=0}^{\eta=L_2} = 0, \quad Q'_z \Big|_{z=0} = 0, \quad Q'' \Big|_{z=0} = 0.$$

Решение для (7) будем искать в виде

$$Q'' = \sum_m \sum_n \sum_k A_{mnk}(\tau) \cos \frac{m\pi\xi}{L_1} \cos \frac{n\pi\eta}{L_2} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2H}.$$

Используя метод разделения переменных — метод Фурье, получим

$$\frac{d^2 A_{mnk}}{d\tau^2} \left[ \left( \frac{m\pi}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{(2k+1)\pi}{2H} \right)^2 \right] + l^2 \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2H} \right]^2 A_{mnk} = 0. \quad (8)$$

Обозначим

$$\sigma_{mnk}^2 = - \frac{l^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2H} \right)^2}{\left( \frac{m\pi}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{(2k+1)\pi}{2H} \right)^2},$$

$$\sigma_{mnk} = \pm i\sigma_{mnk}.$$

Решение для (8) будет иметь следующий вид:

$$A_{mnk}(\tau) = c'_{mnk} \sin(\sigma_{mnk}\tau) + c''_{mnk} \cos(\sigma_{mnk}\tau),$$

тогда

$$Q'' = \sum_m \sum_n \sum_k [c'_{mnk} \sin(\sigma_{mnk}\tau) + c''_{mnk} \cos(\sigma_{mnk}\tau)] \times \\ \times \cos \frac{m\pi\xi}{L_1} \cos \frac{n\pi\eta}{L_2} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2H}. \quad (9)$$

Как видно из формулы (9), решение для  $Q''$  получается квазипериодическое во времени, устойчивое, причем произвольные постоянные  $c'_{mnk}$  и  $c''_{mnk}$  найдем из начальных условий: при  $\tau = 0$ ,  $Q'' = \dot{Q}''$  и  $Q'_\tau = \dot{Q}''_\tau$ , тогда для  $m$  и  $n \geq 1$

$$c'_{mnk} = \frac{8}{L_1 L_2 H} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^H Q''_\tau \cos \frac{m\pi\xi}{L_1} \cos \frac{n\pi\eta}{L_2} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2H} d\xi d\eta dz, \quad (9a),$$

аналогично

$$c''_{mnk} = \frac{8}{L_1 L_2 H} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^H \dot{Q}'' \cos \frac{m\pi\xi}{L_1} \cos \frac{n\pi\eta}{L_2} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2H} d\xi d\eta dz.$$

При  $m = 0$  и  $n = 0$   $c'_{mnk}$  и  $c''_{mnk}$  будут отличаться от (9a) только численными коэффициентами.

Заметим, что  $Q''$  содержит целый набор гармоник, имеющих разные амплитуды. Для каждой гармоники получается стоячая волна от той точки, для которой делается вычисление, т. е. решение для  $Q''$ , пред-

ставляющее отклонение от  $Q'$ , будет в виде спектра стоячих волн, амплитуда которых убывает с ростом частоты.

Окончательное решение можно записать в виде

$$Q = \bar{Q} + Q'' + \chi.$$

Для проверки полученного решения нами была просчитана модель для периодического поля  $\hat{Q}'$ .

Примем, что при  $\tau = 0$   $\hat{Q}'' = 0$ , тогда  $\chi$  — может быть любым, лишь бы оно удовлетворяло крайевым условиям. В частности, может быть  $\chi = \hat{Q}'$ , тогда  $\hat{Q}''\tau = \hat{Q}'\tau$ .

Пусть

$$\hat{Q}' = \left( v_0 - v_1 \cos \frac{\pi\eta}{L_1} + v_2 \cos \frac{4\pi\xi}{L_1} \cos \frac{2\pi\eta}{L_2} \right) \left( 1 - \theta \sin \frac{\pi z}{2H} \right),$$

$$\hat{Q}''\tau = \mu_1 \cos \frac{2\pi\xi}{L_1} \cos \frac{2\pi\eta}{L_2} \cos \frac{\pi z}{2H},$$

где  $v_0, v_1, v_2, \mu_1, \theta$  — константы.

Тогда

$$Q'' = \sum_m \sum_n c'_{mn0} \sin(\sigma_{mn0}\tau) \cos \frac{m\pi\xi}{L_1} \cos \frac{n\pi\eta}{L_2} \cos \frac{\pi z}{2H},$$

где

$$c'_{mn0} = \frac{8}{\sigma_{mn0}} \mu_1 \frac{2}{\pi^2} \frac{mn}{(m^2 - 4)(n^2 - 4)} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$c'_{mn0} \neq 0$  при  $m$  и  $n$  нечетных.

При  $m = n = 2$

$$c'_{220} = \frac{4}{\sigma_{220}} \mu_1.$$

Окончательно имеем

$$Q'' = \sin(\sigma_{mnk}\tau) \left\{ \frac{16\mu_1}{l\pi^2} \left[ \frac{1}{9} \cos \frac{\pi\xi}{L_1} \cos \frac{\pi\eta}{L_2} \cos \frac{\pi z}{2H} \right] + \right.$$

$$+ \frac{4}{l} \mu_1 \cos \frac{2\pi\xi}{L_1} \cos \frac{2\pi\eta}{L_2} \cos \frac{\pi z}{H} + \frac{16}{l\pi^2} \mu_1 \left[ \cos \frac{2\pi\xi}{L_1} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi\xi}{L_1}}{K} - \right.$$

$$- \frac{2}{3} \cos \frac{\pi\xi}{L_1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cos \frac{2\pi\xi}{L_1} \left. \right] \left[ \cos \frac{2\pi\eta}{L_2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \cos \frac{k\pi\eta}{L_2} - \frac{2}{3} \cos \frac{\pi\eta}{L_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cos \frac{2\pi\eta}{L_2} \right] \cos \frac{\pi z}{2n} \left. \right\}. \quad (10)$$

Исходное поле  $\hat{Q}'$  приведено на рис. 1. Поле  $Q$ , подсчитанное на электронной вычислительной машине с большой памятью с использованием расчетной формулы (10), приведено на рис. 2 для случая  $\delta t = 12$  час (шаг по времени). Как видно из рис. 2, поле знакопеременное, области

высокого и низкого давлений получались несколько деформированными, более сильной деформации подверглись области низкого давления. Причем полученное поле  $Q$  перемещается со скоростью основного потока. Рассчитанный случай является численным примером для линеаризованной системы уравнений (4). Полученные колебания — это свободные

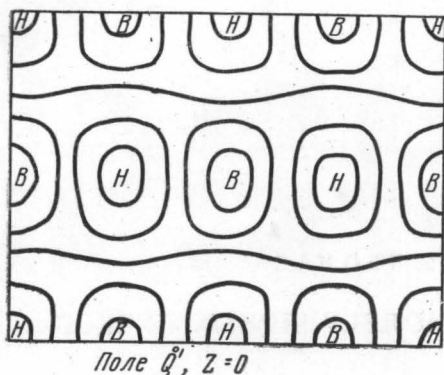


Рис. 1

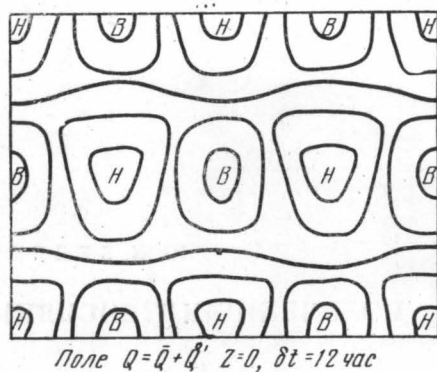


Рис. 2

колебания малого периода, переносимые основным потоком. В решении для нелинейной аналогичной задачи появятся члены, определяющие вынужденные колебания большого периода, и, следовательно, можно ожидать, что поле будет более значительно перестраиваться во времени. Решение для нелинейной задачи по времени должно осуществляться численно шагами.

В заключение автор выражает горячую признательность профессору А. Ф. Дюбюку за внимание к работе и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбюк А. Ф., Березин В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 2, 1962.
2. Дюбюк А. Ф. ДАН СССР, 123, № 2, 1958.
3. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, М., 1957.
4. Кибель И. А. ДАН СССР, 132, № 1, 1960.
5. Eliassen A. Seintifie Report, No. 4. University of California at Les Angeles, 1956.
6. Юдин Н. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеоздат, Л., 1963.

Поступила в редакцию  
7. 12 1962 г.

Кафедра  
физики атмосферы