Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1963

А. Я. ВОРОНОВ

ПЛАЗМЕННЫЕ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ, ПОДВЕРЖЕННЫЕ ДЕЙСТВИЮ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

В работе в гидродинамическом приближении проведено исследование условий равновесия и устойчивости заряженных плазменных фигур, на поверхности которых образовалась тонкая пленка из индуцированных зарядов ионизованной внешней среды.

В работе [1] исследовались условия равновесия и устойчивость удлиненного плазменного эллипсоида в собственном поле сил. Мы рассмотрим те же вопросы для плазменных фигур, подверженных действию поверхностного натяжения. Исследования будем проводить в гидродинамическом приближении, выбирая за модель плазмы однородную идеальную жидкость, равномерно заряженную по объему положительным электричеством с плотностью ρ_e.

1. Пусть рассматриваемая жидкая масса, имея форму шара радиуса R, окружена ионизованной средой. Мы будем предполагать, что в ионизованной среде имеются только электроны и однократно ионизованные положительные ионы. Если считать, что распределения заряженных частиц в состоянии теплового равновесия подчиняются формуле Больцмана, то плотность заряда, индуцированного во внешней среде, будет:

$$\rho_e' = eN_0\left(e^{-\frac{e\Phi'}{kT}} - e^{\frac{e\Phi'}{kT}}\right) \approx -\frac{2e^2N_0}{kT}\Phi', \tag{1}$$

где Φ' — электростатический потенциал в точках вне шара, e — элементарный заряд, k — постоянная Больцмана, T — температура во внешней среде, N_0 — концентрация заряженных частиц на бесконечности, равная средней концентрации частиц по всему пространству вне шара.

Последнее упрощение в формуле (1) сделано в предположении, что $e\Phi' \ll kT$. Подставляя выражение (1) в уравнение Пуассона для Φ' и решая его, найдем, что

$$\Phi' = \rho_e \frac{4\pi R^3}{3(\varkappa R + 1)} \frac{\exp[\varkappa(R - r)]}{r}$$

и, следовательно,

$$\rho_e' = -\rho_e \frac{(\varkappa R)^3}{3(\varkappa R + 1)} \frac{\exp[\varkappa(R - r)]}{\varkappa r}, \quad (r \geqslant R), \tag{2}$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi e^2 N_0}{kT}.$$

Рассмотрим случай, когда

$$\varkappa\xi \gg 1, \tag{3}$$

где ξ — амплитуда малых возмущений свободной поверхности шара. Это случай, когда весь индуцированный заряд стянут в тонкий сферический слой, облегающий всю поверхность шара. Действие такой поверхностной пленки из индуцированного заряда на шар будет аналогично действию сил поверхностного натяжения.

2. Пусть жидкость равномерно вращается, как твердое тело, вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω_z. На ее свободной поверхности предполагается постоянное внешнее давление $p' \neq 0$.

Найдем фигуры равновесия вращающейся заряженной жидкой массы, подверженной действию поверхностного натяжения. Давление в точках свободной поверхности такой жидкости в системе координат, жестко связанной с ней (начало которой совпадает с центром тяжести жидкой массы), определяется уравнением

$$p' = -\rho_e \Phi + \frac{1}{2}\rho_m \omega_z^2 (x^2 + y^2) - w\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \text{const}, \tag{4}$$

где Φ — электростатический потенциал внутренних точек жидкости, ρ_m — плотность вещества жидкости; $w = \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{1}{\varkappa}$ — играет роль коэффициента поверхностного натяжения. Он равен электростатической энергии пленки, приходящейся на единицу ее поверхности. R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны свободной поверхности жидкости.

Уравнение (4) является уравнением свободной поверхности равновесной фигуры вращения. Исследование этого уравнения в общем виде представляет значительную математическую трудность. Поэтому мы ограничимся рассмотрением частного случая малой скорости вращения, когда следует ожидать, что равновесной фигурой будет эллипсоид вращения.

Введем параметр $\zeta = \frac{a-b}{a}$, характеризующий величину сжатия (удлинения) фигуры, где a — экваториальный радиус фигуры, b — радиус по оси вращения. Проверим, не будет ли наша фигура равновесия иметь форму эллипсоида вращения в случае $\zeta \ll 1$.

Для эллипсоида вращения с точностью до членов, содержащих ζ в степени выше первой,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2\,\frac{1-\zeta}{a} + 4\zeta\,\frac{x^2 + y^2}{a^3}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) и воспользовавшись выражением для электростатического потенциала равномерно заряженного эллипсоида, приведенным в работе [1], запишем уравнение свободной поверхности равновесной фигуры в следующем виде:

$$\left(\alpha\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - 16\zeta\,\frac{w}{\rho_m a^3}\right)(x^2 + y^2) + \gamma\omega_0^2 z^2 = \text{const}, \tag{6}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi\rho_e^2}{\rho_m}, \quad \alpha = a^2 b \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2 (b^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}}, \quad \gamma = a^2 b \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Уравнение (6) является уравнением подобных и концентрических эллипсоидов вращения. Один из них будет иметь полуось по оси x, равную a, и по оси z, равную b, если будет выполнено условие

$$\omega_z^2 = 8\zeta \frac{w}{\rho_m a^3} + \frac{1}{2a^2}\omega_0^2(\gamma b^2 - \alpha a^2). \tag{7}$$

При $w=0$ мы возвращаемся к случаю, разобранному в работе [1], где было показано, что равновесной фигурой является удлиненный эллипсоид вращения.

Выразив всю правую часть условия (7) через ζ и отбросив члены, содержащие ζ в степени выше первой, найдем

$$\omega_z^2 \approx 4\omega_0^2\left(\frac{1}{9\varkappa a} - \frac{1}{15}\right)\zeta \approx -\frac{4}{15}\omega_0^2\zeta. \tag{8}$$

Последнее упрощение сделано, используя условие (3). Поскольку ω_z^2 и ω_0^2 существенно положительные величины, (8) будет иметь смысл, если $\zeta<0$, т. е. если $a<b$. Таким образом, при малой скорости вращения фигурой равновесия будет слабо удлиненный эллипсоид вращения, причем степень его удлинения увеличивается с увеличением ω_z^2.

В общем случае при произвольном значении ω_z^2 равновесные фигуры вращающейся заряженной жидкой массы, подверженной действию поверхностного натяжения, будут иметь удлиненную форму, близкую к эллипсоидальной *.

3. Исследование влияния, которое оказывают силы поверхностного натяжения на устойчивость к поверхностным волнам плазменных фигур, мы проведем следующим образом. Запишем формально дисперсионное уравнение для удлиненного эллипсоида вращения. Затем, делая в нем предельные переходы, получим дисперсионные уравнения для шара и бесконечного цилиндра. Исследование двух последних уравнений и даст возможность сделать некоторые выводы относительно влияния, которое оказывает на устойчивость любых других фигур, образовавшаяся на их поверхности пленка из индуцированных зарядов.

При получении дисперсионного уравнения для эллипсоида с пленкой необходимо учесть, что на его свободной поверхности давление терпит разрыв, величина которого определяется следующими формулами:

$$p - p' = \delta p,$$

$$\delta p = w\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{9}$$

---

* Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить между собой члены, входящие в уравнение (4),

$$\rho_e\Phi \sim (L\rho_e)^2, \quad w\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \sim \frac{(L\rho_e)^2}{\varkappa L},$$

где L — линейные размеры фигуры. Таким образом, согласно условию (3)

$$w\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \ll \rho_e\Phi.$$

Получим прежде всего выражение для средней кривизны слабо деформированных фигур. Если семейство поверхностей задано уравнением

$$f(x, y, z) = C, \tag{10}$$

то уравнение семейства поверхностей, бесконечно близких к (10), в первом приближении будет иметь вид

$$F(X, Y, Z) = f(X, Y, Z) - \eta(X, Y, Z) = C, \tag{11}$$

где

$$f(X, Y, Z) = f(x, y, z) + f_n \delta n.$$

Пользуясь формулой

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial \cos(n, x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(n, y)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(n, z)}{\partial z},$$

найдем, что средняя кривизна семейства (11) определяется следующим выражением:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\nabla^2 F - F_{nn}}{F_n}. \tag{12}$$

Здесь значок n у функций обозначает производную по нормали к заданной поверхности.

Пользуясь формулой (12), находим, что средняя кривизна бесконечно мало деформированного шара радиуса R имеет вид

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} + \frac{(n-1)(n+2)}{R^2}\xi_n, \tag{13}$$

здесь индекс n обозначает номер гармоники,

$$\xi_n = \alpha_n n R^{n-1} P_n(\cos\vartheta)\exp(i\omega_n t),$$

α_n — малый коэффициент, а кривизна деформированного цилиндра радиуса R, если деформация симметрична относительно оси цилиндра, будет определяться следующим выражением:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{x^2 - 1}{R^2}\xi_k, \tag{14}$$

где $x = \frac{2\pi R}{\lambda}$, λ — длина волны возмущения,

$$\xi_k = \alpha_k \exp(ikz + i\omega t).$$

Не выписывая здесь громоздкого выражения для кривизны деформированного эллипсоида, отметим, что она, так же как и кривизна недеформированного эллипсоида, является функцией точки его поверхности.

Следуя методу, изложенному в работе [1], и учитывая условие (9), найдем, что дисперсионное уравнение для удлиненного эллипсоида вращения с поверхностной пленкой в случае возмущений, симметричных относительно оси вращения, имеет вид

$$\omega_n^2 = 4\pi\rho_e^2 \frac{P_n'(\rho)\,Q_n'(\rho)}{\rho_m' Q_n P_n' - \rho_m P_n Q_n'}\left(P_n Q_n - P_1 Q_1 + \frac{w}{4\pi\rho_e^2}\Delta\right), \tag{15}$$

где ρ_m' — плотность вещества окружающей среды, $P_n(\rho)$ и $Q_n(\rho)$ — полиномы Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно, ρ — эллиптическая координната, изменяющаяся в пределах $1 < \rho < \infty$, $P'_n(\rho)$, и $Q'_n(\rho)$ — производные от соответствующих функций по эллиптической переменной u, связанной с ρ в случае удлиненного эллипсоида вращения следующим соотношением:

$$du = -\frac{d\rho}{\rho^2 - 1}.$$

Последний член в уравнении (15), появление которого, как легко видеть, вызвано наличием пленки, зависит от точки поверхности эллипсоида. Следовательно, уравнение (15) в таком виде не имеет физического смысла. Подобное явление отражает тот факт, что это уравнене выведено для фигуры, которая в общем случае не может находиться в относительном равновесии.

Уравнение (15), однако, полезно тем, что, делая в нем предельные переходы, легко можно получить дисперсионные уравнения для шара и бесконечного цилиндра — фигур, которые, очевидно, могут находиться в относительном равновесии и при наличии на их поверхности пленки.

Произведем эти переходы.

При $\rho \to \infty$ отношение полуосей эллипсоида стремится к единице, а уравнение (15), если в нем взять вместо входящих в него функций Лежандра только их главные значения и учесть, что кривизна деформированного шара определяется формулой (13), вырождается в дисперсионное уравнение для шара:

$$\omega_n^2 = 4\pi\rho_e^2 \frac{n(n+1)}{(n+1)\rho_m + n\rho'_m}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3} + \frac{(n-1)(n+2)}{18\varkappa R}\right]. \qquad (16)$$

При получении из уравнения (15) дисперсионного уравнения для бесконечного цилиндра следует воспользоваться асимптотическими значениями полиномов Лежандра, приведенными в работе [1].

Кроме этого необходимо учесть, что кривизна деформированной поверхности цилиндра определяется формулой (14).

Если теперь устремить $\rho \to 1$, то удлиненный эллипсоид выродится в стержень, а уравнение (15) перейдет в следующее уравнение:

$$\omega^2 = 4\pi\rho_e^2 \frac{xI_1(x)K_1(x)}{\rho_m I_0 K_1 + \rho'_m I_1 K_0}\left[I_0 K_0 - \frac{1}{2} + \frac{x^2 - 1}{8\varkappa R}\right] \qquad (17)$$

(здесь было положено $\omega_z^2 = 0$).

Уравнение (17) для случая $\rho'_m = 0$ было получено И. Н. Игливой [2].

Сравнивая теперь уравнения (16) и (17) с соответствующими уравнениями для шара и цилиндра без пленки, полученными в работе [1], приходим к выводу, что последняя повышает устойчивость фигур к рассматриваемым возмущениям.

Так шар перестает быть абсолютно неустойчивым. Для $n > n_0 \approx \approx (6\varkappa R)^{\frac{1}{2}}$ согласно уравнению (16) $\omega_n^2 > 0$.

4. Получим время жизни $\tau \sim \frac{1}{|\omega_n|}$ плазменного шара радиуса R, подверженного действию сил поверхностного натяжения. Минимального значения ω_n^2 согласно уравнению (16) достигает при $n \approx (2\varkappa R)^{\frac{1}{2}}$. При этом значении n и $\rho_m = \rho'_m$

$$\omega_n^2 \approx -\frac{2\rho_e^2}{\rho_m}(\varkappa R)^{\frac{1}{2}},$$

следовательнс,

$$\tau \sim \frac{\rho_m^{\frac{1}{2}}}{\rho_e} (\varkappa R)^{-\frac{1}{4}}. \tag{18}$$

Согласно теории амбиполярной диффузии объемная плотность положительного заряда в центре плазменного шара не превышает величины [3]

$$\rho_e^{\max} = \frac{\pi}{4R^2} \frac{D_e - D_p}{\mu_e + \mu_p} \approx \frac{\pi}{4R^2} \frac{kT_e}{e}, \tag{19}$$

где D_e и D_p — коэффициенты диффузии соответственно для электронов и положительных ионов, μ_e и μ_p — их подвижности. Последнее приближение в формуле (19) сделано с учетом того, что $D_p \ll D_e$, $\mu_p \ll \mu_e$, $\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{kT_e}{e}$, T_e — температура электронов.

Полагая

$$\rho_m \sim 10^{-3} г \cdot см^{-3},$$
$$\rho_e = \rho_e^{\max},$$
$$T_e = 300°K,$$
$$N_0 \sim 10^8 см^{-3},$$

найдем

$$\tau \sim 10^2 R^{\frac{7}{4}} \text{ сек } (R \text{ в } см).$$

В заключение следует сделать некоторые выводы.

Если плазменный сгусток окружен ионизованной средой, то на его поверхности может образоваться тонкая пленка из индуцированных зарядов, действие которой на сгусток будет аналогично действию сил поверхностного натяжения.

Фигуры равновесия вращающихся плазменных сгустков с поверхностной пленкой будут иметь удлиненную форму, не очень сильно отличающуюся от эллипсоидальной, причем степень их удлинения увеличивается с увеличением скорости вращения.

Силы поверхностного натяжения повышают устойчивость плазменных фигур к возмущениям их поверхности.

Цилиндр с пленкой, например, становится устойчивым и ко всем поверхностным волнам с достаточно большим волновым числом κ [2], а шар, подверженный действию поверхностного натяжения, устойчив ко всем гармоникам с достаточно большим номером n. Время жизни такого шара пропорционально $R^{\frac{7}{4}}$ и оказывается, таким образом, довольно значительным.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. А. А. Власову за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов А. Я. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 74—80, 1960.
2. Иглина И. Н. Диссертация, МОПИ, 1955.
3. Allis W. R., Rose D. J. Phys. Rev., **93**, 84—93, 1954.

Поступила в редакцию
29. 12 1962 г.

Кафедра
статистической физики и механики