Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1963

Ф. А. ЦИЦИН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ «ОБЪЕМ» ДЛЯ СИСТЕМ КОРПУСКУЛЯРНОЙ ПРИРОДЫ

Указаны недостатки обычного определения понятия «объем» для систем корпускулярной природы. Предложено определение, лишенное таких недостатков, совпадающее с обычным в области, где эти недостатки практически несущественны. Рассмотрены некоторые задачи, решение которых становится возможным после введения нового, однозначного определения указанного понятия.

1. Любая система может рассматриваться как подсистема некоторой системы большего масштаба (в частном случае, замкнутая). Поэтому замечания и результаты, полученные ниже для подсистем, относятся и к системам.

Для системы континуальной природы понятие «объем подсистемы» естественно определяется как часть пространства, занятая веществом подсистемы. Для систем корпускулярной природы это определение становится тривиальным, и его обычно заменяют другим, определяющим объем подсистемы как «объем заключающего ее сосуда».

Заметим, что это определение *не является логически замкнутым* в рамках корпускулярной модели вещества, поскольку идеализированный сосуд (совокупность перегородок и т. д.) мыслится континуальным.

Далее, объем подсистемы, выделенной указанием входящих в нее частиц из корпускулярной системы, определяется указанным определением *неоднозначно*. Строго говоря, объем подсистемы оказывается ограниченным лишь условием

$$0 \leqslant v \leqslant V,$$

где V — полный объем системы. Поэтому определение дополняется (часто неявно) условием «достаточной простоты формы» воображаемого сосуда. Ценой этого усложнения логической структуры определения достигается *практическая* однозначность его в некоторых *частных* случаях (компактная подсистема достаточно большого числа частиц). В общем же случае даже «практическая» неоднозначность в величине объема подсистемы сохраняется (т. е. относительная неопределенность его оказывается не малой).

Отметим, наконец, что рассматриваемое определение вводит в описание объективно существующей (однозначно заданной) подсистемы *субъективный элемент,* поскольку от *«наблюдателя»* зависит, в какой именно «воображаемый сосуд» должны быть мысленно заключены образующие подсистему частицы.

Вследствие наличия указанных недостатков у обычного определения понятия «объем подсистемы в корпускулярной системе» при *описании* системы происходит *потеря информации,* обусловливающая невозможность восстановления системы по ее описанию.

2. Представляется желательным и во всяком случае небезынтересным попытаться «улучшить» рассматриваемое определение—точнее, ввести для описания корпускулярной системы величину, в большей мере аналогичную понятию «объем» континуальной теории.

Мыслимо бесконечное множество различных однозначных, логически замкнутых, не содержащих субъективного элемента определений объема подсистемы в корпускулярной системе. Однако можно указать ряд естественных ограничений, позволяющих резко уменьшить произвол в выборе определения. Помимо названных условий однозначности, логической замкнутости и отсутствия субъективного элемента в определении существует ряд других ограничений. Так, необходимо, чтобы определение было геометрически или (и) физически предпочтительным среди других. Далее, определение должно быть в каком-то смысле симметричным относительно различных подсистем, обеспечивая независимость их объема от порядка их выделения из системы, от перестановки наименований «сосуд» и «система в сосуде» и т. п.

Наложим еще на определение условие отсутствия в корпускулярной системе наложения объемов подсистем и пустот между ними. (В альтернативном случае, логически вполне мыслимом, резко ослабляется аналогия с соответствующим определением в континуальной концепции, поэтому такой вариант представляет меньше интереса.)

В простейшем случае идеального газа (которым мы и ограничимся) указанные условия, как можно убедиться, совместны с единственным определением понятия «объем подсистемы в корпускулярной системе». Это определение таково: *объем подсистемы в корпускулярной системе есть область пространства, для каждой точки которой ближайшей частицей системы является входящая в подсистему.*

3. В случае газа, близкого к идеальности, определенный так объем подсистемы совпадает с областью пространства, в которой силовое воздействие частиц подсистемы преобладает над таковым от остальных частиц.

Заметим, что это определение имеет смысл для подсистемы, состоящей из любого числа частиц, в том числе и включающей единственную частицу (ср. [1]). Назовем объем такой подсистемы «элементарной ячейкой». При любом распределении частиц в системе однозначно определены форма и размеры всех N элементарных ячеек. В случае системы (подсистемы), граничащей с другой системой, объем граничных элементарных ячеек определен, если указано расположение ограничивающих систему частиц («стенка»).

Нетрудно убедиться, что форма элементарной ячейки есть выпуклый многогранник числа измерений, определяемого размерностью геометрического пространства системы. В трехмерном случае это — выпуклый многогранник, в двумерном — выпуклый многоугольник, в одномерном — отрезок.

В трехмерном случае форма элементарной ячейки определяется относительным расположением не менее, чем пяти частиц, а в среднем, конечно, еще большим числом их. Между прочим это обстоятельство позволяет придать точный смысл имеющему фундаментальное значение, но в современной теории, строго говоря, внутренне противоречивому (см., например, [2]) понятию «физически бесконечно малого объема». А именно в качестве «физически бесконечно малого объема», «физической точки» можно рассматривать «элементарную ячейку».

4. Рассмотрим одно из следствий введения однозначного определения объема.

В каждый момент времени t при любом распределении частиц (т. е. в любом состоянии системы) элементарная ячейка v_i каждой частицы однозначно определена. Пусть полное число частиц в системе $N \gg 1$. Тогда («в максвелловом приближении») можно распределение элементарных ячеек по величине считать описываемым некоторой непрерывной функцией $f(v, t)$.

Аналогично максвеллову распределению можно положить эту функцию для состояния статистического равновесия не зависящей от времени.

5. Функция $f(v)$ может быть найдена в явной форме без принципиальных затруднений. Так, в простейшем математически, но качественно вполне представительном случае одномерного идеального газа задача ставится следующим образом: найти функцию $f(v)$ такую, что

$$dw_v \equiv f(v)\,dv$$

дает вероятность значения объема элементарной ячейки в пределах $(v,\ v+dv)$.

Решение сводится к отысканию функции распределения величин отрезков v, соединяющих середины последовательных интервалов l между случайно расположенными в одномерном объеме V в количестве $N \gg 1$ частицами (двумя граничными интервалами при $N \gg 1$ можно пренебречь).

Функция распределения $\lambda(l)$ интервалов l известна:

$$\lambda(l) = \alpha e^{-\alpha l},$$

где $1/\alpha = \overline{l} = V/N = \overline{v}$.

Ячейка v из элементов двух соседних интервалов x и y, согласно исходному определению, формируется как полусумма их:

$$v = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x+y).$$

Вероятности значений интервалов в пределах $(x,\ x+dx)$ и $(y,\ y+dy)$ соответственно есть

$$dw_x = \lambda(x)\,dx,$$
$$dw_y = \lambda(y)\,dy.$$

Вероятность совместного осуществления этих значений вследствие независимости их (координаты частиц — случайные величины) есть

$$dw_{x,y} = dw_x dw_y = \lambda(x)\lambda(y)\,dx\,dy.$$

Вводя замену переменных

$$\begin{cases} z = x \\ v = \dfrac{1}{2}(x+y), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 2v - z, \end{cases}$$

имеем

$$dw_{x,y} = dw_{z,v} = \lambda(z)\lambda(2v - z)\,D\,dz\,dv,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Вероятность, что ячейка имеет объем $(v, v+dv)$, таким образом, есть

$$dw_v \equiv f(v)\,dv = \int\limits_{(z)} \lambda(z)\,\lambda(2v - z)\,D\,dz\,dv.$$

Подставляя сюда явное выражение функции $\lambda(l)$, находя, что $D = 2$, замечая, что пределы интегрирования по z есть $(0;\ 2v)$, имеем

$$f(v)\,dv = \int\limits_0^{2v} \alpha e^{-\alpha z} \alpha e^{-\alpha(2v-z)} 2dz\,dv,$$

т. е.

$$f(v) = 4\alpha^2 e^{-2\alpha v} v. \tag{1}$$

Не представляет труда нахождение соответствующей функции распределения для подсистемы, включающей более одной частицы. Далее, нетрудно обобщить (1) на случай идеального газа из «твердых шариков», для которого $\lambda(l)$ также известна, или (с некоторыми ограничениями) одномерного газа с произвольным законом взаимодействия частиц.

Принципиально нетрудно и обобщение результата на случай двух и трех измерений пространства, однако здесь, по-видимому, встретятся некоторые затруднения чисто технического характера. Впрочем, и в этих случаях почти очевидны возможности получения асимптотических аналитических представлений для $f(v)$. С другой стороны, всегда возможно с любой требуемой точностью получить $f(v)$ «эмпирически» — численно на математических моделях.

Функция распределения объемов элементарных ячеек $f(v)$ является естественным структурным аналогом максвеллова распределения $\mu(\varepsilon)$ энергий ε этих же частиц. Функция $\mu(\varepsilon)$ описывает распределение аддитивной характеристики системы — энергии E — между отдельными элементарными подсистемами; функция $f(v)$ описывает распределение другой аддитивной величины — объема V — между этими подсистемами.

Не будем останавливаться для рассмотрения различных аспектов этой далеко идущей аналогии.

6. Полученные выше результаты, по-видимому, представляют некоторый самостоятельный интерес. Более существенным кажется, однако, то, что они, в частности, открывают путь к решению задачи о количественном определении отличия среднего значения $\overline{S}$ термодинамической энтропии замкнутой статистически равновесной системы от максимального значения $S_{\max}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernal J. D. Nature, **183**, No. 4655, 141, 1959.
2. Jeans J. H. The Dynamical Theory of Gases, 4 ed. Cambridge, 1925.

Поступила в редакцию
23. 2 1962 г.,
после переработки
2. 4 1963 г.

Кафедра
звездной астрономии