Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1963

Э. С. ЛОНСКИЙ, Ю. М. ШИРОКОВ

О НОВЫХ ТИПАХ СВЯЗИ ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МАТРИЦЕЙ РАССЕЯНИЯ

Предложенный в [1] метод получения S-матрицы по известному двухчастичному гейзенберговскому матричному элементу локального оператора подробно анализируется для нерелятивистского случая. Показано, что непосредственное применение методики [1] дает возможность получить все фазы рассеяния, кроме одной, например, кроме s-фазы. В работе получено существенное усиление этой методики, дающее возможность вычисления и s-фазы с точностью до численного множителя.

1. Важной задачей квантовой теории поля является установление точных связей между матричными элементами локальных операторов и матрицей рассеяния. До недавнего времени считалось, что единственной формой связи такого рода являются редукционные формулы Лемана—Циммермана—Симанзика [2], из чего, в частности, делается вывод о том, что матричные элементы локальных операторов имеют непосредственный физический смысл только на массовой оболочке. В работе [1] был установлен существенно новый класс связей такого рода, в котором непосредственно используются матричные элементы локальных операторов вне массовой оболочки. Целью настоящей работы является конкретизация и некоторое усиление полученных в [1] результатов. В разделе 1 устанавливается связь между матричным элементом нерелятивистского скалярного локального оператора $A(\vec{x}, t)$

$$\langle k_1 k_2 | A(\vec{x}, t) | k_1' k_2' \rangle, \tag{1}$$

заданным между двумя двухчастичными состояниями, и матричным элементом

$$\langle k | A_0(\vec{r}, t) | k' \rangle \tag{2}$$

того же локального оператора $A_0(\vec{r}, t)$ в системе центра инерции, заданным между состояниями с фиксированным относительным импульсом. В разделе 3 развитый в [1] метод динамических моментов применяется для получения матрицы рассеяния по заданному в гейзенберговском представлении локальному оператору $A(\vec{x}, t)$ для нерелятивистской частицы, рассеивающейся во внешнем поле. При этом оказывается, что по известному оператору $A(\vec{x}, t)$ можно определить все фазы рассеяния, кроме одной, например, кроме s-фазы. В разделе 4 предлагается усиление метода динамических моментов, позволяющее, в частности, для случая, разобранного в разделе 3, получить и s-фазу при всех энергиях, кроме одной. Таким образом, результатом настоящей работы является доказательство того, что по заданному гейзенберговскому матричному элементу любого скалярного локального оператора $A(x, t)$ для рассеяния одной частицы во внешнем поле можно восстановить всю матрицу рассеяния с точностью до постоянного (т. е. не зависящего от энергии и передаваемого импульса) фазового множителя. Полученный результат справедлив и для эквивалентной (в силу связи между (1) и (2)) задачи о рассеянии одной частицы на другой. Изложенная методика пригодна как для нерелятивистского, так и для релятивистского случая.

2. Для установления связи между матричными элементами (1) и (2) их надо прежде всего параметризовать, т. е. выразить через формфакторы, обладающие соответствующими инвариантными свойствами. Матричный элемент (1) может быть параметризован с помощью техники, изложенной в [1], с тем отличием, что за счет нерелятивистского характера задачи вместо лоренц-инвариантности надо налагать требование галилеевской инвариантности. В этом случае формфакторы будут зависеть от шести независимых галилеевских инвариантов, которые могут быть выбраны следующим образом:

$$q_1=\vec{k}^2,\ q_2=\vec{k}'^2,\ q_3=\vec{k}\vec{k}',\ q_4=(\vec{K}-\vec{K}')^2,\ q_5=\vec{k}(\vec{K}-\vec{K}'),\ q_6=\vec{k}'(\vec{K}-\vec{K}'), \tag{3}$$

где $\vec{k}$, $\vec{k}'$, $\vec{K}$, $\vec{K}'$ связаны с $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_1'$, $\vec{k}_2'$ при помощи преобразования Якоби:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \vec{k}_1+\vec{k}_2, & \vec{k} &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{k}_1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{k}_2, \\ \vec{K}' &= \vec{k}_1'+\vec{k}_2', & \vec{k}' &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{k}_1'-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{k}_2'. \end{aligned} \tag{4}$$

Известно, что с помощью перехода к координатам Якоби (4) нерелятивистская задача о рассеянии двух частиц друг на друге сводится к задаче о рассеянии одной частицы на неподвижном центре. Соответственно этому матричный элемент (1) должен быть одно-однозначным образом связан с матричным элементом (2) скалярного локального оператора $A_0(\vec{r}, t)$ в системе центра инерции, заданным между состояниями с фиксированным относительным импульсом.

В силу трансляционной инвариантности

$$\langle\vec{K}\vec{k}\,|\,A(\vec{x}, t)\,|\,\vec{K}'\vec{k}'\rangle = e^{it(\varepsilon-\varepsilon')+it(E-E')+ix(\vec{K}'-\vec{K})}\langle\vec{K}\vec{k}\,|A(0, 0)\,|\,\vec{K}'\vec{k}'\rangle, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon=\frac{\vec{k}^2}{2\mu},\ \varepsilon'=\frac{\vec{k}'^2}{2\mu},\ \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},$$

$$E=\frac{\vec{K}^2}{2(m_1+m_2)},\ E'=\frac{\vec{K}'^2}{2(m_1+m_2)},$$

и в силу галилеевской инвариантности

$$\langle\vec{K}\vec{k}\,|\,A(0,0)\,|\,\vec{K}'\vec{k}'\rangle = f\,q_1, \ldots, q_6, \tag{6}$$

где f — формфактор, зависящий от шести независимых галилеевских инвариантов (3).

Матричный элемент

$$\langle \vec{X}\vec{k} \,|\, A(\vec{x}, t) \,|\, \vec{X}'\vec{k}' \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{it(\varepsilon-\varepsilon')} \int d\vec{K}\, d\vec{K}' e^{i\vec{K}'(\vec{x}-\vec{X}')-i\vec{K}(\vec{x}-\vec{X})} \langle \vec{K}\vec{k} \,|\, A(0, 0) \,|\, \vec{K}'\vec{k}' \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{it(\varepsilon-\varepsilon')} \int d\vec{Q}' e^{i\frac{1}{2}\vec{Q}'(\vec{X}-\vec{X}')} \int d\vec{Q} e^{i\vec{Q}\left[\frac{1}{2}(\vec{X}+\vec{X}')-\vec{x}\right]} f(\vec{k}^2, \vec{k}'^2, \vec{k}\vec{k}', Q^2, \vec{k}\vec{Q}, \vec{k}'\vec{Q}) =$$

$$= e^{it(\varepsilon-\varepsilon')} \delta(\vec{X} - \vec{X}')\, F(\vec{k}^2, \vec{k}'^2, \vec{k}\vec{k}', (\vec{x} - \vec{X})^2, \vec{k}(\vec{x} - \vec{X}), \vec{k}'(\vec{x} - \vec{X})) \tag{7}$$

диагонален по $\vec{X}$ и зависит, кроме $\vec{k}^2$, $\vec{k}'^2$, $\vec{k}\vec{k}'$, лишь от разности $(\vec{x}-\vec{X})$. Это означает, что (7) есть не что иное, как матричный элемент локального оператора $A_0(\vec{r}, t)$ из (2) в системе центра инерции, помноженный на $\delta(\vec{X}-\vec{X}')$:

$$\langle \vec{X}\vec{k} \,|\, A(\vec{x}, t) \,|\, \vec{X}'\vec{k}' \rangle \equiv \delta(\vec{X} - \vec{X}') \langle \vec{k} \,|\, A_0(\vec{r}, t) \,|\, \vec{k}' \rangle, \tag{8}$$

где $\vec{r} = (\vec{x} - \vec{X})$ — координата точки пространства относительно системы центра инерции.

Соотношение (8) устанавливает искомое одно-однозначное соответствие между формфакторами $A(\vec{x}, t)$ и $A_0(\vec{r}, t)$.

3. Перейдем к установлению связи матричного элемента (2), а следовательно и (1), с S-матрицей. Матричный элемент скалярного локального оператора $A_0(\vec{r})$ в представлении Шредингера имеет вид

$$\langle \vec{p} \,|\, A_0(\vec{r}) \,|\, \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\vec{r}} F[(\vec{p} - \vec{p}')^2], \tag{9}$$

где формфактор $F[(\vec{p} - \vec{p}')^2]$ является функцией лишь квадрата разности импульсов $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ [1] за счет галилеевской инвариантности матричного элемента $<\vec{p}/A_0(0)/\vec{p}'>$.

Найдем теперь матричный элемент локального оператора $A_0(\vec{r}, t)$ в представлении Гейзенберга. Волновая функция $\psi_{\vec{k}}(\vec{p}) \equiv <\vec{p}/\vec{k}>$, являющаяся решением «*out*» уравнения Шредингера

$$\frac{\vec{k}^2}{2\mu} \psi_{\vec{k}}(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \psi_{\vec{k}}(\vec{p}) + \int d\vec{p}' \langle \vec{p} \,|\, V \,|\, \vec{p}' \rangle \psi_{\vec{k}}(\vec{p}'), \tag{10}$$

имеет вид

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{\Phi(\vec{p}, \vec{k})}{k^2 - p^2 + i\alpha} \langle p \,|\, k \rangle. \tag{11}$$

Тогда в представлении Гейзенберга

$$\langle \vec{k} \,|\, A_0(\vec{r}, t) \,|\, \vec{k}' \rangle = \langle \vec{k} \,|\, \vec{p} \rangle \langle \vec{p} \,|\, A_0(\vec{r}, t) \,|\, \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' \,|\, \vec{k}' \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} e^{it(\varepsilon-\varepsilon')} \int d\vec{p}\, d\vec{p}' \left[\delta(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{\Phi^*(\vec{p}, \vec{k})}{k^2 - p^2 - i\alpha} \right] e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\vec{r}} F[(\vec{p} - \vec{p}')^2] \times$$

$$\times \delta(\vec{p}' - \vec{k}') + \frac{\Phi(\vec{p}', \vec{k}')}{k'^2 - p'^2 + i\alpha} \bigg]. \tag{12}$$

Для динамического момента [1]

$$\frac{\mu}{F(0)} \vec{B}_1(t) = \frac{\mu}{F(0)} \int d\vec{r}\, \vec{r} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{k} | A_0(\vec{r}, t) | \vec{k}' \rangle \tag{13}$$

получим при $t \to -\infty$

$$\frac{\mu}{F(0)} \vec{B}_1(-\infty) = \vec{k}\delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{14}$$

и при $t \to +\infty$

$$\frac{\mu}{F(0)} \vec{B}_1(+\infty) = \vec{k}\delta(\vec{k} - \vec{k}') + 2\pi i \vec{k}'\delta(k^2 - k'^2)\,\Phi^*(\vec{k}', \vec{k}) -$$

$$- 2\pi i \vec{k}\delta(k^2 - k'^2)\,\Phi^*(\vec{k}, \vec{k}') + 4\pi^2\delta(k^2 - k'^2) \cdot \int d\vec{p}\,\delta \times$$

$$\times (k^2 - p^2)\,\vec{p}\Phi(\vec{p}, \vec{k}')\,\Phi^*(\vec{p}, \vec{k}) =$$

$$= \vec{k}\delta(\vec{k} - \vec{k}') + \delta(k^2 - k'^2)\,\vec{\chi}(\vec{k}, \vec{k}'). \tag{15}$$

При получении (14) и (15) использовалось соотношение

$$\lim \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\alpha} = \begin{cases} \delta(\omega) & \text{при } t \to +\infty \\ 0 & \text{при } t \to -\infty. \end{cases} \tag{16}$$

Выражения (14) и (15) представляют собой не что иное, как матричные элементы оператора импульса в представлении Гейзенберга при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ соответственно.

Так как динамический момент $\vec{B}_1$ является асимптотическим интегралом движения [1], то $\vec{B}_1(-\infty)$ и $\vec{B}_1(+\infty)$ выражаются друг через друга с помощью S-матрицы:

$$\vec{B}_1(+\infty) = \hat{S}^+\vec{B}_1(-\infty)\hat{S} \text{ или } \hat{S}\vec{B}_1(+\infty) = \vec{B}_1(-\infty)\,\hat{S}. \tag{17}$$

Найдем матричный элемент этого операторного равенства между двумя состояниями, характеризуемыми квантовыми числами

l, m, k и l', m', k';

$$\langle lmk | \hat{S} | l''m''k'' \rangle \langle l''m'' | \vec{n}'' \rangle \langle \vec{k}'' | \vec{B}_1(+\infty) | \vec{k}' \rangle \langle \vec{n}' | l'm' \rangle =$$

$$= \langle lm | \vec{n} \rangle \langle \vec{k} | B_1(-\infty | \vec{k}'' \rangle \langle \vec{n}'' | l''m'' \rangle \langle l''m''k'' | \hat{S} | l'm'k' \rangle. \tag{18}$$

Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что произвольная векторная функция векторов $\vec{k}$ и $\vec{k}'$ может быть представлена в виде

$$A_i(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{\substack{lm \\ l'm'}} \sum_{\mu=-1}^{1} \alpha_{i\mu} Y_{lm}(\vec{n})\, Y^*_{l'm'}(\vec{n}')\, \langle l'm' 1\mu | lm \rangle\, A_l^{l'}(k, k') \sqrt{\frac{3}{4\pi}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m,m'} \sum_{r,\mu=-1}^{1} \alpha_{i\mu} Y_{lm}(\vec{n})\, Y^*_{l+rm'}(\vec{n}')\, \langle l + rm' 1\mu | lm \rangle\, A_l^r(k, k') \sqrt{\frac{3}{4\pi}}, \tag{19}$$

где матрица $\alpha_{i\mu}$ имеет вид

$$\alpha_{i\mu} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

и является с точностью до множителя $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}$ матрицей перехода от нормальных координат к декартовым.

В результате получается следующее алгебраическое уравнение, которое связывает $S_l(k)$ с $S_{l'}(k)$:

$$2\left[S_{l'}(k) - S_l(k)\right] \sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}} \langle l'010 \mid l0 \rangle \sum_{\mu} \alpha_{i\mu} \langle l'm' \mid \mu \mid lm \rangle =$$

$$= S_l(k)\, \chi_l^{l'-l}(k, k) \sum_{\mu} \alpha_{i\mu} \langle l'm' 1\mu \mid lm \rangle, \tag{21}$$

где $\langle l'm' 1\mu \mid lm \rangle$ — коэффициенты Клебша—Жордана, определенные в соответствии с [3].

Из (21) для $l' = l, l \pm 1$ (кроме $l = l' = 0$) получаем:

$$2\left[S_{l'}(k) - S_l(k)\right] \sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}} \langle l'0 \mid 0 \mid l0 \rangle = \chi_l^{l'-l}(k, k)\, S_l(k). \tag{22}$$

Как нетрудно показать, из вида функции $\chi(\vec{k}, \vec{k}')$ для произвольных $\Phi(p, k)$ и из (22) следует, что $\chi_j^0(k, k') \equiv 0$ для любых j. Поэтому уравнение (22) справедливо лишь для случая, когда $l' = l \pm 1$. Из (22) получаем два уравнения, связывающие S_l и S_{l+1}:

$$S_{+1}(k) = \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+3}{l+1}}\, \chi_{l+1}^{-1}(k, k)\right]^{-1} S_l(k) \tag{23}$$

и

$$S_{l+1}(k) = \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{l+1}}\, \chi_l^{1}(k, k)\right] S_l(k). \tag{24}$$

Если существует нетривиальное решение для $S_l(k)$, то уравнения (23) и (24) линейно зависимы. Поэтому из этих уравнений можно восстановить всю S-матрицу, зная S_0 (т. е. нулевую фазу) и матричный элемент оператора $A(\vec{x}, t)$ в представлении Гейзенберга.

В качестве примера восстановим S-матрицу в случае, когда частица рассеивается на нелокальном разделяющемся потенциале, имеющем вид [4]:

$$\langle \vec{p} \mid V \mid \vec{p}' \rangle = -\frac{1}{2\mu} \sum_l (2l+1)\, \lambda_l v_l(p)\, v_l(p')\, P_l(\vec{n}\vec{n}'), \tag{25}$$

где $P_l(\vec{n}\vec{n}')$ — полином Лежандра.

В этом случае уравнение Шредингера решается точно и волновая функция имеет вид:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \frac{1}{k^2 - p^2 + i\alpha} \sum_l (2l+1) \frac{\lambda_l v_l(p)\, v_l(k)}{f_l(k)} P_l\left(\frac{\vec{p}\vec{k}}{p_k}\right), \tag{26}$$

где

$$f_l(k) = 1 + \lambda_l \int \frac{v_l^2(p')}{k^2 - p'^2 + i\alpha} d\vec{p}'.$$

Функция $\vec{\chi}(\vec{k}, \vec{k}')$, входящая в (15), определяется соотношением

$$\vec{\chi}(\vec{k}, \vec{k}') = 2\pi i\vec{k} \sum_l (2l+1)\lambda_l \frac{v_l^2(k)}{f_l(k)} P_l(\vec{n}\vec{n}') -$$

$$- 2\pi i\vec{k}' \sum_l (2l+1)\lambda_l \frac{v_l^2(k)}{f_l^*(k)} P_l(\vec{n}\vec{n}') +$$

$$+ 2\pi^2 k^2 \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) \frac{v_l^2(k)\, v_{l'}^2(k)}{f_{l'}(k)\, f_l^*(k)} \lambda_l \lambda_{l'} \int d\vec{n}''\vec{n}'' P_l(\vec{n}\vec{n}'')\, P_{l'}(\vec{n}''\vec{n}'). \quad (27)$$

Матричный элемент S-матрицы, соответствующий рассеянию в s-состоянии, т. е. S_0, оказывается равным

$$S_0(k) = \frac{f_0^*(k)}{f_0(k)}. \quad (28)$$

Из уравнения (24), выражений (27) и (19) находим, что

$$S_{l+1}(k) = \frac{f_{l+1}^*(k)}{f_{l+1}(k)} \cdot \frac{f_l(k)}{f_l^*(k)} S_l(k). \quad (29)$$

Отсюда, учитывая (28), получаем

$$S_l = \frac{f_l^*(k)}{f_l(k)} \text{ для любых значений } l. \quad (30)$$

Таким образом, по известному матричному элементу оператора плотности массы в гейзенберговском представлении и нулевой фазе S-матрицы полностью восстанавливается S-матрица.

4. Покажем, что метод динамических моментов можно усилить, получив информацию об s-фазе.

Для этого рассмотрим величину

$$\frac{1}{F(0)} \vec{D}(t) = \left(1 - t\frac{\partial}{\partial t}\right) \int d\vec{r}\vec{r} \langle \vec{k} | A_0(\vec{r}, t) | \vec{k}' \rangle, \quad (31)$$

которая представляет собой не что иное, как прицельный параметр рассеиваемой частицы.

При $t \to -\infty$

$$\frac{1}{F(0)} \vec{D}(-\infty) = i \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (32)$$

При $t \to +\infty$

$$\frac{1}{F(0)} \vec{D}(+\infty) = i \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}') + i\vec{\theta}(\vec{k}, \vec{k}')\, \delta(k^2 - k'^2) +$$

$$+ i\vec{Q}(\vec{k}, \vec{k}') \frac{\partial}{\partial k} \delta(k^2 - k'^2), \quad (33)$$

где

$$\vec{\theta}(\vec{k}, \vec{k}') = 2\pi i \left\{ 2\pi i \int d\vec{p}'\Phi(\vec{p}', \vec{k}')\,\delta(k^2 - p'^2)\,\frac{\partial}{\partial \vec{p}'}\Phi^*(\vec{p}', \vec{k}^*) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \vec{k}}\Phi(k', k'; \vec{n}\vec{n}') - \frac{\partial}{\partial \vec{k}'}\Phi^*(k, k, \vec{n}\vec{n}')\right\},$$

$$\vec{Q}(\vec{k}, \vec{k}') = 2\pi i \left\{ - 2\pi i \int d\vec{p}'\Phi(\vec{p}', \vec{k}')\,\vec{p}'\Phi^*(\vec{p}', \vec{k})\,\frac{1}{k}\,\delta(k'^2 - p'^2) - \right.$$

$$\left. - \vec{n}\Phi(k', k', \vec{n}\vec{n}') + \vec{n}'\,\frac{k'}{k}\,\Phi^*(k, k, \vec{n}\vec{n}')\right\} \qquad (34)$$

и

$$\Phi(k, k', \vec{n}\vec{n}') \equiv \Phi(\vec{k}, \vec{k}').$$

Моменты $D(-\infty)$ и $D(+\infty)$ выражаются друг через друга при помощи S-матрицы

$$\hat{S}\vec{D}(+\infty) = \vec{D}(-\infty)\hat{S}. \qquad (35)$$

Из матричных элементов этого операторного равенства между двумя состояниями, характеризуемыми квантовыми числами l, m, k и l', m', k', получается дифференциальное уравнение, связывающее S_l и $S_{l'}$ для $l' = l$, $l \pm 1$ (кроме $l = l' = 0$):

$$S_l(k)\left[\delta(k^2 - k'^2)\,\Theta_l^{l'-l}(k, k) + Q_l^{l'-l}(k, k')\,\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k^2 - k'^2)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}}\,\langle l'0\,|\,0\,|\,l0\rangle\left\{\frac{2}{k'}\,S_{l'}(k')\,\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k^2 - k'^2) + \right.$$

$$+ \frac{2}{k}\,S_l(k)\,\frac{\partial}{\partial k'}\,\delta(k^2 - k'^2) + \frac{2}{k^2}\,\delta(k^2 - k'^2) \times$$

$$\times\left[S_{l'}(k)(-1)^{\frac{1}{2}(l-l'+1)}\,\frac{1}{2}(3l' + 1 - l) + S_l(k)(-1)^{\frac{1}{2}(l'-l+1)} \times\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{1}{2}(3l + 1 - l')\right]\right\}. \qquad (36)$$

При выводе (36) необходимо воспользоваться следующим соотношением [5]:

$$\nabla_\mu Y_{lm}(\vec{n})\,\Phi(r) = \left(\frac{l+1}{2l+3}\right)^{\frac{1}{2}}\langle lm1\mu\,|\,l + 1m + \mu\rangle\,Y_{l+1m+\mu}(\vec{n})\,D_-(l)\,\Phi(r) -$$

$$- \left(\frac{l}{2l-1}\right)^{\frac{1}{2}}\langle lm1\mu\,|\,l - 1m + \mu\rangle\,Y_{l-1m+\mu}(\vec{n})\,D_+(l)\,\Phi(r), \qquad (37)$$

где

$$D_-(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \quad \text{и} \quad D_+(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r},$$

из которого нетрудно получить, что

$$\nabla_\mu Y_{lm}(\vec{n}) = \sum_{IM}(-1)^{\frac{1}{2}(I+1-l)}\,\frac{1}{2}(3l + 1 - I)\,\langle lm1\mu\,|\,IM\rangle\,\langle l0\,|\,0\,|\,I0\rangle \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2l+1}{2I+1}}\,Y_{IM}(\vec{n}). \qquad (38)$$

Из (36) после интегрирования по $\vec{k}$ и $\vec{k'}$ получаем два дифференциальных уравнения:

$$S_l(k)\,\theta_l^{l'-l}(k,k)-S_l(k)\frac{\partial}{\partial k}Q_l^{l'-l}(k,k_c)-Q_l^{l'-l}(k,k)\frac{dS_l(k)}{dk}-$$

$$-\frac{2}{k}S_l(k)\,Q_l^{l'-l}(k,k)=\sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}}\langle l'0\,|\,0\,|\,l0\rangle\left\{-\frac{4}{k^2}S_{l'}(k)+\right.$$

$$+\frac{2}{k}\frac{dS_l(k)}{dk}+\frac{2}{k^2}\left[S_{l'}(k)(-1)^{\frac{1}{2}(l-l'+1)}\frac{1}{2}(3l'+1-l)+\right.$$

$$\left.\left.+S_l(k)(-1)^{\frac{1}{2}(l'-l+1)}\frac{1}{2}(3l-l'+1)\right]\right\} \tag{39}$$

и

$$S_l(k)\,\theta_l^{l'-l}(k,k)+S_l(k)\frac{\partial}{\partial k}Q_l^{l'-l}(k_{c1}k)+\frac{1}{k}S_l(k)\,Q_l^{l'-l}(k,k)=$$

$$=\sqrt{\frac{2l'+1}{2l+1}}\langle l'0\,|\,0\,|\,l0\rangle\left\{\frac{2}{k}\frac{dS_{l'}(k)}{dk}-\frac{4}{k^2}S_l(k)+\right.$$

$$+\frac{2}{k^2}\left[S_{l'}(k)(-1)^{\frac{1}{2}(l-l'+1)}\frac{1}{2}(3l'+1-l)+\right.$$

$$\left.\left.+S_l(k)(-1)^{\frac{1}{2}(l'-l+1)}\frac{1}{2}(3l+1-l')\right]\right\}, \tag{40}$$

где k_c означает, что при дифференцировании по k эта переменная остается постоянной.

Из вида функций $\vec{Q}(k,k')$ и $\vec{\theta}(k,k')$ и из (19) следует, что $\theta_l^0(k,k')\equiv 0$ и $Q_l^0(k,k')\equiv 0$ для любых l. Поэтому уравнения (39) и (40) нетривиальны лишь для $l'=l\pm 1$. Полученные четыре дифференциальных уравнения связывают $S_l(k)$ и $S_{l+1}(k)$. Исключая из них производные $\frac{dS_l(k)}{dk}$ и $\frac{dS_{l+1}(k)}{dk}$, можно получить два алгебраических уравнения, связывающих $S_l(k)$ и $S_{l+1}(k)$. Эти уравнения не приводятся из-за громоздкости. Подобно (23) и (24) в разделе 3, эти уравнения линейно зависимы, если существует нетривиальное решение $S_l(k)$.

Из (39) и (40) получаются четыре дифференциальных уравнения, содержащие S_0 и S_1:

$$S_0(k)\left\{\Theta_0^1(k,k)-\frac{\partial}{\partial k}Q_0^1(k,k_c)-\frac{2}{k}Q_0^1(k,k)\right\}+$$

$$+\frac{dS_0(k)}{dk}\left\{\frac{2}{k}-Q_0^1(k,k)\right\}=0, \tag{41}$$

$$S_0(k)\left\{\theta_0^1(k,k)+\frac{\partial}{\partial k}Q_0^1(k_c,k)+\frac{1}{k}Q_0^1(k,k)-\frac{4}{k^2}\right\}+$$

$$+\frac{2}{k}\frac{dS_1(k)}{dk}+\frac{4}{k^2}S_1(k)=0, \qquad (42)$$

$$S_1(k)\left\{\vartheta_1^{-1}(k,k)+\frac{\partial}{\partial k}Q_1^{-1}(k_c,k)+\frac{1}{k}Q_1^{-1}(k,k)\right\}-$$

$$-\frac{2}{k}\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{dS_0(k)}{dk}=0, \qquad (43)$$

$$S_1(k)\left\{\theta_1^{-1}(k,k)-\frac{\partial}{\partial k}Q_1^{-1}(k,k_c)-\frac{2}{k}Q_1^{-1}(k,k)-\frac{4}{k^2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}+$$

$$+\frac{4}{k^2}\sqrt{\frac{1}{3}}S_0(k)-\frac{dS_1(k)}{dk}\left\{Q_1^{-1}(k,k)+\frac{2}{k}\sqrt{\frac{1}{3}}\right\}=0. \qquad (44)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (44) содержит только $S_0(k)$. Поэтому для восстановления $S_0(k)$ достаточно знать $S_0(0)$ и матричный элемент оператора $A_0(\vec{r}, t)$ в представлении Гейзенберга.

Из уравнений (39)—(40), разумеется, можно получить и остальные фазы, для чего, однако, гораздо проще воспользоваться уравнениями (23) и (24).

Для приведенного в разделе 3 примера рассеяния на нелокальном разделяющемся потенциале (25) уравнение (41) для определения s-фазы принимает вид

$$\frac{d}{dk}S_0(k)\frac{f_0(k)}{f_0^*(k)}=0, \text{ т. е. } S_0(k)=e^{i\varphi}\frac{f_0^*(k)}{f_0(k)}. \qquad (45)$$

Постоянный фазовый множитель $e^{i\varphi}$, как и следует из общего рассмотрения, определить не удается. Этот множитель можно определить, если известно значение нулевой фазы для какой-либо энергии. В случае рассеяния на потенциале (25) он оказывается равным единице.

5. Изложенная в предыдущем разделе методика восстановления S-матрицы с точностью до числового фазового множителя по гейзенберговским матричным элементам операторов любых локальных величин, т. е. любых полей и токов, может быть непосредственно обобщена на релятивистский случай. Переход к частицам со спином и полям, обладающим векторной или тензорной размерностью, не представляет никаких принципиальных затруднений и может быть проделан с помощью параметризационной техники, развитой в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков Ю. М. ЖЭТФ, **44**, 203, 1963.
2. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W. Nuovo Gimento, **1**, 205, 1955; **6**, 319, 1957.
3. Эдмондс А. Р. В сб. «Деформация атомных ядер». ИЛ, М., 1958.
4. Yamaguchi Y. Phys. Rev., **95**, 1628, 1954.
5. Rose M. E., Osborn R. K. Phys. Rev., **93**, 1315, 1954.
6. Чешков А. А., Широков Ю. М. ЖЭТФ, **44**, 1982, 1963.

Поступила в редакцию
1. 4 1963 г.

НИИЯФ