Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1963

В. Д. КУКИН

О КВАЗИОПТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ С ФИКСИРОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Предложенный недавно [1] квазиоптический метод в квантовой теории поля применяется к заряженной и симметричной скалярным мезонным теориям с фиксированным источником (нуклоном). Показано, что возможно «восстановить» потенциал взаимодействия мезона с фиксированным нуклоном в виде ряда по ренормированной константе связи.

За последние годы в квантовой теории взаимодействующих полей были развиты весьма мощные методы изучения амплитуд рассеяния (дисперсионные схемы различного типа и т. п.). С другой стороны, хорошо известен иной подход к квантовой теории рассеяния, связанный с рассмотрением соответствующего уравнения Шредингера с некоторым потенциалом. В этом случае основная трудность состоит в том, что не удается последовательно и разумно сформулировать потенциал, входящий в исходное уравнение Шредингера.

Недавно была выдвинута [1] очень интересная идея о связи этих двух точек зрения на амплитуду рассеяния и о возможности «восстановления» некоторого эквивалентного потенциала с помощью сведений об амплитуде рассеяния, полученных из S-матричной схемы, что представляется особенно интересным в связи с изучением проблемы связанных состояний и т. п. При этом авторы [1] естественным образом приходят к понятию комплексного потенциала и по аналогии с оптической моделью ядерных реакций называют свой метод квазиоптическим.

В данной работе мы применим квазиоптический метод к мезонным теориям с фиксированным источником (нуклоном). В этих теориях отсутствуют антинуклоны и пренебрегается отдачей нуклонов, что весьма упрощает вычислительную часть, в то же время сохраняя в основном существенные черты полностью релятивистской теории.

Нас будет интересовать потенциал взаимодействия мезона с фиксированным нуклоном, и поэтому мы будем рассматривать задачу рассеяния мезона на фиксированном нуклоне. При этом оказывается более удобным для изучения амплитуды рассеяния привлечь уравнения Лоу для рассеяния [2], так как эти уравнения содержат в явной и компактной форме условия унитарности и перекрестной симметрии, что в особенности важно в рассматриваемом квазиоптическом методе. Необходимо при этом отметить, что само по себе использование уравнений

Лоу для изучения амплитуд рассеяния осложняется тем обстоятельством, что амплитуды различных процессов входят в уравнения Лоу нелинейно, и поэтому представляется особенно интересной предлагаемая квазиоптическим методом возможность связи с задачей потенциального рассеяния, в которую амплитуда рассеяния входит линейным образом.

В § 1 рассматривается задача потенциального рассеяния мезона на фиксированном источнике. Далее изучаются заряженная скалярная (§ 2) и симметричная скалярная (§ 3) мезонные теории и восстанавливается потенциал взаимодействия мезона с фиксированным нуклоном с точностью до шестого порядка включительно при разложении по перенормированной константе связи.

§ 1. Рассеяние на комплексном потенциале в моделях с фиксированным источником

В рассматриваемых ниже моделях с фиксированным источником потенциал факторизуется и уравнение рассеяния в импульсном представлении имеет вид

$$(\omega_p^2-\omega_q^2)\,\psi(\vec{q})-V(\omega_p)\,v(q)\int v^*(q')\,\psi(\vec{q}')\,d\vec{q}'=0,$$

$$\omega_p=+\sqrt{p^2+\mu^2}, \tag{1}$$

где $V(\omega_p)$ — функция, регулярная во всей комплексной области ω_p, за исключением возможных особенностей и разрезов на действительной оси.

Следуя [1], будем рассматривать комплексный потенциал

$$V(\omega)=ReV(\omega)+iImV(\omega),\quad ImV(\omega)\leqslant 0,$$

$$V^*(\omega)=V(\omega^*), \tag{2}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Решая (1),

$$\psi(\vec{q})=\delta(\vec{p}-\vec{q})+\psi_1(\vec{q}), \tag{3}$$

$$\psi_1(\vec{q})=\frac{v(q)\,v^*(p)\,V(\omega_p+i\varepsilon)}{1+V(\omega_p+i\varepsilon)\,I_1(\omega_p+i\varepsilon)}\cdot\frac{1}{(\omega_p+i\varepsilon)^2-\omega_q^2}, \tag{4}$$

$$I_1(\omega_p+i\varepsilon)=4\pi\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{k\,|v(k)|^2\,\omega_k}{\omega_k^2-(\omega_p+i\varepsilon)^2}\,d\omega_k, \tag{5}$$

найдем амплитуду рассеяния

$$T(\omega_p)=-\frac{2\pi^2 p\,|v(p)|^2\,V(\omega_p+i\varepsilon)}{1+V(\omega_p+i\varepsilon)\,I_1(\omega_p+i\varepsilon)}, \tag{6}$$

которая связана с S-матрицей:

$$S(\vec{p},\vec{q})=\delta(\vec{p}-\vec{q})+2i\delta(\omega_p-\omega_q)\,T(\omega_p). \tag{7}$$

Легко показать, что если потенциал $V(\omega)$ — комплексный и его мнимая часть отрицательна (2), то

$$SS^+<1, \tag{8}$$

т. е. матрица рассеяния «недоунитарна», что соответствует поглощению мезонов в связанные состояния.

Написанные выше формулы не учитывают возможных «внутренних» степеней свободы частиц (спин, изоспин и т. п.).

В скалярных мезонных теориях с фиксированным источником рассеяние мезонов происходит только в состоянии S-волны, поэтому в дальнейшем мы будем опускать зависимость амплитуды рассеяния от момента импульса, считая, что все следующие ниже формулы относятся к S-волне, а будем интересоваться только изотопической структурой амплитуды рассеяния. В силу изотопической инвариантности рассматриваемых в дальнейшем вариантов теории при реакции рассеяния сохраняется полный изотопический спин системы фиксированный источник (нуклон) плюс мезонное поле. Поэтому матрица рассеяния приводится к диагональной форме и формула (6) будет определять амплитуду рассеяния T_I в канале с определенным значением сохраняющегося полного изоспина I через соответствующий потенциал V_I:

$$T_I(\omega_p) = -\frac{2\pi^2 p\,|v(p)|^2 V_I(\omega_p + i\varepsilon)}{1 + V_I(\omega_p + i\varepsilon)\, I_1(\omega_p + i\varepsilon)}. \tag{9}$$

Здесь, как обычно, $\varepsilon \to +0$ после взятия соответствующих интегралов.

§ 2. Заряженная скалярная теория

В заряженной скалярной мезонной теории [3] с фиксированным источником (нуклоном) гамильтониан взаимодействия в импульсном представлении запишем в виде

$$H' = g_0 (2\pi)^{-3/2} \int \frac{u_p}{\sqrt{2\omega_p}} \{\tau_+ (a_{p,+} + a^+_{p,-}) + \tau_- (a^+_{p,+} + a_{p,-})\}\, d\vec{p}, \tag{10}$$

где $\omega_p = +\sqrt{p^2 + \mu^2}$; g_0 — неренормированная константа связи мезонного поля с нуклоном; u_p — форм-фактор нуклона («обрезание» по импульсам). Правила перестановки операторов рождения $a^+_{p,\pm}$ (уничтожения $a_{p,\pm}$) мезонов с импульсом $\vec{p}$ и зарядом ± 1

$$a_{p,\pm} a^+_{p',\pm} - a^+_{p',\pm} a_{p,\pm} = \delta_{pp'}. \tag{11}$$

Все прочие пары операторов коммутируют.

Операторы $\tau_-(\tau_+)$ переводят «голый» протон (нейтрон) в «голый» нейтрон (протон) и удовлетворяют условию

$$\tau_-\tau_+ + \tau_+\tau_- = 1. \tag{12}$$

В данной модели отсутствуют нейтральные мезоны, поэтому рассеяние будет происходить без перезарядки участвующих в нем частиц. Кроме того, достаточно рассмотреть только амплитуду рассеяния на протоне, так как в силу зарядовой симметрии модели амплитуды рассеяния на протоне и на нейтроне удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} T(P\pi^+ \to P\pi^+) &= T(N\pi^- \to N\pi^-), \\ T(P\pi^- \to P\pi^-) &= T(N\pi^+ \to N\pi^+). \end{aligned} \tag{13}$$

Следуя известной методике [2], легко получить уравнения Лоу для рассеяния, которые в одномезонном приближении [3] будут иметь вид

$$G(E) = \frac{g^2}{E} + \frac{1}{4\pi^2} \int_\mu^\infty f(\nu) \left\{ \frac{|G(\nu)|^2}{\nu - E} + \frac{|G(-\nu)|^2}{\nu + E} \right\} d\nu. \tag{14}$$

Здесь g — ренормированная константа связи; $f(\nu)=p_\nu|u(p_\nu)|^2$. Эти уравнения были подробно изучены в [3]. В уравнении (14) $G(E)$ рассматривается как функция комплексного переменного E, причем ее аналитические свойства определяются правой частью (14). Предельное значение $G(E)$ при стремлении E сверху на действительную полуось $\omega>0$ связано с физически интересной амплитудой рассеяния положительных мезонов на протоне

$$T_+(\omega)=\frac{f(\omega)}{4\pi}G(\omega+i\varepsilon);\quad \varepsilon\to+0,\quad \omega>0. \tag{15}$$

Амплитуда рассеяния отрицательных мезонов на протоне $T_-(\omega)$ связана с $T_+(\omega)$ соотношением перекрестной симметрии

$$T_-(\omega)=T_+(-\omega). \tag{16}$$

Для всех $\omega\geqslant\mu$ амплитуды $T_\pm(\omega)$ могут быть представлены через фазы рассеяния

$$T_\pm(\omega)=e^{i\delta_\pm(\omega)}\sin\delta_\pm(\omega), \tag{17}$$

что соответствует выполнению для $G(\omega)$ условия унитарности при $\omega\geqslant\mu$:

$$G(\omega+i\varepsilon)-G(\omega-i\varepsilon)=i\,\frac{f(\omega)}{2\pi}G(\omega+i\varepsilon)G(\omega-i\varepsilon)=i\,\frac{f(\omega)}{2\pi}|G(\omega+i\varepsilon)|^2;$$
$$G^*(\omega)=G(\omega^*). \tag{18}$$

Уравнение (14) определяет функцию $G(E)$, мероморфную во всей комплексной плоскости E за исключением двух разрезов на действительной оси $\mu\leqslant\omega<+\infty$ и $-\infty<\omega\leqslant-\mu$. При этом запись в виде (14) предполагает, что в интервале $-\mu<\omega<\mu$ на действительной оси $G(E)$ имеет только одну особенность, а именно полюс в точке $\omega=0$ с вычетом, равным g^2. Это является следствием того, что при выводе уравнений Лоу в виде (14) мы предположили, что система мезон — протон не имеет в интервале энергий $0\leqslant\omega<\mu$ других связанных состояний, кроме состояния физического нейтрона с энергией $E=0$. Если допустить наличие в системе мезон—протон кроме состояния физического нейтрона иных связанных состояний с энергиями в интервале $0<\omega<\mu$, то эти связанные состояния дадут дополнительный вклад в правую часть (14) вида

$$\sum_n\frac{R_n^{(2)}}{E_n^{(2)}-E}+\sum_n\frac{R_n^{(0)}}{E_n^{(0)}+E},\qquad (0<E_n^{(\gamma)}<\mu) \tag{19}$$

и $G(E)$ будет иметь в соответствующих точках $\omega_n^{(\gamma)}$ $(-\mu<\omega_n^{(\gamma)}<+\mu)$ полюса с вычетами, равными $R_n^{(\gamma)}$. Здесь $\gamma=0{,}2$ для состояний с зарядом, равным 0,2 соответственно.

Авторы [3] нашли точно общее решение уравнения (14) с учетом (19) и показали, что $G^{-1}(E)$ определяется с точностью до произвольной обобщенной R-функции [3], которая входит в $G^{-1}(E)$ аддитивно и представляет сумму вкладов от простых полюсов $G^{-1}(E)$, обусловленных возможными нулями амплитуды $G(E)$ на действительной оси. Легко видеть, что добавление R-функции к $G^{-1}(\omega)$ не нарушает условия унитарности (18).

С другой стороны, из (9) и (15) имеем, полагая $v(p)=u_p\omega_p^{-1}$,

$$G(E)=-\frac{(2\pi)^3V(E)}{E^2\{1+V(E)J_1(E)\}};\quad V_\pm(E)=V(\pm E); \tag{20}$$

где все функции рассматриваются как функции комплексного переменного E. Легко убедиться непосредственной проверкой, что для выполнения условия унитарности (18) функция $V(E)$ не должна иметь разрезов на положительной действительной полуоси в комплексной плоскости E. Это означает, что для физических значений энергии $\omega \geqslant \mu$ мнимая часть потенциала будет равна нулю и потенциал $V(\omega)$ оказывается действительным.

Таким образом, если амплитуда $G(E)$, определяемая с помощью (20), удовлетворяет условию унитарности (18), то функция $V(E)$ может иметь разрезы только на отрицательной действительной полуоси в комплексной плоскости E.

Очевидно также, что учет R-функции в $G^{-1}(\omega)$, не влияя на выполнение условия унитарности (18), не изменяет и свойства действительности $V(\omega)$ в физической области энергий. В дальнейшем мы не будем вообще учитывать R-функцию и в соответствии с этим опустим члены (19).

Как известно, уравнения Лоу в одномезонном приближении (14) получаются при пренебрежении всеми неупругими процессами. При выводе уравнения Лоу для рассеяния учтем теперь в промежуточных состояниях кроме упругих (одномезонных) состояний также и неупругие (двухмезонные) состояния. Учитывая при этом только вклады порядка g^6 от двухмезонных промежуточных состояний, мы придем к уравнениям Лоу вида

$$G(E) = \frac{g^2}{E} + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mu}^{\infty} f(\nu)\left\{\frac{|C(\nu)|^2}{\nu - E} + \frac{|G(-\nu)|^2}{\nu + E}\right\} d\nu +$$

$$+ g^6 \int\limits_{2\mu}^{\infty}\left\{\frac{\sigma_-(\nu)}{\nu - E} + \frac{\sigma_+(\nu)}{\nu + E}\right\} d\nu, \tag{21}$$

$$\sigma_-(\nu) = (4\pi^4)^{-1}\int\limits_{\mu}^{\infty}\int\limits_{\mu}^{\infty} f(\omega_1) f(\omega_2)\,\delta(\omega_1 + \omega_2 - \nu)\cdot\frac{d\omega_1\, d\omega_2}{\omega_1^2\omega_2^2},$$

$$\sigma_+(\nu) = (4\pi^4)^{-1}\int\limits_{\mu}^{\infty}\int\limits_{\mu}^{\infty} f(\omega_1) f(\omega_2)\,\delta(\omega_1 + \omega_2 - \nu)\cdot\frac{d\omega_1\, d\omega_2}{(\omega_1 + \omega_2)^2\,\omega_1^2}. \tag{22}$$

Здесь, как и раньше, будем рассматривать $G(E)$ в комплексной плоскости E. Учет вкладов порядка g^6 от неупругих процессов приводит к тому, что условие унитарности (18) для $G(E)$ выполняется теперь строго только для энергий $\mu \leqslant \omega < 2\mu$, в то время как для энергий $\omega \geqslant 2\mu$ это условие нарушается. Вследствие этого функция $V(E)$ (см. (20) и (21)) будет иметь разрез на положительной действительной полуоси: $2\mu \leqslant \omega < +\infty$, и потенциал $V(\omega)$ при $2\mu \leqslant \omega < +\infty$ оказывается комплексным

$$ImV(\omega) \neq 0, \qquad 2\mu \leqslant \omega < +\infty. \tag{23}$$

Учитывая все сказанное, восстановим потенциал $V(E)$ с точностью до членов порядка g^6 включительно.

Для членов порядка g^2 имеем

$$G(\pm E) = \pm \frac{g^2}{E}, \qquad V_{\pm}(E) = \pm g^2 \frac{E}{(2\pi)^3}. \tag{24}$$

В дальнейшем удобно вместо $V(E)$ ввести «обратный» потенциал $U(E)$

$$V_{\pm}(E) = \pm g^2 \frac{E}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{1 + g^2 U_{\pm}(E)}, \quad U_{\pm}(E) = U(\pm E), \tag{25}$$

с помощью которого запишем

$$G(\pm E) = \pm g^2 \frac{1}{E} \frac{1}{1 + g^2 U_{\pm}(E) \mp g^2 I(E)}, \tag{26}$$

$$I(E) = \frac{E}{(2\pi)^3} I_1(E) = \frac{E}{2\pi^2} \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{f(\nu)\, d\nu}{\nu(\nu^2 - E^2)}. \tag{27}$$

Будем искать $U_{\pm}(E)$ в виде разложения

$$U_{\pm}(E) = D_{\pm}(E) + g^2 C_{\pm}(E) + \ldots \tag{28}$$

Так как «неунитарные» поправки от неупругих каналов войдут в $G(E)$ и $V(E)$ только начиная с членов порядка g^6 и соответственно в $U(E)$ только начиная с членов порядка g^2, то условие унитарности (18) должно выполняться строго для всех энергий $\omega \geqslant \mu$ с точностью до членов порядка g^4 включительно, и поэтому получим

$$D_{\pm}(\omega) = 0. \tag{29}$$

Кроме того, из (21) видно, что в члены порядка g^6 вклады от неупругих каналов входят аддитивно, вследствие чего

$$G_{\pm}(E) = \mp E \int\limits_{2\mu}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma_{\pm}(\nu)}{\nu - E} + \frac{\sigma_{\pm}(\nu)}{\nu + E} \right\} d\nu, \tag{30}$$

и для потенциала $V(E)$ с точностью до членов порядка g^6 включительно получаем

$$V_{\pm}(E) = \pm g^2 \frac{E}{(2\pi)^3} \left\{ 1 \pm g^4 E \int\limits_{2\mu}^{\infty} \left[\frac{\sigma_{\mp}(\nu)}{\nu - E} + \frac{\sigma_{\pm}(\nu)}{\nu + E} \right] d\nu \right\}. \tag{31}$$

§ 3. Симметричная скалярная теория

Гамильтониан взаимодействия в симметричной скалярной мезонной теории с фиксированным источником (нуклоном) в импульсном представлении имеет вид

$$H' = g_0 (2\pi)^{-3/2} \int \frac{u_p}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \sum_{\lambda} [\tau_\lambda (a_{p\lambda} + a_{p\lambda}^{+})] \right\} d\vec{p}. \tag{32}$$

Здесь g_0 — неренормированная константа связи, $\lambda = 1, 2, 3$ — изотопический индекс («сорт») мезона.

Правила перестановки операторов рождения $a_{p\lambda}^{+}$ (уничтожения $a_{p\lambda}$) мезонов сорта λ с импульсом $\vec{p}$:

$$a_{p\lambda} a_{p'\lambda'}^{+} - a_{p'\lambda'}^{+} a_{p\lambda} = \delta_{pp'} \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{33}$$

Все прочие пары операторов коммутируют. Операторы τ_λ, действующие на зарядовую переменную нуклона, — обычные матрицы Паули для изоспина $1/2$.

$$\tau_\lambda \tau_{\lambda'} + \tau_{\lambda'} \tau_\lambda = 2\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3. \tag{34}$$

Наличие нейтральных мезонов ведет к возможности реакций с перезарядкой частиц, что требует лишь дополнительной аккуратности при рассмотрении изотопических переменных, хотя общая схема действий остается такой же, как и в § 2.

Вследствие изотопической инвариантности теории амплитуда рассеяния мезона из начального состояния («сорта») λ в конечное λ' будет иметь в изотопическом пространстве системы мезон—нуклон следующую матричную структуру:

$$T_{\lambda'\lambda}(\omega) = \delta_{\lambda'\lambda} T^{(S)}(\omega) + \frac{1}{2}[\tau_{\lambda'}, \tau_\lambda]_- T^{(a)}(\omega), \tag{35}$$

где ω — энергия мезона. Амплитуды $T^{(S)}$ и $T^{(a)}$ имеют простые свойства симметрии по энергии

$$T^{(S)}(-\omega) = T^{(S)}(\omega), \qquad T^{(a)}(-\omega) = -T^{(a)}(\omega) \tag{36}$$

и связаны с физически интересными амплитудами рассеяния положительных и отрицательных мезонов на протоне

$$\begin{aligned} 2T^{(S)}(\omega) &= T_-(\omega) + T_+(\omega), \\ 2T^{(a)}(\omega) &= T_-(\omega) - T_+(\omega), \end{aligned} \tag{37}$$

а также с амплитудами рассеяния «чистых» состояний с определенным значением сохраняющегося полного изоспина системы мезон—нуклон

$$\begin{aligned} T^{(S)}(\omega) &= \frac{2}{3} T_1(\omega) + \frac{1}{3} T_3(\omega), \\ T^{(a)}(\omega) &= \frac{1}{3} T_1(\omega) - \frac{1}{3} T_3(\omega), \end{aligned} \tag{38}$$

где в (38) нижний индекс есть удвоенный полный изоспин $2I$.

Запишем уравнения Лоу для амплитуд рассеяния в состояниях с сохраняющимся полным изоспином I. В одномезонном приближении с учетом вкладов порядка g^6 от неупругих (двухмезонных) каналов эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} G_\alpha(E) = g^2 \frac{b_\alpha}{E} + \frac{1}{4\pi^2} \int_\mu^\infty f(\nu) \left\{ \frac{|G_\alpha(\nu)|^2}{\nu - E} + \sum_\beta B_{\alpha\beta} \frac{|G_\beta(\nu)|^2}{\nu + E} \right\} d\nu + \\ + g^6 \int_{2\mu}^\infty \left\{ \frac{\sigma_\alpha(\nu)}{\nu - E} + \sum_\beta B_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta(\nu)}{\nu + E} \right\} d\nu, \end{aligned} \tag{39}$$

где g — ренормированная константа связи, $f(\nu) = p_\nu |u(p_\nu)|^2$, и вклады порядка g^6 от двухмезонных состояний равны

$$\sigma_1(\nu) = \pi^{-4} \int_\mu^\infty \int_\mu^\infty \frac{f(\omega_1) f(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \nu)}{\omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2)^2} [6(\omega_1 + \omega_2)^2 - 8\omega_1\omega_2] \, d\omega_1 \, d\omega_2, \tag{40}$$

$$\sigma_3(\nu) = \pi^{-4} \int_\mu^\infty \int_\mu^\infty \frac{f(\omega_1) f(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \nu)}{\omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_1 + \omega_2)^2} [3(\omega_1 + \omega_2)^2 - 2\omega_1\omega_2] \, d\omega_1 \, d\omega_2. \tag{41}$$

С помощью матриц

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_\alpha = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta \equiv 2I = 1, 3, \tag{42}$$

обладающих свойствами

$$\sum_{\gamma} B_{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta'}, \tag{43}$$

$$\sum_{\beta} B_{\alpha\beta}b_{\beta} = -b_{\alpha}, \tag{44}$$

записывается условие перекрестной симметрии

$$G_{\alpha}(-E) = \sum_{\beta} B_{\alpha\beta}G_{\beta}(E). \tag{45}$$

Точно так же, как и при выводе (14) и (21), мы считаем, что в системе мезон—нуклон не существует в интервале энергий $0 \leqslant \omega < \mu$ других связанных состояний, кроме состояния физического нуклона с энергией $E=0$. К уравнениям (39), очевидно, применимы все соображения, высказанные в § 2, с учетом, разумеется, только несколько иной матричной структуры уравнений (39) по сравнению с (14) и (21).

Функция $G_{\alpha}(E)$ связана с амплитудами рассеяния

$$T_{\alpha}(\omega) = \frac{f(\omega)}{4\pi} G_{\alpha}(\omega + i\varepsilon), \quad \omega > 0, \quad \varepsilon \to +0, \tag{46}$$

для которых существует представление через фазы рассеяния

$$T_{\alpha}(\omega) = e^{\delta_{\alpha}(\omega)} \sin \delta_{\alpha}(\omega), \qquad \omega \geqslant \mu, \tag{47}$$

что соответствует выполнению для $G_{\alpha}(E)$ условия унитарности

$$G_{\alpha}(\omega + i\varepsilon) - G_{\alpha}(\omega - i\varepsilon) = i\frac{f(\omega)}{2\pi} G_{\alpha}(\omega + i\varepsilon) G_{\alpha}(\omega - i\varepsilon) =$$

$$= i\frac{f(\omega)}{2\pi} | G_{\alpha} | \omega + i\varepsilon |^{2}, \tag{48}$$

$$G^{*}_{\alpha}(\omega) = G_{\alpha}(\omega^{*}).$$

Ввиду наличия в (39) вкладов от неупругих каналов условие унитарности (48) выполняется строго только для энергий в интервале $\mu \leqslant \omega < 2\mu$, вследствие чего фазы рассеяния (47) будут действительными в интервале $\mu \leqslant \omega < 2\mu$ и комплексными при $\omega \geqslant 2\mu$. С помощью (46), полагая в (9) $v(p) = u_{p}\omega_{p}^{-1}$, получим для $G_{\alpha}(E)$ представление через потенциал $V_{\alpha}(E)$:

$$G_{\alpha}(E) = -\frac{(2\pi)^{3} V_{\alpha}(E)}{E^{2}\{1 + V_{\alpha}(E) I_{1}'(E)\}}, \tag{49}$$

где все функции рассматриваются в комплексной плоскости E. Так же, как и раньше, легко убедиться, что, если не учитывать вкладов (40), (41) от неупругих каналов, условие унитарности (48) выполняется при всех $\omega \geqslant \mu$, функция $V_{\alpha}(E)$ не имеет разрезов на положительной действительной полуоси E и потенциал $V_{\alpha}(\omega)$ вещественен в физической области энергий $\omega > 0$. Если же учесть вклады от неупругих каналов (40) и (41), то условие унитарности нарушается для $\omega \geqslant 2\mu$, функция $V_{\alpha}(E)$ имеет разрез на действительной положительной полуоси E: $2\mu \leqslant \omega < +\infty$; и для энергий $\omega \geqslant 2\mu$ потенциал $V_{\alpha}(\omega)$ будет комплексным

$$Im V_{\alpha}(\omega) \neq 0, \qquad 2\mu \leqslant \omega < +\infty. \tag{50}$$

Восстановим теперь потенциал $V_\alpha(\omega)$ с точностью до членов порядка g^6 включительно.

Для членов порядка g^6 получаем

$$G_\alpha(E) = g^2 \frac{b_\alpha}{E}, \quad V_\alpha(E) = -g^2 \frac{E}{(2\pi)^3} b_\alpha. \tag{51}$$

Перейдем к функции $U_\alpha(E)$

$$V_\alpha(E) = -g^2 \frac{E}{(2\pi)^3} b_\alpha \frac{1}{1+g^2 U_\alpha(E)}. \tag{52}$$

Тогда

$$G_\alpha(E) = g^2 \frac{b_\alpha}{E} \cdot \frac{1}{1+g^2 U_\alpha(E) - g^2 b_\alpha I(E)}, \tag{53}$$

$$I(E) = \frac{E}{(2\pi)^3} I_1(E) = \frac{E}{2\pi^2} \int\limits_\mu^\infty \frac{f(\nu)\,d\nu}{\nu(\nu^2-E^2)}. \tag{54}$$

Представим $U_\alpha(E)$ в виде разложения

$$U_\alpha(E) = D_\alpha(E) + g^2 G_\alpha(E) + \ldots. \tag{55}$$

Сравнивая члены порядка g^4 в (53) и (39), получим

$$D_\alpha(E) = -\frac{E}{\pi^2} \int\limits_\mu^\infty \frac{f(\nu)\,d\nu}{\nu^2(\nu+E)}. \tag{56}$$

Отсюда следует, что $V_\alpha(E)$ с точностью до членов порядка g^4 включительно имеет разрез только на отрицательной действительной полуоси: $-\infty < \omega \leqslant -\mu$.

Это соответствует тому, что условие унитарности (48) должно выполняться с точностью до членов порядка g^4 включительно для всех энергий $\omega \geqslant \mu$, так как неупругие каналы дают вклады, приводящие к нарушению унитарности при $\omega \geqslant 2\mu$, только начиная с членов порядка g^6 в $G_\alpha(E)$ и $V_\alpha(E)$ и соответственно только начиная с членов порядка g^2 в $U_\alpha(E)$.

При вычислении членов $C_\alpha(E)$ необходимо учесть, что вклады от неупругих каналов входят в члены порядка g^6 в $G_\alpha(E)$ и $V_\alpha(E)$ и соответственно в $C_\alpha(E)$ аддитивно и поэтому

$$C_\alpha(E) = C_\alpha^{(1)}(E) + C_\alpha^{(2)}(E),$$

где «неунитарная» часть $G_\alpha^{(2)}(E)$ обусловлена только вкладами от неупругих каналов

$$C_\alpha^{(2)}(E) = -\frac{E}{b_\alpha} \int\limits_{2\mu}^\infty \left\{\frac{\sigma_\alpha(\nu)}{\nu-E} + \sum_\beta B_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta(\nu)}{\nu+E}\right\} d\nu; \tag{57}$$

а «унитарная» часть $C_\alpha^{(1)}(E)$ имеет вид

$$C_1^{(1)}(E) = +E\pi^{-4} \int\limits_\mu^\infty \int\limits_\mu^\infty \frac{f(\omega_1) f(\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2}{\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)(\omega_1+E)(\omega_2+E)}; \tag{58}$$

$$C_3^{(1)}(E) = -2E\pi^{-4} \int\limits_\mu^\infty \int\limits_\mu^\infty \frac{f(\omega_1) f(\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2}{\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)(\omega_1+E)(\omega_2+E)}. \tag{59}$$

Из (58) и (59) видно, что «унитарные» члены $C_\alpha^{(1)}(E)$ не создают в $V_\alpha(E)$ разрезов на положительной действительной полуоси E и, следовательно, не ведут к нарушению условия унитарности (48).

Таким образом, только «неунитарные» члены $C_\alpha^{(2)}(E)$, обязанные своим появлением наличию в (39) вкладов от неупругих процессов, ведут к нарушению условия унитарности (48) для $G_\alpha(\omega)$ при $\omega \geqslant 2\mu$ и к комплексности потенциала $V_\alpha(\omega)$ при $\omega \geqslant 2\mu$.

Заключение

На примере рассмотренных простых моделей мы показали, что в рамках квазиоптического метода [1] оказывается возможным восстановить потенциал взаимодействия мезона с фиксированным нуклоном. Надо сразу же заметить, что очень простое представление (9) амплитуды рассеяния через потенциал обусловлено тем, что в рассмотренных моделях с фиксированным источником потенциал факторизуется. Мы восстанавливали потенциал в виде ряда по ренормированной константе связи, для чего достаточно знать соответствующее разложение для амплитуды рассеяния. При этом следует еще раз отметить, что оказалось более удобным использовать уравнения Лоу в статическом приближении [2].

Разумеется, можно было бы подсчитать амплитуду рассеяния в нужном порядке по g^2 просто по теории возмущений, например, с помощью прямого суммирования графов Фейнмана (в этой связи см. [4], где подобная программа выполнена для симметричной скалярной мезонной теории с фиксированным источником). В этом случае возникают дополнительные вычислительные трудности, связанные с проблемой ренормировки получающихся выражений, в то время как в уравнение Лоу сразу входит ренормированная константа связи и никакой проблемы ренормировки вообще не возникает.

В следующей работе будет рассмотрена более реалистическая модель — симметричная псевдоскалярная мезонная теория с фиксированным источником (нуклоном).

Автор глубоко благодарен акад. Н. Н. Боголюбову, чьи советы и постоянное внимание весьма способствовали выполнению данной работы.

Автор глубоко благодарен также А. А. Логунову и А. Н. Тавхелидзе за ценные и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Preprint JINR, **E — 1145**, 1962.
2. Chew G. F., Low F. E. Phys. Rev., **101**, 1570, 1956.
3. Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J. Phys. Rev., **101**, 453, 1956.
4. Haller K. Phys. Rev., **120**, 1044, 1960.

Поступила в редакцию
25. 3 1963 г.

Кафедра
статистической физики и механики