Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1963

Б. И. МОРГУНОВ

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ НЕКОТОРЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

С помощью асимптотических методов исследовано второе приближение для вращательных движений с одной степенью свободы. Рассмотрен важный для приложений случай движения с большой энергией, приведены примеры.

§ 1. Постановка задачи

В работе [10] была рассмотрена асимптотика некоторых вращательных движений с одной степенью свободы, зависящих от медленно изменяющихся параметров, и получены уравнения, описывающие в первом приближении (с погрешностью порядка ε, где ε — малый параметр) медленное изменение энергии возмущенного движения. В настоящей работе исследуется асимптотика вращательных движений во втором приближении (с погрешностью $\sim\varepsilon^2$). Развитые методы позволяют вычислить также приближения более высоких порядков. Асимптотика колебательных движений подобных систем получена в [2—7]. Асимптотика вращательных движений рассмотрена в [8—9] методом, отличным от примененного в данной статье.

Пусть невозмущенная система имеет вид

$$m(\tau)\ddot{y} + Q(\tau, y) = 0, \quad \tau = \text{const}. \tag{1}$$

Здесь y — одномерная координата, $m(\tau)$ — масса, $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, $Q(\tau, y) \equiv \frac{\partial V(\tau, y)}{\partial y}$ — потенциальная сила, вызывающая вращение, $Q(\tau, y)$ — периодическая функция y периода 2π и $\int\limits_0^{2\pi} Q(\tau, y)\,dy = 0$.

Возмущенная система, соответствующая (1), записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(\tau)\dot{y}] + Q(\tau, y) = \varepsilon f_1(\tau, y, \dot{y}) + \varepsilon^2 f_2(\tau, y, \dot{y}), \quad \tau = \varepsilon t, \tag{2}$$

где ε — малый параметр, f_1 и f_2 периодичны по y. Члены порядка ε^3 и выше в (2) отброшены, поскольку мы ограничиваемся вычислением второго приближения. Для простоты выкладок мы рассматриваем только один медленный параметр τ, хотя общий случай, когда имеются n различных медленных параметров, изменяющихся по более сложному закону

$$\frac{d}{dt}[m(x)\dot{y}] + Q(x, y) = \varepsilon f_1(x, y, \dot{y}) + \varepsilon^2 f_2(x, y, \dot{y}) + \varepsilon^3 \ldots$$

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(x, y, \dot{y}) + \varepsilon^2 X_2(x, y, \dot{y}) + \varepsilon^3 \ldots$$

рассматривается аналогично ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n параметров).

Поставим задачу: найти во втором приближении медленно изменяющуюся функцию $\overline{E}(\tau)$, описывающую в этом приближении медленное изменение энергии возмущенного движения, а также вычислить добавку к $\overline{E}(\tau)$, учитывающую быстрое изменение энергии в том же приближении.

§ 2. Основные результаты

Система (2) может быть приведена к виду системы с быстро вращающейся фазой [1, 6, 7]. Применяя к (2) специальную схему метода усреднения, аналогичную [2—7], получим уравнение, описывающее изменение $\overline{E}(\tau)$ в виде

$$\frac{dE}{d\tau} = A_{1\mathrm{E}}(\overline{E}, \tau) + \varepsilon A_{2\mathrm{E}}(\overline{E}, \tau), \tag{3}$$

где

$$A_{1\mathrm{E}} = \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi} \frac{G\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}, \tag{4}$$

$$A_{2\mathrm{E}} = \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi} f_2\left(\tau, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right) dy +$$

$$+ \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau} + \frac{f_1 + \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\,\frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}}}{\sqrt{2m(E-V)}}\right)\frac{F[G]\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}$$

$$-\frac{1}{T_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{G\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi} F\left[-\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau} +\right.$$

$$\left.+ \frac{f_1 + \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\,\frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}}}{\sqrt{2m(E-V)}}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} +$$

$$+\frac{1}{2T_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{G\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}\frac{F\left[\frac{G}{E-V}\right]dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{2T_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{G\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}\frac{GF\left[\frac{1}{E-V}\right]dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{dm}{d\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{V}{m}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\left(f_1+\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\,\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}\frac{F\left[\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\,\frac{\partial f_1}{\partial\tau}\right]dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{E-V}{m}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{dm}{d\tau}\right)^2-\frac{d^2m}{d\tau^2}\right)\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-\qquad(5)$$

$$-\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}\frac{F\left[\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau}\frac{\partial V}{\partial\tau}+\frac{\partial^2V}{\partial\tau^2}\right]dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{dm}{d\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{V}{m}}{\frac{2}{m}(E-V)}G\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{dm}{d\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{V}{m}}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{G\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{2T_0}\int_0^{2\pi}\left\{mF\left[F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{dm}{d\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{V}{m}}{E-V}\right]\right]+\right.$$

$$+F[G]F\left[\frac{1}{E-V}\right]-F\left[F\left[\frac{1}{E-V}\right]G\right]+$$

$$\left.+\frac{2}{mT_0}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}F\left[F[G]\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial mQ}{\partial\tau}+\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\frac{\partial f_1}{\partial y}-Q\frac{f_1+\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}}}{\sqrt{2m(E-V)}}\right)dy,$$

где

$$G(E,\tau,y)=\frac{1}{m}\left(-E\frac{dm}{d\tau}+\frac{\partial mV}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\,f_1\left(\tau,y,\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right), \qquad (6)$$

$F[\varphi]$ — оператор вида

$$F[\varphi]=\int_0^y\frac{\varphi\,d\eta}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-\frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^y\frac{d\eta}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}, \qquad (7)$$

$T_0=\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}$ — период вращения. В (5) в выражения f, $\frac{\partial f_1}{\partial\tau}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}}$ вместо $\dot{y}$ нужно подставить $\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}$. Отбрасывая в (3) члены порядка ε, получим уравнение первого приближения для медленно изменяющейся энергии $\overline{E}_1(\tau)$: $\frac{d\overline{E}_1}{d\tau}=A_{1E}(\overline{E}_1,\tau)$, полученное в [10]. Если известно решение уравнения первого приближения, то (3) интегрируется элементарно. Представляя $\overline{E}(\tau)$ в виде $\overline{E}(\tau)=\overline{E}_1(\tau)+\varepsilon\overline{E}_2(\tau)$, из (3) получим линейное уравнение для $\overline{E}_2(\tau)$ вида $\frac{d\overline{E}_2}{d\tau}=\frac{\partial A_{1E}(\overline{E}_1)}{\partial E}\overline{E}_2+A_{2E}(\overline{E}_1)$, интегрирование которого дает

$$\overline{E}_2(\tau)=\exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\partial A_{1E}(\overline{E}_1)}{\partial E}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left[E_{20}+\int_{\tau_0}^{\tau}A_{2E}(\overline{E}_1)\exp\left\{-\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\partial A_{1E}(\overline{E}_1)}{\partial E}d\tau\right\}d\tau\right] \qquad (8)$$

Здесь E_{20} — значение $\overline{E}_2(\tau)$ в начальный момент времени, а $\dfrac{\partial A_{1E}}{\partial E}$ имеет вид

$$\frac{\partial A_{1E}}{\partial E}=\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau}+\frac{f_1\left(\tau,\ y,\ \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right)}{\sqrt{2m(E-V)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\frac{\partial f_1\left(\tau,\ y,\ \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right)}{\partial\dot{y}}\right)\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{mT_0}\left(\int\limits_0^{2\pi}\frac{G\,dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}-\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{G\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\right).\qquad(9)$$

Вычисляя добавку к медленной энергии второго приближения $\overline{E}(\tau)$, найдем

$$E(\tau,y)=\overline{E}(\tau)+\varepsilon\,F\,[G\,(\overline{E}(\tau),\tau,y)].\qquad(10)$$

Для сохранения нужной точности в (10) подставляется первое приближение y, для нахождения которого нужно вычислить фазу вращения. Зная второе приближение для энергии, можно легко вычислить фазу, на чем мы здесь не останавливаемся.

Начальные условия имеют вид: $E\,|_{t=t_0}=E_0=E_{10}+\varepsilon E_{20}$, где

$$E_{10}=\frac{m(\tau_0)\,b_0^2}{2}+V(\tau_0,a_0),\ E_{20}=m(\tau_0)\,b_0\,b_1+a_1\frac{\partial V(\tau_0,a_0)}{\partial y},$$

$$y(t_0)=a_0+\varepsilon a_1+0(\varepsilon^2),\quad \dot{y}(t_0)=b_0+\varepsilon b_1+0(\varepsilon^2).$$

В силу автономности невозмущенной системы можно, не нарушая общности, положить $a_0=0$.

§ 3. Асимптотика по энергии

Важным для приложений является случай больших энергий. Задача об асимптотике по большим энергиям для систем типа (2) рассматривалась другими методами в [8]. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $f_1(\tau,y,\dot{y})=\varphi_1(\tau,y)\dot{y}$, $f_2(\tau,y,\dot{y})=\varphi_2(\tau,y)\dot{y}$, $m(\tau)\equiv1$. Тогда выражения (5) и (9) примут вид

$$A_{2E}=\frac{E}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2\,dy+\sqrt{2E}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1\,dy\right)^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\,dy+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{y}\varphi_1\,d\eta\right)\varphi_1\,dy-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1\,dy\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1\,y\,dy-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi_1\,dy\int_0^{2\pi}\left(\int_0^y\varphi_1\,d\eta\right)dy-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^y\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}d\eta\right)dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\left(\int_0^y\left(\int_0^\eta\varphi_1\,d\eta\right)d\eta\right)dy-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi_1\,dy\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,y^2\,dy- \tag{11}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^y\varphi_1\,d\eta\right)dy\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,y\,dy+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1\,dy\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,y\,dy\Big\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi_2 V\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_2\,dy\int_0^{2\pi}V\,dy\right)+0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right).$$

$$\frac{\partial A_{1E}}{\partial E}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1\,dy+0\left(\frac{1}{E^2}\right). \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (8), найдем $\overline{E}_2(\tau)$ с точностью до членов порядка $\frac{1}{\sqrt{E}}$. (Эти элементарные выкладки мы опускаем). Выражение (10) примет вид

$$E(\tau,y)=\overline{E}_1(\tau)+\varepsilon\overline{E}_2(\tau)+\varepsilon\sqrt{2\overline{E}_1(\tau)}\left(\int_0^y\varphi_1\,d\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1\,dy\cdot y\right)+0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right), \tag{13}$$

где $\overline{E}_1(\tau)$ и $\overline{E}_2(\tau)$ вычислены с точностью до $\frac{1}{\sqrt{E}}$.

Пусть $\varphi_1(\tau,y)$ не зависит от y, а $f_2(\tau,y,\dot{y})$ такова, что

$$\int_0^{2\pi}f_2\left(\tau,y,\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right)dy=0.$$

Тогда $A_{2E}=0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)$, $F[G]=0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)$, и мы имеем

$$E(\tau)=e^{2\int_{\tau_0}^{\tau}\varphi_1 d\tau}E_0+\frac{1}{2\pi}e^{2\int_{\tau_0}^{\tau}\varphi_1 d\tau}\int_{\tau_0}^{\tau}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\partial V}{\partial\tau}dy-\right.$$

$$\left.-2\varphi_1\int_0^{2\pi}V\,dy\right)e^{-2\int_{\tau_0}^{\tau}\varphi_1 d\tau}d\tau+0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right). \tag{14}$$

Заметим, что $\int_0^{2\pi}f_2\left(\tau,y,\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right)=0$, например, если f_2 и Q нечетны по y.

§ 4. Примеры

В качестве первого примера рассмотрим маятник Эйнштейна (математический маятник, длина которого медленно и плавно изменяется под действием внешних сил) во вращательном режиме. Для такого маятника в [10] найдена энергия в первом приближении. Уравнение маятника Эйнштейна имеет вид

$$\frac{d}{dt}[x^2(\tau)\dot{y}] + gx(\tau)\sin y = 0, \quad \tau = \varepsilon t,$$

где y — угловое отклонение, $x(\tau)$ — длина маятника, g — ускорение свободного падения. Ограничиваясь случаем больших энергий, получим из (14)

$$E(\tau) = \frac{x_0^2}{x^2} E_0 + \frac{g}{x^2}(x^3 - x_0^3) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right). \tag{15}$$

Сравнивая (15) с выражением энергии в первом приближении, приведенном в [10] (формула (11)) мы видим, что второе приближение для энергии маятника Эйнштейна с точностью до $\frac{1}{\sqrt{E}}$ получается из выражения первого приближения (взятого с той же точностью), если в последнее подставить начальную энергию во втором приближении.

Рассмотрим пример, исследованный в [8], являющийся обобщением уравнения Ван дер Поля. Расчет этого примера в первом приближении выполнен в [10]. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{y} + k^2 \sin y = \varepsilon(a - b\sin^2 y)\dot{y},$$

где a, b, k — функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$, ε — малый параметр. Для случая больших энергий из (11), (12), (13) получим

$$E = \alpha E_0 + \alpha \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{2k\frac{dk}{d\tau} - (2a - b)k^2}{\alpha} d\tau + \varepsilon\, \frac{b}{4}\sqrt{2E_{10}\alpha}\sin 2y + 0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right),$$

где $\alpha(\tau) = \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau}(2a - b)\,d\tau\right\}$. Если $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $k = \text{const}$, $\tau_0 = 0$, то имеем

$$E = e^{(2a-b)\tau}E_0 + k^2(1 - e^{(2a-b)\tau}) +$$

$$+ \varepsilon\frac{b}{4}\sqrt{2E_{10}}\, e^{\left(a - \frac{b}{2}\right)\tau}\sin 2y + 0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right).$$

В заключение укажем, что этим методом можно найти приближения любого порядка для фазы, периода и ряда других параметров, а также рассмотреть случаи, когда правая часть возмущенной системы (2) явно зависит периодически от времени t.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность В. М. Волосову за постановку задачи и обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. «Укр. матем. журн.», **7**, 5, 1955.
2. Волосов В. М. ДАН СССР, **106**, № 1, 7—10, 1956.
3. Волосов В. М. ДАН СССР, **114**, № 6, 1149—1152, 1957.
4. Волосов В. М. ДАН СССР, **117**, № 6, 927—930, 1957.
5. Волосов В. М. ДАН СССР, **121**, № 6, 959—962, 1958.
6. Волосов В. М. «Успехи математических наук», **17**, № 6 (108), 3—126, 1962.
7. Волосов В. М. «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», **3**, № 1, 3—53, 1963.
8. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», **3**, № 1, 145—158, 1963.
9. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», **3**, № 1, 131—144, 1963.
10. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **151**, № 6, 1260—1263, 1963.

Поступила в редакцию
22. 3 1963 г.

Кафедра
математики