Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1963

Б. Н. ФРОЛОВ

ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ И ТЕОРЕМА НЁТЕР

Настоящая статья является первой из серии статей, посвященных построению теории гравитационного поля на основе теории компенсирующих полей. Строится общая теория компенсирующих полей на основе применения к локальным группам теоремы Нётер. В отличие от теории Утиямы, построенная теория применима к группам, связанным с преобразованиями координат. Доказывается, что источником компенсирующего поля служит инвариант теоремы Нётер, соответствующий той группе, которая вводит данное компенсирующее поле.

Введение

За последнее время многими авторами [1—9] исследуется возможность введения различных полей исходя из соображений теории непрерывных групп Ли. Рассматривается лагранжиан исходного поля и группа Ли, относительно которой этот лагранжиан инвариантен. Оказывается, что если рассматривать параметры данной группы как функции от координат, то для того, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно этой обобщенной группы (так называемая локальная инвариантность), необходимо ввести некоторое новое поле (компенсирующее), свойства которого вполне определяются рассматриваемой группой Ли.

До работы [1] локальная группа рассматривалась, в частности, в книге Паули [10]. Паули замечает, что для инвариантности уравнения Дирака в электромагнитном поле при градиентном преобразовании $A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^\mu}$ необходимо совершить преобразование волновой функции

$$\psi \to \psi e^{ie\omega(x)}. \tag{1}$$

Это рассуждение можно обратить. Потребуем инвариантность уравнения Дирака относительно локальной группы (1). Для этого необходимо ввести векторное поле A_μ, преобразующееся под действием (1) градиентным образом, причем в уравнении Дирака поле A_μ войдет в комбинации $\nabla_\mu \psi = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi - ieA_\mu\psi$. Обращает на себя внимание аналогия между выражением $\nabla_\mu \psi$ и выражением для ковариантной производной спинора в общей теории относительности [11].

Это рассуждение было обобщено Янгом и Милсом [1] на более сложную группу вращений трехмерного изотопического пространства. В работе [1] можно заметить основные моменты формализма локальной инвариантности. Общая теория компенсирующих полей была рассмотрена Утиямой [5]. Утияма изучает инвариантность лагранжиана исходного поля Q^A относительно произвольной локальной группы. Однако он изучает только такие группы, которые не связаны с преобразованием пространственно-временных координат. Поэтому применение Утиямой построенной общей теории к группе Лоренца, которая существенно связана с преобразованиями координат, является неправомерным. Это и не позволило Утияме математически корректным образом ввести гравитационное поле. Локальная группа Лоренца и построенная на ее основе теория гравитации будут рассмотрены в следующей работе, здесь же в качестве приложения рассматривается локальная группа Тушека.

Общая теория компенсирующих полей

ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Рассмотрим произвольное поле Q^A и лагранжиан

$$L(Q^A,\ Q^A{}_{,\mu}), \tag{2}$$

где введено обозначение $Q^A{}_{,\mu} = \dfrac{\partial Q^A}{\partial x^\mu}$ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

все таки так, а не $Q_{;\mu}$

Пусть интеграл действия

$$D = \int\limits_G L\,(dx), \tag{3}$$

где интегрирование производится по 4-мерной области пространства — времени G, является инвариантом некоторой непрерывной группы Γ.

Введем дополнительные поля Δ^R, взаимодействующие с полем Q^A.

Сформулируем теперь принцип локальной инвариантности: интеграл действия (3), где под L теперь понимается общий лагранжиан $\mathfrak{L}$, включающий поле Q^A, взаимодействие поля Q^A с полями Δ^R и свободные поля Δ^R, должен быть инвариантом локальной группы Γ, причем под действием локальной группы Γ дополнительные поля Δ^R испытывают преобразование

$$\delta\Delta^R = U^R_m\,\delta\omega^m + C^{R\sigma}_m \frac{\partial\,\delta\omega^m}{\partial x^\sigma},$$

где ω^m — параметры группы Γ, а U^R_m и $C^{R\sigma}_m$ — некоторые метричные функции.

В дальнейшем понадобится введение двух типов компенсирующих полей, одно из которых будет связано с вариациями функций поля, другое с изменениями координат. Обозначим их через $\Delta_a{}^R$ и Ω^I_a. Пусть закон преобразования этих полей под действием локальной группы Γ имеет вид

$$\delta\Omega^I_a = W^I_{ma}\,\delta\omega^m + S^{I\sigma}_{ma} \frac{\partial\,\delta\omega^m}{\partial x^\sigma}, \tag{4а}$$

$$\delta\Delta_a{}^R = U^R_{ma}\,\delta\omega^m + C^{R\sigma}_{ma} \frac{\partial\,\delta\omega^m}{\partial x^\sigma}. \tag{4б}$$

(Смысл индексов, a, I и R выяснится после определения вида матриц W, S, U и C.)

Ограничиваясь рассмотрением первых производных от дополнительных полей в лагранжиане, для полной вариации интеграла действия получим

$$\delta D = \int_G (dx) \left\{ \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q^A} \bar{\delta} Q^A + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \Omega^I_a} \bar{\delta} \Omega^I_a + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \Delta_a{}^R} \bar{\delta} \Delta_a{}^R + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left[\mathfrak{L} \delta x^\sigma + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\sigma}} \bar{\delta} Q^A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Omega^I_{a,\sigma}} \bar{\delta} \Omega^I_a + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Delta_a{}^R{}_{,\sigma}} \bar{\delta} \Delta_a{}^R \right] \right\} = 0, \qquad (5)$$

где $\bar{\delta}$ есть вариация формы функции $\left(\bar{\delta} = \delta - \delta x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right)$, а вариационная производная определяется в виде

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q^A} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\sigma}} \right)$$

и аналогично для полей Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$.

Производя в (5) варьирование таким образом, что $\delta x^\sigma = 0$, а δQ^A, $\delta \Omega^I_a$ и $\delta \Delta_a{}^R$ произвольны и исчезают на границе некоторой произвольной фиксированной области G, получим уравнения полей

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta Q^A} = 0, \qquad \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \Omega^I_a} = 0, \qquad \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \Delta_a{}^R} = 0. \qquad (6)$$

Пусть под действием группы Γ

$$\delta x^\sigma = X_m{}^\sigma \delta \omega^m, \quad \delta Q^A = I_B{}^A{}_m Q^B \delta \omega^m. \qquad (7)$$

Для генераторов группы $I_B{}^A{}_m$ имеют место правила коммутации

$$I_B{}^A{}_m I_A{}^C{}_n - I_B{}^A{}_n I_A{}^C{}_m = c_m{}^k{}_n I_B{}^C{}_k, \qquad (8)$$

где $c_m{}^k{}_n$ — структурные константы группы Γ.

Подставив выражения (4) и (7) в (5) и полагая $\delta \omega^m(x)$, $\frac{\partial \delta \omega^m(x)}{\partial x^\sigma}$, $\frac{\partial^2 \delta \omega^m(x)}{\partial x^\sigma, \partial x^\rho}$ произвольными и независимыми функциями координат, получим уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Theta_m{}^\sigma = 0, \qquad (9)$$

$$\Theta_m{}^\sigma + \frac{\partial P_m{}^{\sigma\rho}}{\partial x^\rho} = 0, \qquad (10)$$

$$P_m{}^{(\sigma\rho)} = 0, \qquad (11)$$

где введены обозначения

$$\Theta_m{}^\sigma = \mathfrak{L} X_m{}^\sigma + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\sigma}} (I_B{}^A{}_m Q^B - Q^A{}_{,\nu} X_m{}^\nu) +$$

$$+ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Omega^I_{a,\sigma}} (W^I_{ma} - \Omega^I_{a,\nu} X_m{}^\nu) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Delta_a{}^R{}_{,\sigma}} (U^R_{ma} - \Delta_a{}^R{}_{,\nu} X_m{}^\nu), \qquad (12)$$

$$P_m{}^{\sigma\rho} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega^I_{a,\sigma}} S^{I\rho}_{ma} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Delta_a{}^R{}_{,\sigma}} C^{R\rho}_{ma}, \tag{13}$$

$$P_m{}^{(\sigma\rho)} = \frac{1}{2}(P_m{}^{\sigma\rho} + P_m{}^{\rho\sigma}).$$

Уравнение (9) есть результат обычной теоремы Нётер. Уравнения (10) и (11) возникают только при локальности группы Г. Эти уравнения будут использованы для определения лагранжиана взаимодействия полей Q^A, Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$ и лагранжиана свободных полей Ω^χ_a и $\Delta_a{}^R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ $S^{I\rho}_{ma}$ И $C^{R\rho}_{ma}$ И ЛАГРАНЖИАНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЕЙ Q^A, Ω^I_a И $\Delta_a{}^R$

Будем полагать, что лагранжиан взаимодействия не зависит от производных полей Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$, т. е.

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega^I_{a,\sigma}} = 0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Delta^R_{a,\sigma}} = 0. \tag{14}$$

Тогда из уравнения (10), используя (6), получим

$$-\mathfrak{L}X^\sigma_m = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}}(I^A_{Bm}Q^B - Q^A_{,\nu}X^\nu_m) + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega^I_a} S^{I\sigma}_{ma} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Delta^R_a} C^{R\sigma}_{ma}. \tag{15}$$

Это есть система дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой даст зависимость лагранжиана $\mathfrak{L}$ от величин Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$.

Обозначим оператор правой части уравнения (15) через D^σ_m. Произведем замену $\mathfrak{L} = \Lambda L$ так, чтобы для L было бы справедливо однородное уравнение $D^\sigma_m L = 0$ (в дальнейшем будет видно, что такая замена возможна).

Исследуя условия совместности этой системы [12], убеждаемся, что должно иметь место соотношение

$$(D^\sigma_m D^\mu_n - D^\mu_n D^\sigma_m)L = -X^\sigma_n D^\mu_m L + X^\mu_m D^\sigma_n L. \tag{16}$$

Это накладывает определенные ограничения на матрицы S и C.

До сих пор величины Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$ входили во все уравнения симметричным образом, однако в искомом лагранжиане эта симметрия не может соблюдаться, так как поля Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$, как было уже отмечено, играют различную компенсирующую роль. Поэтому накладываем на лагранжиан несимметричное относительно Ω^I_a и $\Delta_a{}^R$ упрощающее соотношение (16) требование

$$\frac{\partial}{\partial\Delta^R_a} S^{I\mu}_{mb} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\Delta^R_a} C^{I\mu}_{mb} = 0. \tag{17}$$

Тогда из (16) для определения матрицы S получим уравнение

$$S^{I\sigma}_{ma} \frac{\partial}{\partial\Omega^I_a} S^{J\mu}_{nb} = X^\mu_m S^{J\sigma}_{nb},$$

решение которого есть

$$S^{I\mu}_{na} = X^I_n \Omega^\mu_\alpha. \tag{18}$$

Из (18) ввиду ($4a$) следует, что верхний индекс у величины Ω_a^I имеет смысл координатного индекса. Подставив (18) и (17) в (16), получим уравнение

$$X_n^I \Omega_a^\mu \frac{\partial}{\partial \Omega_a^I} C_{mb}^{P\sigma} = X_n^\sigma C_{mb}^{P\mu},$$

решение которого есть

$$C_{ma}^{R\sigma} = M_m^R \Omega_a^\sigma, \tag{19}$$

где M_m^R — произвольная числовая матрица.

Произведем в (4б) преобразование

$$\Delta_a^p \to \Delta_a^m = (M^{-1})_P^m \Delta_a^P, \; U_{na}^p \to U_{na}^m = (M^{-1})_P^m U_{na}^P.$$

Тогда из (4б) получим

$$\delta\Delta_a^m = U_{na}^m \delta\omega^n + \delta_n^m \Omega_a^\sigma \frac{\partial \delta\omega^n}{\partial x^\sigma}. \tag{20}$$

Это показывает, что без нарушения общности матрицу C можно выбрать в виде

$$C_{na}^{m\sigma} = \delta_n^m \Omega_a^\sigma. \tag{21}$$

Из (21) ввиду (4б) следует, что верхний индекс у Δ_a^m относится к тому же пространству, в котором задаются параметры группы Г. Верхний индекс у матрицы M_m^R может относиться, вообще говоря, к произвольному пространству. Поэтому верхний индекс у величины Δ_a^R может (при соответствующем выборе матрицы M_m^R) быть, в частности, спинорным индексом.

Теперь можно показать, что величину Λ нужно выбрать в виде

$$\Lambda = det\,|\,\Omega_\mu^a\,|, \tag{22}$$

где Ω_μ^a — матрица, обратная к Ω_a^μ, т. е. определяемая соотношениями

$$\Omega_a^\mu \Omega_\mu^b = \delta_a^b, \qquad \Omega_a^\mu \Omega_\nu^a = \delta_\nu^\mu. \tag{23}$$

Для этого нужно воспользоваться (18) и соотношением

$$\delta_\nu^\mu \, d\Lambda = \Lambda \Omega_a^\mu \, d\Omega_\nu^a = - \Lambda \Omega_\nu^a \, d\Omega_a^\mu. \tag{24}$$

Легко проверить, что решение однородной части уравнения (15) есть произвольная функция от выражения

$$Q_{|a}^A = \Omega_a^\mu Q_{,\mu}^A - I_{Bm}^A \Delta_a^m Q^B. \tag{25}$$

Откуда следует, что величины Ω_a^μ, ${\Delta_a}^m$ и $Q,_\mu^A$ должны входить в локально инвариантный лагранжиан только в комбинации (25) и (22), а именно, что локально инвариантный лагранжиан образуется из (2) в виде

$$\mathfrak{L} = \Lambda L\,(Q^A_{,} Q_{|a}^A), \tag{26}$$

причем суммирование $Q_{|a}^A$ с оставшейся частью производится при помощи метрического тензора псевдоевклидова пространства

$$\varepsilon_{mn} = e_m \delta_{mn}, \; e_m = \begin{cases} \;\;\,1 \text{ при } m = 0 \\ -1 \text{ при } m = 1,\,2,\,3, \end{cases} \tag{27}$$

но уже по индексам типа a. Последнее обстоятельство показывает, что нижний индекс величины Ω_a^σ относится к первоначальному псевдоевклидову пространству, в то время как координатный индекс μ относится, вообще говоря, к некоторому другому пространству, структуру которого предстоит выяснить. (Индексы координатного пространства будут обозначаться греческими буквами, индексы псевдоевклидова пространства — латинскими.) Предельный случай отсутствия поля Ω_a^μ осуществляется при $\Omega_a^\mu=\delta_a^\mu$. Это есть случай, когда координатное пространство совпадает с пространством индексов типа a и является псевдоевклидовым. Отсюда следует, что пространство индексов типа a обладает вполне определенным и очень важным физическим смыслом: с помощью этих индексов описывается первоначальное псевдоевклидово пространство — время. Так как локально инвариантный лагранжиан должен быть инвариантен относительно всех тех преобразований, относительно которых инвариантен лагранжиан (2), то величина Ω_a^μ должна вести себя по нижним индексам как истинный вектор.

Полезно, используя (25), представить лагранжиан (26) в виде двух слагаемых

$$\mathfrak{L}\,(Q^A_{,}Q^A_{|a}) = \mathfrak{L}\,(Q^A_{,}\Omega^\mu_a Q^A_{,\mu}) - \frac{\partial\mathfrak{L}\,(Q^A_{,}Q^A_{|a})}{\partial Q^A_{|a}}\, I^A_{Bm} Q^B \Delta^m_a. \tag{28}$$

Это есть выделение в явном виде лагранжиана взаимодействия с полем Δ_a^m. Из (28), в частности, следует

$$\frac{\delta}{\delta\Omega^\mu_a}\,\mathfrak{L}\,(Q^A_{,}Q^A_{|a}) = -\,\Omega^a_\mu \mathfrak{L}\,(Q^A_{,}Q^A_{|a}) + \frac{\partial\mathfrak{L}\,(Q^A_{,}Q^A_{|a})}{\partial Q^{A}_{|a}{}^m}\, Q^A_{,\mu}. \tag{29}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦ W^μ_{ma} и U^n_{ma}

Для определения матриц W и U используем уравнение (9). Решение (26) уравнения (10) при условии (14) должно быть также решением уравнения (9). Как следствие (26) и (25) имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A} = \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A}\right)_{Q^A{}_{|a}=\mathrm{const}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\, I^B_{Am}\Delta^m_a, \tag{30а}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Delta^m_a} = -\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\, I^B_{Am} Q^A, \quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{,\sigma}} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\,\Omega^\sigma_a, \tag{30б}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega^\sigma_a} = -\,\mathfrak{L}\Omega^a_\sigma + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\, Q^B_{,\sigma}. \tag{30в}$$

Учитывая (6) и (25), произведем дифференцирование в (9) и в результат подставим соотношения (30). Тогда получим

$$\mathfrak{L}\,(X^\sigma_{m,\sigma} - \Omega^a_\sigma W^\sigma_{ma}) + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B}\right)_{Q^C_{|a}=\mathrm{const}} I^B_{Am}Q^A +$$

$$+ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\, I^B_{Am} Q^A_{|a} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\,(W^\sigma_{ma} - X^\sigma_{m,\,\nu}\Omega^\nu_a)\, Q^B_{,\sigma} +$$

$$+ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}\,(c^k_{mn} I^B_{Ck}\Delta^n_a Q^C - U^k_{ma} I^B_{Ck} Q^C) = 0. \tag{31}$$

Выражение (31) должно тождественно обращаться в нуль при (25) и (26). Это произойдет, если

$$W^{\sigma}_{ma} = X^{\sigma}_{m,\ \nu}\Omega^{\nu}_{a}, \tag{32}$$

$$U^{k}_{ma} = C^{k}_{m\ n}\Delta^{n}_{a}, \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^B}\right)_{Q^C_{|a}=\mathrm{const}} \cdot I^{B}_{Am} Q^A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}} I^{B}_{Am} Q^A_{|a} = 0. \tag{34}$$

Равенства (32) и (33) выясняют структуру матриц W и U, а смысл тождества (34) будет выяснен при изучении локальной группы Лоренца.

Подставив (18) и (32) в ($4a$) и учитывая (7), получим

$$\delta\Omega^{\sigma}_{a} = X^{\sigma}_{m,\nu}\Omega^{\nu}_{a}\delta\omega^m + X^{\sigma}_{m}\Omega^{\nu}_{a}\frac{\partial\delta\omega^m}{\partial x^{\nu}} = \Omega^{\nu}_{a}\frac{\partial\delta x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}. \tag{35}$$

Это показывает, что величина Ω^{σ}_{a} преобразуется в координатном пространстве как контравариантный вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛАГРАНЖИАНА $\mathfrak{L}_0$ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ Ω^{σ}_{a} и Δ^{R}_{a}

Учитывая (6), (18), (21), (32) и (33), представим уравнения (10) и (11) в виде

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_0 X^{\sigma}_{m} + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial Q^A_{,\sigma}}(I^{A}_{Bm}Q^B - Q^{\ B}_{,\nu}X^{\nu}_{m}) + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Omega^{\mu}_{a,\sigma}}(X^{\mu}_{m,\nu}\Omega^{\nu}_{a} - \Omega^{\ \mu}_{a\ ,\nu}X^{\nu}_{m}) + \\ + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Delta^{p}_{a,\sigma}}(c^{p}_{mn}\Delta^{n}_{a} - \Delta^{\ p}_{a\ ,\nu}X^{\nu}_{m}) + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Omega^{\mu}_{a}}X^{\mu}_{m}\Omega^{\sigma}_{a} + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Omega^{\mu}_{a,\nu}}(X^{\mu}_{m}\Omega^{\sigma}_{a})_{,\nu} + \\ + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Delta^{m}_{a}}\Omega^{\sigma}_{a} + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Delta^{m}_{a,\nu}}\Omega^{\sigma}_{a,\nu} = 0,\end{gathered} \tag{36}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Omega^{\mu}_{a,\sigma}}X^{\mu}_{m}\Omega^{\rho}_{a} + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Omega^{\mu}_{a,\rho}}X^{\mu}_{m}\Omega^{\sigma}_{a} + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Delta^{m}_{a,\sigma}}\Omega^{\rho}_{a} + \frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial\Delta^{m}_{a,\rho}}\Omega^{\sigma}_{a} = 0. \tag{37}$$

Преобразование $\mathfrak{L}_0 = \Lambda L_0$ переводит неоднородную систему (36) в однородную. Учитывая, что лагранжиан свободного поля $\mathfrak{L}_0$ не содержит величины Q^A, но должен содержать величины Ω^{m}_{a} и $\Delta_a^{\ m}$ и их первые производные, найдем решение однородной части системы (36) и (37) в виде произвольной функции от выражения

$$F_a^{\ m}{}_b = \Delta^{m}_{b\ ,\nu}\Omega^{\nu}_{a} - \Delta^{\ m}_{a\ ,\nu}\Omega^{\nu}_{b} + \Delta^{m}_{c}(\Omega^{\sigma}_{a,\tau}\Omega^{\tau}_{b}\Omega^{c}_{\sigma} - \Omega^{\tau}_{b,\sigma}\Omega^{\sigma}_{a}\Omega^{c}_{\tau}) - c^{m}_{pn}\Delta^{p}_{a}\Delta^{n}_{b}. \tag{38}$$

В случае локальной группы Лоренца это выражение перейдет в выражение для тензора кривизны Римана в дифференциальной геометрии [13].

В заключение докажем формулу

$$Q^A_{|ab} - Q^A_{|ba} = F^{m}_{ab}I^{A}_{Bm}Q^B - Q^A_{|d}(2C^{d}_{.ab} + I^{d}_{am}\Delta^{m}_{b} - I^{d}_{bm}\Delta^{m}_{a}), \tag{39}$$

где $C^{d}_{.ab} = \frac{1}{2}(\Omega^{d}_{\mu,\nu} - \Omega^{d}_{\nu,\mu})\Omega^{\mu}_{a}\Omega^{\nu}_{b}$, а $I_a^{\ d}{}_m$ — генераторы векторного представления группы Г.

Для доказательства необходимо учесть, что величина $Q^A_{|a}$ преобразуется под действием группы Г по прямому произведению представления Q^A и векторного представления и воспользоваться тем, что генератор прямого произведения представлений есть [14]

$$I^{(1)}E^{(2)} + E^{(1)}I^{(2)}, \tag{40}$$

где индексы (1), (2) нумеруют пространства сомножителей, $I^{(1),(2)}$ есть генераторы сомножителей, а $E^{(1),(2)}$ — единичные операторы.

ТЕОРЕМА ОБ ИСТОЧНИКАХ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО ПОЛЯ

Общий лагранжиан является суммой лагранжиана свободного компенсирующего поля $\mathfrak{L}_0$ и лагранжиана (26). В этом случае из (6) имеем

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_0}{\delta\Delta_a^m} = -\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Delta_a^m}. \tag{41}$$

Из уравнения (15), используя (18), (21) и (26), легко получить

$$-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Delta_a^m} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}} I^A_{Bm} Q^B \Omega^a_\sigma. \tag{42}$$

Подставляя в (41) и используя (14), получаем

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_0}{\delta\Delta_a^m} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}} I^A_{Bm} Q^B \Omega^a_\sigma. \tag{43}$$

В случае, если группа Г не связана с преобразованием координат, из соотношений (9) и (12) следует, что правая часть соотношения (43) есть инвариант теоремы Нётер, соответствующий нелокализованной группе Г.

В случае, если группа Г связана с преобразованием координат, из (6) и (29) получаем дополнительное соотношение

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_0}{\delta\Omega_a^\mu} = -\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}} Q^A_{,\mu} - \mathfrak{L}\delta^\sigma_\mu\right)\Omega^a_\sigma. \tag{44}$$

Правая часть соотношения (44) есть тензор энергии — импульса исходного поля Q^A. Это имеет глубокий смысл, так как в следующей работе будет показано, что величина Ω^μ_a тесно связана с локальной группой 4-трансляций.

Правая часть соотношения (43) в этом случае является инвариантом теоремы Нётер, соответствующим преобразованию только функций поля по представлению группы Г. (В случае группы 4-вращений это будет спиновая часть момента количества движения.)

Итак, справедливо общее положение:

Источником компенсирующего поля, введенного локальной группой Г, служит инвариант теоремы Нётер, соответствующий нелокализованной группе Г.

Эта теорема сыграет большую роль при анализе теории гравитации.

ЛОКАЛЬНАЯ ГРУППА ТУШЕКА

Рассмотрим группу нейтринной калибровки, предложенную Тушеком [15]

$$\psi' = e^{iG\gamma_5\varepsilon}\psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi}e^{iG\gamma_5\varepsilon}. \tag{45}$$

Причем параметр ε будем считать функцией координат $\varepsilon(x)$. Постоянная G есть некоторая константа связи, аналогичная электрическому заряду в (I). Инфинитезимальные преобразования имеют вид:

$$\delta\psi = iG\gamma_5\psi\varepsilon, \quad \delta\overline{\psi} = \overline{\psi}iG\gamma_5\varepsilon. \tag{46}$$

Группа (45) является однопараметрической и коммутативной. Кроме того, в (7) $X^{\sigma}_{m} = 0$, так как группа (45) не связана с преобразованием координат. Тогда из (4*а*), (18) и (32) имеем $\delta\Omega^{\mu}_{a} = 0$ и введение величины Ω^{μ}_{a} не является в данном случае необходимым. Выберем $\Omega^{\mu}_{a} = \delta^{\mu}_{a}$. Выражения (25), (4*б*), (22) и (38) приобретают вид:

$$\psi_{|\sigma} = \psi_{,\sigma} - iG\gamma_5\Delta_\sigma\psi, \quad \overline{\psi}_{|\sigma} = \overline{\psi}_{,\sigma} - i\overline{\psi}G\gamma_5\Delta_\sigma, \tag{47а}$$

$$\delta\Delta_\sigma = \frac{\partial\varepsilon(x)}{\partial x^\sigma}, \ \Lambda = 1, \ F_{\mu\nu} = \frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Delta_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{47б}$$

Выбирая $\mathfrak{L}_0$ в виде $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, из (42) и (26) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\sigma\mu} = j^\sigma, \tag{48}$$

где

$$j^\sigma = iG\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi_{,\sigma}}\gamma_5\psi + \overline{\psi}\gamma_5\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\psi}_{,\sigma}}\right) \tag{49}$$

есть ток поля Δ_σ, порождаемый полем ψ.

Из (47а) следует, что $\gamma_5\Delta_\sigma\psi$ под действием группы вращения должно преобразоваться так же, как и $\psi_{,\sigma}$, т. е. по прямому произведению представлений $\psi\times\frac{d}{dx^\sigma}$. Так как γ_5 является псевдоскаляром, то Δ_σ есть псевдовектор, таким образом локальная группа нейтринной калибровки вводит поле псевдовекторных бозонов. Их естественно связать с нейтральными промежуточными бозонами в слабых взаимодействиях. Ввиду наличия фактора $(1+\gamma_5)$ в лагранжиане слабого взаимодействия различие между векторными промежуточными бозонами и псевдовекторными теряется. Однако здесь появляются трудности с введением заряженных промежуточных бозонов и с введением большой массы покоя промежуточных бозонов. Это есть основные трудности формализма локальной инвариантности [2].

Приложение 1. **Уравнения поля**. Произведем дальнейшие преобразования уравнений поля (41) и (44). Используя (38), уравнение (41) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial F^m_{p\sigma}} - C^p_{.ab}\frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial F^m_{ab}} - C_m{}^k{}_n\Delta^n_q\frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial F^k_{pq}} = -\frac{1}{2}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Delta^m_p}. \tag{50}$$

Комбинируя уравнения (44) и (50), получаем уравнение для величины Ω^{μ}_{a} в виде

$$F^m_{\mu\sigma}\frac{\partial\mathfrak{L}_0}{\partial F^m_{p\sigma}} - \frac{1}{2}\Omega^p_\mu\mathfrak{L}_0 = -\frac{1}{2}T_\mu{}^p, \tag{51а}$$

где

$$T_\mu{}^p = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Omega^\mu_p} + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Delta^k_p}\Delta^k_q\Omega^q_\mu = \left(-\delta^\sigma_\mu\mathfrak{L} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}}Q^A_{|a}\Omega^a_\mu\right)\Omega^p_\sigma. \tag{51б}$$

Последнее уравнение является обобщением уравнения Эйнштейна на случай произвольной локальной группы, порождающей поле Ω^{μ}_{a}. Лагранжиан $\mathfrak{L}_0$ имеет вид $\mathfrak{L}_0 = \Lambda L$, где L есть произвольная скалярная функция от $F_{ab}{}^m$. Индексы a, b относятся к первоначальному плоскому пространству и свертываются при помощи метрического тензора плоского пространства ε_{ab}. Индексы типа m относятся к пространству параметров группы Γ и свертываются при помощи метрического тензора

$$g_{mn} = C_m{}^k{}_l C_n{}^l{}_k. \tag{52}$$

Полезно также первое из уравнений (6) представить в явно ковариантном виде. Действительно, учитывая, что $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^B_{|a}}$ по индексу B преобразуется по представлению, сопряженному представлению Q^A, и используя (30a), получаем для унитарного представления Q^A (в этом случае $\widetilde{I}_m = -I_m$) первое из уравнений (6) в виде

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A_{|a}}\right)_{|a} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A}\right)_{Q^A_{|a}=\mathrm{const}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A_{|a}} I^c_{am}\Delta^m_c + \frac{1}{\Lambda}(\Lambda\Omega^\sigma_a)_{,\sigma}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A_{|a}} = 0. \tag{53}$$

При этом предполагается, что параллельный перенос определен в координатном пространстве таким образом, что

$$\Omega^\mu_{a|b} = 0, \tag{54}$$

а поэтому и

$$\Lambda_{|a} = 0. \tag{55}$$

Приложение 2. **Законы сохранения**. В качестве независимых величин можно также рассматривать величины Ω^a_μ и $\Delta^m_\mu = \Delta^m_a \Omega^a_\mu$. В этом случае уравнения поля эквивалентные уравнениям (6) будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Omega^a_{\mu,\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Omega^a_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Omega^a_\mu}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Delta^m_{\mu,\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Delta^m_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Delta^m_\mu}. \tag{56}$$

Используя (37), получаем тогда закон сохранения для произвольного компенсирующего поля в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Delta^m_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Delta^m_\mu}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Omega^a_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Omega^a_\mu}\right) = 0. \tag{57}$$

Выражения $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Delta^m_\mu}$ и $\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Omega^a_\mu}$ есть согласно теореме об источниках компенсирующего поля токи полей Δ^m_μ и Ω^a_μ, порождаемые полем Q^A. Токи $\dfrac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Delta^m_\mu}$ и $\dfrac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial \Omega^a_\mu}$ появляются вследствие того, что поля Δ^m_μ и Ω^a_μ могут нелинейным образом порождать сами себя.

В теории гравитации полученные законы сохранения будут выражать законы сохранения спина и энергии гравитационного поля.

Выводы

Итак, на основании сформулированного принципа локальной инвариантности построена общая теория компенсирующих полей. Наиболее важным результатом работы является выяснение физического смысла пространства индексов типа a как первоначального псевдоевклидова пространства — времени. В дальнейшем в теории гравитации это позволит различные симметрии касательного реперного пространства (симметрия относительно сдвигов и вращений) связать с физическими инвариантами, что в свою очередь позволит получить законы сохранения энергии и спина для гравитационного поля и, в частности, получить истинный тензор энергии — импульса гравитационного поля.

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить проф. Д. Д. Иваненко, В. И. Родичева, Г. А. Соколика и В. С. Брежнева за постоянный интерес к работе и многочисленные полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vang C. N. Mills R. L. Phys. Rev. **96**, 191, 1954.
2. Sakurai J. J. Ann. of Phys., **11**, 1, 1960.
3. Glashow S. L., Gell-Mann M., Ann. of Phys., **15**, 437, 1961.
4. Sehwinger J. Phys. Rev., **125**, 397, 1043, 1962.
5. Vtijama R. Phys. Rev., **101**, 1596, 1956.
6. Salam A., Ward J. C., Nuovo Cim., **11**, 568, 1959.
7. Адамский В. Б. «Успехи физических наук», **4**, (4), 609, 1961.
8. Бродский А., Иваненко Д., Соколик Г. ЖЭТФ, **41**, 1307, 1961.
9. Kibble T. W. B. Journ. Math. Phys., **2**, 212, 1961.
10. Паули В. Общие принципы волновой механики. ОГИЗ, 1947.
11. Фок В. А., Иваненко Д. Phys. Zs. **30**, 648, 1929; Compt. Rend., **188**, 1470, 1929; Фок В. А. Zs. f. Phys., **57**, 216, 1929.
12. Гурса З. Курс математического анализа. Гостехиздат, М., 1933, т. II, ч. II, стр. 259.
13. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. Гостехиздат, 1956, гл. V.
14. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. Физматгиз, М., 1958.
15. Touscheck B. F. Nuovo Cim., **5**, 754, 1281, 1957.

Поступила в редакцию
5. 4 1963 г.

Кафедра
статистической физики и механики