

В. В. ПАШКЕВИЧ

КУЛОНОВСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕАКСИАЛЬНОГО РОТАТОРА

Методом, развитым Альдером и Уинтером, рассмотрено кулоновское возбуждение четно-четных ядер, для описания которых используется модель жесткого неаксиального ротатора А. С. Давыдова — Г. Ф. Филиппова. Приведены результаты численных расчетов вероятности возбуждения уровней спина 2, 2', 4, 4' и 6.

Введение

Кулоновское возбуждение атомных ядер является важным источником наших сведений о низколежащих энергетических уровнях ядер и абсолютных вероятностях переходов между ними. При энергии налетающих частиц, недостаточной для проникновения через потенциальный барьер, между сталкивающимися ядрами действуют только электромагнитные силы. Если предполагать известными приведенные вероятности электромагнитных переходов в ядре, то можно дать точное теоретическое описание столкновения. До тех пор, пока $\sqrt{P_{J_f J_i}} \ll 1$ ($P_{J_f J_i}$ — вероятность перехода между уровнями ядра спина J_i и J_f), проведение расчетов по теории возмущения является оправданным [1].

Для изучения новых уровней в ядре обычно используют в качестве бомбардирующих частиц тяжелые ионы [5—9]. С ростом электрического поля, воздействующего на ядро, увеличивается вероятность возбуждения и возрастает роль процессов высшего порядка.

Альдером и Уинтером предложен метод расчета сечений кулоновского возбуждения ядер, не предполагающий справедливости разложения в ряд теории возмущения [2]. При этом предполагается малость $\xi_{1,2} = [Z_1 Z_2 e^2 (E_2 - E_1)] / (\hbar v 2E)$, где Z_{1e} и Z_{2e} — заряды сталкивающихся частиц, v — относительная скорость, $E = \frac{1}{2} m_0 v^2$, m_0 — приведенная масса, E_1 и E_2 — энергии стационарных состояний, между которыми происходит переход. ξ мало, если мало отношение характерного времени столкновения к $T = \hbar / (E_2 - E_1)$. Если приведенные вероятности спонтанных электромагнитных переходов между N -уровнями считать заданными, то оказывается возможным рассчитать сечения кулоновского возбуждения этих уровней. Тем самым устанавливается связь между сечениями и приведенными вероятностями переходов без каких бы то ни было предположений о модели ядра. Однако большое количество вводимых параметров и необходимость диагонализации матрицы

N -ного порядка затрудняет получение результатов в форме, удобной для непосредственного сравнения с экспериментом.

Предположения о природе возбуждаемых уровней позволяют упростить проблему. В работе [2] исследовано кулоновское возбуждение как вращательного спектра аксиально-симметричного ядра, так и колебаний поверхности сферического ядра.

В ряде работ А. С. Давыдова с сотрудниками предложена модель неаксиального ядра [3]. С помощью этой модели свойства ядер в широкой области получают хорошее количественное описание. Даже если равновесное значение параметра γ , описывающего неаксиальность формы ядерной поверхности, равно нулю, связь нулевых колебаний с вращением приводит к отличному от нуля эффективному значению γ . Оно и принимается в качестве параметра в модели неаксиального ротатора [4].

В настоящей работе методом, развитым в [2], рассчитаны вероятности кулоновского возбуждения вращательных состояний неаксиальных ядер. В первом параграфе найдено сечение возбуждения ядра. Свойства симметрии и метод вычисления интеграла, определяющего сечение, обсуждается во втором параграфе. В последнем параграфе приведены результаты численных расчетов.

§ 1. Сечение возбуждения вращательных состояний неаксиального ядра

Будем описывать возбужденное состояние ядра волновой функцией Ψ , удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_0 \Psi + H'(t) \Psi, \quad (1)$$

где H_0 — гамильтониан свободного вращения неаксиального ядра. Собственные функции (2) этого оператора описывают стационарные состояния ядра до и после столкновения

$$\Psi_M^{J\tau} = \sum_{\substack{K \geq 0 \\ K \text{ чётно}}} a_K(J\tau) \Phi_{MK}^J. \quad (2)$$

Величины $a_K(J\tau)$ протабулированы в [3]; J , M и K — полный момент ядра, его проекция на выделенную ось в пространстве и его проекция на ось симметрии ядра соответственно; τ нумерует различные состояния ядра, принадлежащие одному и тому же значению J ,

$$\Phi_{MK}^J \equiv N(JK) [D_{MK}^J + (-1)^J D_{M-K}^J], \quad (3)$$

$$N(JK) \equiv [(2J+1)/16\pi^2(1+\delta_{K,0})]^{1/2}, \quad (4)$$

$D_{MK}^J(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — обобщенная сферическая функция.

Движение тяжелой бомбардирующей частицы с хорошей точностью можно описать квазиклассически. Гиперболическая траектория $r_p(t)$, $\vartheta_p(t)$, $\varphi_p(t)$ задается в системе координат, выбранной, как и в [2], так, что ось симметрии орбиты направлена вдоль оси z . Тогда гамильтониан квадрупольного взаимодействия ядра с налетающей частицей имеет вид

$$H'(t) = [(4\pi Z_1 e)/5] \sum_{\mu} Y_{2\mu}(\vartheta_p, \varphi_p) r_p^{-3} \mathcal{M}^{\mu}(2E, \mu). \quad (5)$$

Квадрупольный момент неаксиального ядра дается выражением

$$\mathfrak{M}(2E\mu) = \sqrt{8\pi^2/5e} \mathfrak{M}_0 [\Phi_{\mu_0}^2 \cos \gamma + \Phi_{\mu_2}^2 \sin \gamma],$$

$$\mathfrak{M}_0 = (3Z_2 R_0^2 \beta) / 4\pi = \sqrt{5/16\pi} Q_0. \quad (6)$$

Решение уравнения (1) в приближении удара (т. е. $\xi = 0$), согласно [2], имеет вид

$$\Psi = \exp \left\{ -i/\hbar \int_{-\infty}^{\infty} H'(t) dt \right\} \Psi_{M_i}^{J_i \tau_i},$$

где $\Psi_{M_i}^{J_i \tau_i}$ — начальное состояние ядра. Амплитуда вероятности перехода в конечное состояние определяется с помощью Ψ следующим образом:

$$a_{J_f \tau_f M_f} = \left(\Psi_{M_f}^{J_f \tau_f}, \exp \left\{ -i/\hbar \int_{-\infty}^{\infty} H'(t) dt \right\} \Psi_{M_i}^{J_i \tau_i} \right). \quad (7)$$

Скалярное произведение берется в пространстве эйлеровых углов $\theta_1 \theta_2 \theta_3$, определяющих ориентацию главных осей ядра

$$(\Phi, \Psi) \equiv \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 \Phi^* \Psi.$$

Вероятность перехода в конечное состояние и сечение возбуждения выражаются обычным образом через $a_{J_f \tau_f M_f}$ и в обозначениях работы [1] (или же [2]) имеют вид

$$P_{J_f J_i} = (2J_i + 1)^{-1} \sum_{M_i M_f} |a_{J_f \tau_f M_f}|^2, \quad (8)$$

$$d\sigma = P_{J_f J_i} d\sigma_R, \quad (9)$$

где $d\sigma_R$ — дифференциальное сечение резерфордского рассеяния.

Используя (2), (5), (6) и (7), преобразуем (8) к виду

$$P_{J_f J_i} = 8\pi^2 (2J_i + 1)^{-1} \sum_{jM} (2j + 1) \left| \sum_K A_{MK}^j B_K^j(fi) \right|^2. \quad (10)$$

Здесь

$$A_{MK}^j = [(2J + 1) \cdot 8\pi^2]^{-1/2} (\Phi_{MK}^j, S), \quad (11)$$

$$S \equiv \exp \left\{ -2iq_{\text{эф}} [\cos^2 \theta_2 - 1/3 + \lambda \sin^2 \theta_2 \cos 2\theta_3 - \nu \sin^2 \theta_2 \cos 2\theta_1 - \right. \\ \left. - \lambda \nu (\cos 2\theta_1 \cos 2\theta_3 (1 + \cos^2 \theta_2) + \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \cos \theta_2) \right\}, \quad (12)$$

$$q_{\text{эф}} = (q \cos \gamma J_{20}(\vartheta) / J_{20}(\pi)), \quad (13)$$

$$q = (Z_1 e^2 Q_0) / (4\hbar v a^2) = (\sqrt{\pi} Z_1 e^2 \mathfrak{M}_0) / (\sqrt{5} \hbar v a^2), \quad (14)$$

$$\lambda = \text{tg } \gamma / \sqrt{3}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/3, \quad (15)$$

$$\nu = J_{22}(\vartheta) / J_{20}(\vartheta), \quad 0 \leq \nu \leq 1/3. \quad (16)$$

Подробности преобразования обсуждаются в приложении А. Там же определены величины $B_K^j(fi)$. $J_{2\mu}(\vartheta)$ — орбитальные интегралы, введенные и протабулированные в [2].

§ 2. Свойства симметрии и метод вычисления интегралов A_{MK}^J

В приложении В выводится ряд свойств интегралов (D_{MK}^J, S) . Рассмотрим следствия этих свойств. Во-первых, на основании (3), (2В) и (5В) сведем (11) к

$$A_{MK}^J = (\sqrt{2/8\pi^2}) (1 + \delta_{K,0})^{-1/2} (D_{MK}^J, S). \quad (17)$$

Теперь (1В) легко приводит к

$$A_{-M-K}^J = A_{MK}^J, \quad (18)$$

так как на основании (5В) при нечетных M и K $A_{MK}^J = 0$. Кроме того, (1В) и (2В) дают, что $A_{MK}^J = 0$ при нечетных J , если либо $M=0$, либо $K=0$. (6В) имеет своим результатом соотношение

$$(1 + \delta_{K,0})^{1/2} A_{MK}^J(\lambda, \nu) = (1 + \delta_{M,0})^{1/2} A_{KM}^J(-\nu, -\lambda). \quad (19)$$

Легко проследить, что при $\nu = 0$ $A_{MK}^J(0, \nu)$ переходит в величину $A_{JM}(\vartheta, q)$, определенную в [2] при изучении кулоновского возбуждения аксиального ядра (см. формулу (5.9)).

$$A_{MK}^J(0, \nu) = \delta_{K,0} A_{JM}(\vartheta, q). \quad (20)$$

Перейдем к изучению основного частного случая—рассеяния назад. При $\vartheta = \pi$ выражение (12) существенно упрощается, так как $\nu(\pi) = 0$. Это упрощенное выражение дает основу для приближенных оценок A_{MK}^J при рассеянии на любые углы, ибо оно составляет нулевое приближение разложения A_{MK}^J по степеням ν . Так как $\nu \ll 1/3$, это разложение быстро сходится, особенно при углах рассеяния, близких к π .

При $\nu = 0$ $A_{MK}^J = \delta_{M,0} A_{0K}^J$ и свойство (19) позволяет свести вычисление A_{MK}^J при $\vartheta = \pi$ к вычислению A_{JK} . Действительно,

$$A_{0K}^J(\lambda, 0) = \sqrt{2} (1 + \delta_{K,0})^{-1/2} A_{K,0}^J(0, -\lambda) = \sqrt{2} (1 + \delta_{K,0})^{-1/2} A_{JK}(q_{\text{эф}}, -\lambda). \quad (21)$$

Интегралы $A_{JK}(q_{\text{эф}}, \nu(\vartheta))$ при $\vartheta = \pi$ протабулированы в [2] и [10]. Для вычисления $A_{JK}(q_{\text{эф}}, \nu(\vartheta))$ при любых значениях $\nu(\vartheta)$ в [2] приведено разложение этих величин в ряд (см. формулу (5.31)). Однако эта формула неудобна тем, что в ней не используются уже протабулированные результаты. Следующее выражение связывает искомые величины с ранее протабулированными:

$$\begin{aligned} A_{0K}^J(q; \lambda, 0) &= \sqrt{2} (1 + \delta_{K,0})^{-1/2} (-4i\lambda q)^{K/2} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4\lambda q)^{2m}}{(2m)!} (2m-1)!! (2m+K-1)!! \times \\ &\times \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j [(2m)! / (j! (2m-j)!)] [j! (2j-1)!! (2j+2K-1)!! / (j+K)!]^{1/2} \times \quad (22) \end{aligned}$$

$$\times (4j+2K+1) C_K^{J, 2j+K} / (4m+2j+2K+1)!!,$$

где

$$C_K^{J, J'} = \sum_j (JJ'00 | j0) (JJ'K - K | j0) A_{j,0}(q).$$

Таблица 1

Вероятность возбуждения первого уровня спина 2.

Соответствующее число следует умножить на 10 в степени, указанной в скобках

γ°	q									
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
5	8,35 (-2)	2,83 (-1)	4,77 (-1)	5,54 (-1)	4,79 (-1)	3,06 (-1)	1,36 (-1)	4,68 (-2)	5,11 (-2)	1,01 (-1)
10	8,18 (-2)	2,76 (-1)	4,64 (-1)	5,38 (-1)	4,62 (-1)	2,93 (-1)	1,27 (-1)	3,58 (-2)	2,98 (-2)	6,69 (-2)
15	7,97 (-2)	2,68 (-1)	4,48 (-1)	5,14 (-1)	4,37 (-1)	2,74 (-1)	1,15 (-1)	2,46 (-2)	9,09 (-3)	3,08 (-2)
20	7,84 (-2)	2,62 (-1)	4,33 (-1)	4,88 (-1)	4,06 (-1)	2,47 (-1)	9,85 (-2)	1,70 (-2)	5,351 (-4)	1,28 (-2)
22,5	7,88 (-2)	2,62 (-1)	4,29 (-1)	4,78 (-1)	3,91 (-1)	2,31 (-1)	8,73 (-2)	1,24 (-2)	1,81 (-3)	1,46 (-2)
25	8,04 (-2)	2,66 (-1)	4,31 (-1)	4,73 (-1)	3,77 (-1)	2,15 (-1)	7,35 (-2)	8,22 (-3)	6,54 (-3)	2,24 (-2)
27,5	8,28 (-2)	2,72 (-1)	4,37 (-1)	4,73 (-1)	3,70 (-1)	1,99 (-1)	5,97 (-2)	3,44 (-3)	1,16 (-2)	3,23 (-2)
30	8,42 (-2)	2,76 (-1)	4,41 (-1)	4,75 (-1)	3,67 (-1)	1,92 (-1)	5,32 (-2)	1,34 (-3)	1,41 (-2)	3,69 (-2)

Вероятность возбуждения второго уровня спина 2

Соответствующее число умножить на 10 в степени, указанной в скобках

γ°	q									
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
5	6,42 (-4)	2,38 (-3)	4,73 (-3)	7,18 (-3)	9,33 (-3)	1,11 (-2)	1,27 (-2)	1,42 (-2)	1,58 (-2)	1,74 (-2)
10	2,39 (-3)	8,91 (-3)	1,79 (-2)	2,74 (-2)	3,58 (-2)	4,23 (-2)	4,70 (-2)	5,08 (-2)	5,42 (-2)	5,76 (-2)
15	4,62 (-3)	1,76 (-2)	3,63 (-2)	5,68 (-2)	7,50 (-2)	8,77 (-2)	9,42 (-2)	9,57 (-2)	9,48 (-2)	9,31 (-2)
20	5,97 (-3)	2,39 (-2)	5,27 (-2)	8,75 (-2)	1,20 (-1)	1,41 (-1)	1,45 (-1)	1,35 (-1)	1,18 (-1)	1,01 (-1)
22,5	5,59 (-3)	2,39 (-2)	5,65 (-2)	9,94 (-2)	1,41 (-1)	1,68 (-1)	1,71 (-1)	1,52 (-1)	1,22 (-1)	9,27 (-2)
25	4,11 (-3)	2,03 (-2)	5,50 (-2)	1,06 (-1)	1,59 (-1)	1,93 (-1)	1,95 (-1)	1,66 (-1)	1,21 (-1)	7,89 (-2)
27,5	1,88 (-3)	1,43 (-2)	4,91 (-2)	1,08 (-1)	1,71 (-1)	2,14 (-1)	2,15 (-1)	1,77 (-1)	1,18 (-1)	6,48 (-2)
30	6,15 (-4)	1,07 (-2)	4,53 (-2)	1,06 (-1)	1,75 (-1)	2,22 (-1)	2,23 (-1)	1,81 (-1)	1,17 (-1)	5,85 (-2)

Вероятность возбуждения первого уровня спина 4

Соответствующее число умножить на 10 в степени, указанной в скобках

γ°	q									
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
5	1,37(-3)	1,96(-2)	8,16(-2)	1,94(-1)	3,23(-1)	4,09(-1)	4,03(-1)	3,06(-1)	1,68(-1)	5,84(-2)
10	1,32(-3)	1,90(-2)	7,86(-2)	1,86(-1)	3,06(-1)	3,83(-1)	3,73(-1)	2,79(-1)	1,49(-1)	4,71(-2)
15	1,28(-3)	1,86(-2)	7,62(-2)	1,77(-1)	2,87(-1)	3,50(-1)	3,30(-1)	2,37(-1)	1,20(-1)	3,31(-2)
20	1,26(-3)	1,87(-2)	7,62(-2)	1,74(-1)	2,72(-1)	3,18(-1)	2,81(-1)	1,83(-1)	7,92(-2)	1,54(-2)
22,5	1,23(-3)	1,88(-2)	7,61(-2)	1,72(-1)	2,65(-1)	3,02(-1)	2,60(-1)	1,60(-1)	6,03(-2)	7,75(-3)
25	1,19(-3)	1,87(-2)	7,57(-2)	1,70(-1)	2,59(-1)	2,91(-1)	2,44(-1)	1,44(-1)	4,84(-2)	3,37(-3)
27,5	1,12(-3)	1,84(-2)	7,50(-2)	1,67(-1)	2,53(-1)	2,84(-1)	2,35(-1)	1,35(-1)	4,26(-2)	1,82(-3)
30	1,04(-3)	1,83(-2)	7,48(-2)	1,65(-1)	2,51(-1)	2,81(-1)	2,32(-1)	1,32(-1)	4,11(-2)	1,85(-3)

Вероятность возбуждения второго уровня спина 4

Соответствующее число умножить на 10 в степени, указанной в скобках

γ°	q									
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
5	1,55 (-10)	2,27 (-9)	9,87 (-9)	2,52 (-8)	4,68 (-8)	6,99 (-8)	8,89 (-8)	1,01 (-7)	1,08 (-7)	1,13 (-7)
10	5,15 (-5)	7,70 (-4)	3,45 (-3)	9,14 (-3)	1,77 (-2)	2,77 (-2)	3,67 (-2)	4,26 (-2)	4,49 (-2)	4,47 (-2)
15	5,04 (-5)	8,20 (-4)	4,18 (-3)	1,28 (-2)	2,86 (-2)	5,05 (-2)	7,33 (-2)	8,95 (-2)	9,37 (-2)	8,58 (-2)
20	3,28 (-5)	6,06 (-4)	3,91 (-3)	1,45 (-2)	3,69 (-2)	7,10 (-2)	1,08 (-1)	1,35 (-1)	1,38 (-1)	1,18 (-1)
22,5	1,83 (-5)	3,84 (-4)	3,29 (-3)	1,42 (-2)	3,92 (-2)	7,88 (-2)	1,22 (-1)	1,54 (-1)	1,57 (-1)	1,31 (-1)
25	1,82 (-5)	3,47 (-4)	3,33 (-3)	1,50 (-2)	4,23 (-2)	8,52 (-2)	1,33 (-1)	1,65 (-1)	1,68 (-1)	1,37 (-1)
27,5	2,68 (-5)	4,19 (-4)	3,88 (-3)	1,73 (-2)	4,82 (-2)	9,56 (-2)	1,47 (-1)	1,81 (-1)	1,79 (-1)	1,42 (-1)
30	3,65 (-5)	4,58 (-4)	4,52 (-3)	2,10 (-2)	5,73 (-2)	1,13 (-1)	1,72 (-1)	2,07 (-1)	1,99 (-1)	1,49 (-1)

Таблица 5

Вероятность возбуждения первого уровня спина 6

Соответствующее число следует умножить на 10 в степени, указанной в скобках

γ°	q									
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
5	1,04 (-5)	5,76 (-4)	5,62 (-3)	2,55 (-2)	7,33 (-2)	1,53 (-1)	2,48 (-1)	3,23 (-1)	3,41 (-1)	2,86 (-1)
10	1,20 (-5)	5,65 (-4)	5,47 (-3)	2,46 (-2)	6,98 (-2)	1,44 (-1)	2,29 (-1)	2,92 (-1)	3,01 (-1)	2,45 (-1)
15	1,55 (-5)	5,78 (-4)	5,52 (-3)	2,45 (-2)	6,81 (-2)	1,36 (-1)	2,09 (-1)	2,54 (-1)	2,46 (-1)	1,85 (-1)
20	2,12 (-5)	5,92 (-4)	5,61 (-3)	2,47 (-2)	6,74 (-2)	1,31 (-1)	1,93 (-1)	2,21 (-1)	1,97 (-1)	1,30 (-1)
22,5	2,49 (-5)	5,88 (-4)	5,59 (-3)	2,46 (-2)	6,67 (-2)	1,28 (-1)	1,85 (-1)	2,10 (-1)	1,82 (-1)	1,14 (-1)
25	2,95 (-5)	5,79 (-4)	5,54 (-3)	2,45 (-2)	6,63 (-2)	1,26 (-1)	1,82 (-1)	2,04 (-1)	1,74 (-1)	1,07 (-1)
27,5	3,53 (-5)	5,67 (-4)	5,50 (-3)	2,44 (-2)	6,60 (-2)	1,25 (-1)	1,80 (-1)	2,00 (-1)	1,69 (-1)	1,01 (-1)
30	4,25 (-5)	5,47 (-4)	5,44 (-3)	2,49 (-2)	6,59 (-2)	1,25 (-1)	1,80 (-1)	1,99 (-1)	1,67 (-1)	9,91 (-2)

§ 3. Численные результаты

В случае $J_i = 0$ вероятность возбуждения уровня спина J_f при рассеянии назад принимает вид

$$P_{J_f \tau_f} = (2J_f + 1) \left| \sum_K A_{0K}^{J_f} a_K(J_f \tau_f) \right|^2. \quad (23)$$

Результаты численных расчетов по формуле (23) приведены в таблицах 1—5. Там $P_{J_f \tau_f}$ представлены в зависимости от переменных q и γ .

На рисунке дана зависимость отношения P_{22}/P_{21} от q при различных γ . При малых q это отношение приведенных вероятностей перехода $B(E2; 22 \rightarrow 0)/B(E2; 21 \rightarrow 0)$, как и следовало ожидать, на основании теории возмущения. С ростом q зависимость P_{22}/P_{21} от γ становится монотонной и резко отличается от того, что дает теория возмущения. Ярко выраженная зависимость от γ позволяет надеяться, вопреки неточности, возникающей из-за отличия ξ от нуля, определять γ на основании экспериментально измеряемого отношения P_{22}/P_{21} . Аналогично резкую зависимость от γ проявляет отношение вероятности возбуждения любого уровня с $\tau=2$ к вероятности возбуждения уровня с $\tau=1$.

В заключение автор выражает благодарность профессору А. С. Давыдову за предложенную тему и постоянный интерес к работе.

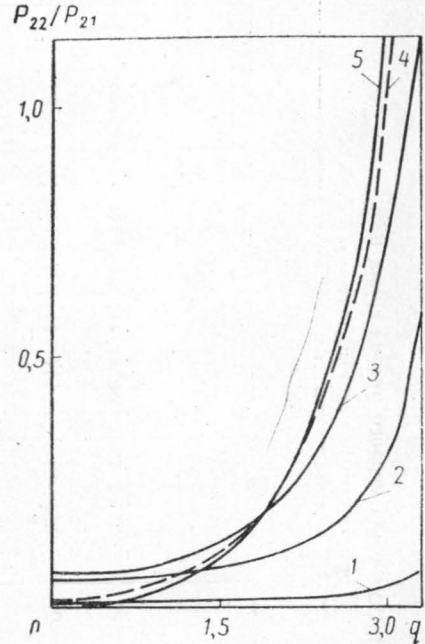


Рис. 1. Отношение P_{22}/P_{21} в зависимости от q при различных γ : 1—5, 2—15, 3—22,5, 4—27,5, 5—30°

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Упростим матричные элементы операторов, таких, что

$$(\Phi, S\Psi) = (\Phi\Psi^*, S). \quad (1A)$$

Сначала на основе известной формулы, выражающей произведение $D^J D^{J'}$ двух D -функций через линейную комбинацию D^J -функций спина $|J - J'| \leq J \leq J + J'$, получим при целых J и J' аналогичную формулу для функции вида (3):

$$\begin{aligned} \Phi_{MK}^J \Phi_{M'K'}^{J'} &= N(JK) N(J'K') \sum_I (JJ'MM' | jM + M') \times \\ &\times [(JJ'KK' | jK + K') \Phi_{M+M', K+K'}^I / N(jK + K') + \\ &+ (-1)^{J'} [\varepsilon(K - K')]^I (JJ'K - K' | jK - K') \Phi_{M+M', |K-K'|}^I / N(jK - K')], \quad (2A) \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ -1 & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

С помощью этой формулы матричные элементы операторов, обладающих свойством (1А) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (\Phi_{M_f K_f}^{J_f}, S \Phi_{M_i K_i}^{J_i}) &= (-1)^{J_i + M_i + K_i} N(J_f K_f) N(J_i K_i) \times \\ &\times \sum_{\substack{JK \\ 0 \leq K < j}} (J_f J_i M_f - M_i | j M_f - M_i) [(J_f J_i K_f K_i | j K) + \\ &+ (-1)^{J_i} [\varepsilon(K_f - K_i)]^j (J_f J_i K_f - K_i | j \varepsilon(K_f - K_i) K)] (\Phi_{M_f - M_i K, S}^j / N(jK)). \end{aligned} \quad (3A)$$

Теперь на основании (3А) легко показать, что

$$\begin{aligned} (\Psi_{M_f}^{J_f \tau_f}, S \Psi_{M_i}^{J_i \tau_i}) &= (-1)^{J_i - M_i} \sum_{\substack{j, K \geq 0 \\ K \text{ чётно}}} (J_f J_i M_f - M_i | j M_f - M_i) \times \\ &\times B_K^j(i) (\Phi_{M_f - M_i K, S}^j), \end{aligned} \quad (4A)$$

где

$$\begin{aligned} B_K^j(i) &= \sum_{\substack{K_f, K_i \geq 0 \\ K_f \text{ и } K_i \text{ чётны}}} (-1)^{K_i} [N(J_f K_f) N(J_i K_i) / N(jK)] [(J_f J_i K_f K_i | j K) + \\ &+ (-1)^{J_i} [\varepsilon(K_f - K_i)]^j (J_f J_i K_f - K_i | j \varepsilon(K_f - K_i) K)] a_{K_f}^{J_f \tau_f} a_{K_i}^{J_i \tau_i}. \end{aligned} \quad (5A)$$

При вычислении (10) используется, что выражение

$$(2J_i + 1)^{-1} \sum_{M_i M_f} |(\Psi_{M_f}^{J_f \tau_f}, S \Psi_{M_i}^{J_i \tau_i})|^2$$

в силу (4А) и ортогональности коэффициентов Клебша-Жордана сводится к

$$(2J_i + 1)^{-1} \sum_{jM} \left| \sum_K (\Phi_{MK}^j, S) B_K^j(i) \right|^2. \quad (6A)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Рассмотрим свойства интеграла

$$\begin{aligned} (D_{MK}^J, S) &= \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 D_{MK}^{*J} \exp \{ -2iq_{\Phi} (\cos^2 \theta_2 - 1/3 + \\ &+ \lambda \sin^2 \theta_2 \cos 2\theta_3 - \nu \sin^2 \theta_2 \cos 2\theta_1 - \lambda \nu (\cos 2\theta_1 \cos 2\theta_3 (1 + \cos^2 \theta_2) + \\ &+ \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \cos \theta_2) \}. \end{aligned}$$

Из инвариантности показателя экспоненты относительно замены переменных интегрирования

$$\theta'_1 = 2\pi - \theta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = 2\pi - \theta_3$$

совместно со свойством

$$D_{MK}^J(\theta_1 \theta_2 \theta_3) = (-1)^{M+K} D_{-M-K}^J(\theta'_1 \theta'_2 \theta'_3)$$

следует

$$(D_{MK}^J, S) = (-1)^{M+K} (D_{-M-K}^J, S). \quad (1B)$$

Аналогично замена

$$\theta'_1 = \theta_1, \quad \theta'_2 = \pi - \theta_2, \quad \theta'_3 = 2\pi - \theta_3$$

вместе с

$$D_{MK}^J(\theta_1 \theta_2 \theta_3) = (-1)^{J+M} D_{M-K}^J(\theta'_1 \theta'_2 \theta'_3)$$

приводит к

$$(D_{MK}^J, S) = (-1)^{J+M} (D_{M-K}^J, S). \quad (2B)$$

Так как (D_{MK}^J, S) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 e^{iM\theta_1} e^{iK\theta_3} f(2\theta_1\theta_2\theta_3), \quad (3B)$$

где функция $f(\theta_1\theta_2\theta_3)$ имеет период 2π по всем своим аргументам, то, сравнивая интеграл (3B) на отрезке $0 \leq \theta_3 < \pi$ и на отрезке $\pi < \theta_3 < 2\pi$, получаем

$$(D_{MK}^J, S) = \frac{1 + (-1)^K}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 e^{iM\theta_1} e^{i(K/2)\theta_3} f(2\theta_1\theta_2\theta_3). \quad (4B)$$

Аналогично

$$(D_{MK}^J, S) = \frac{1 + (-1)^K}{2} \frac{1 + (-1)^M}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 \times \\ \times e^{i(M/2)\theta_1} e^{i(K/2)\theta_3} f(\theta_1\theta_2\theta_3). \quad (5B)$$

Последнее свойство получим, сделав следующую замену

$$\theta'_1 = \theta_3, \theta'_2 = \theta_2, \theta'_3 = \theta_1, \lambda' = -\nu, \nu' = -\lambda.$$

Так как при четных M и K

$$D_{MK}^J(\theta_1\theta_2\theta_3) = D_{KM}^J(\theta'_1\theta'_2\theta'_3),$$

то

$$(D_{MK}^J, S(\lambda\nu)) = (D_{KM}^J, S(-\nu, -\lambda)). \quad (6B)$$

Следовательно, замена $M \rightleftharpoons K$ эквивалентна $\lambda \rightleftharpoons (-\nu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alder K., Bohr A., Huus T., Mottelson B., Winther A. *Revs. Mod. Phys.*, **28**, 432, 1956. Перевод: см. сб. «Деформация атомных ядер». ИЛ, 1958.
2. Alder K., Winther A. *Math. Fys. Medd. Dan Vid. Selsk.*, **32**, No. 8, 1960.
3. Давыдов А. С., Филиппов Г. Ф. *ЖЭТФ*, **35**, 440, 1958; Давыдов А. С., Ростовский В. С. *ЖЭТФ*, **36**, 1788, 1959.
4. Давыдов А. С., Ростовский В. С., Чабан А. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 3, 66, 1961; *Nucl. Phys.*, **27**, 134, 1961.
5. Newton J. O., Stephens F. S. *Phys. Rev. Lett.*, **1**, 63, 1958.
6. Stephens F. S., Diamond Jr. R. M., Perlman I. *Phys. Rev. Lett.*, **3**, 435, 1959.
7. Андреев Д. С., Ерохина К. И., Лемберг И. Х. «Изв. АН СССР», серия физическая, **24**, 1470, 1960.
8. Гангрский Ю. П., Лемберг И. Х. «Изв. АН СССР», серия физическая **26**, 1001, 1962.
9. Eccleshall D., Hinds B. M., Yates M. T. *Nucl. Phys.*, **32**, 190, 1962.
10. Graetzer R., Hooverman R., Bernstein E. M. *Nucl. Phys.*, **39**, 124, 1962.

Поступила в редакцию
24. 4 1963 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой
теории