Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1964

Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Вопрос устойчивости в однопараметрической нелинейной теории поля

В [1] была изложена теория нелинейного спинорного поля, включающая один нелинейный параметр l. Подобную теорию мы будем называть однопараметрической. При этом результаты зависят не только от l, но и от объема интегрирования L^3. Ввиду того что l и L имеют одинаковые размерности, между ними должно существовать соотношение вида $l/L = \mathrm{const}$. Указанное соотношение из теории непосредственно не следует, и его приходится вводить дополнительно * (в виде ограничения на объем $L = \frac{2\pi}{\omega} p\Big)$.

Теория с одним нелинейным параметром обладает еще одним недостатком — в ней не соблюдается условие, необходимое для того, чтобы величины $p_\mu = \int T_{\mu 4}\, dV$ (где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса) образовывали 4-вектор энергии — импульса. Последнее, как известно, требует равенства нулю импульса поверхностных сил [3]

$$I_\mu = \int dt \Phi T_{\mu n}\, dS_n, \tag{1}$$

где S_n — поверхность, охватывающая рассматриваемый объем. Условие (1) связано с условием устойчивости частицы как полевого образования.

В случае поля без источников в неограниченном пространстве, когда интегрирование можно совершить по бесконечно удаленной поверхности, условие (1) выполняется $(T_{\mu\nu} \sim r^{-4},\ T_{\mu\nu} S \sim r^{-2},\ r \to \infty)$.

При наличии поля с источником вместо условия (1) можно использовать теорему Лауэ [4]. Согласно этой теореме в системе координат,

---

* Исключением является случай нелинейности Гюрши [2] $n = 4/3$, $L^1 = \frac{l}{2} l^{4/3} (\bar\psi \psi)^{4/3}$. При этом, как было показано [1], соотношение $l^{4/3} = L^{-1} = 2k_0$, где k_0 — масса покоя фермиона, непосредственно следует из теории. Как видим, k_0 является тем размерным параметром, который наряду со скоростью света с и постоянной Планка $\hbar$ должен фигурировать в теории.

где частица (источник поля) покоится, для всех компонентов $T_{\mu n}$ должно выполняться условие

$$\int T_{\mu n}(dr) = 0. \qquad (2)$$

В случае поля без источников, но ограниченного в пространстве, выполнение условия (1) требует особого рассмотрения *.

Последний случай нас особенно интересует, так как мы рассматриваем элементарную частицу как сгусток нелинейного поля конечного объема L^3. Выполнение условия (1) необходимо для сопоставления такого сгустка [4] вектора энергии — импульса поля и для устойчивости подобного полевого образования.

Нелинейная теория с таким пониманием элементарных частиц отличается от так называемой теории с частицеподобными решениями тем, что в последнем случае частица имеет бесконечную протяженность и теория базируется на статических частицеподобных решениях уравнений поля, в то время как в первом случае поле существует только в конечной области и теория базируется на четырехмерных волновых решениях уравнения поля [5].

Рассмотрим спинорное поле, заключенное в конечном объеме L^3 и описываемое линейным уравнением Дирака. Найдем волновые решения $\psi = \sum\limits_k \psi_k(0)\exp\{ik_\rho x_\rho\}$, и определим $T_{\mu\nu}$. Очевидно, что $T_{nn} \neq 0$ (давление на границе системы $\neq 0$) и система, предоставленная сама себе, не будет устойчивой. Для устойчивости системы в L^3 необходимо наличие внешних сил (потенциального барьера). Рассмотрим случай наличия в L^3 только одной частицы. Тогда в системе координат, где частица покоится, все компоненты $T_{nn'}$, $(n = 1, 2, 3)$ должны обращаться в нуль, а $\int \tau_{44}\,dV = k_0$, где k_0 — затравочная масса покоя частицы. Так как при $N = 1$, $\vec{k} = 0$ имеем $T_{nn'} = \mathfrak{L}\delta_{nn'}$, $\int T_{44}\,dV = k_0 + \int \mathfrak{L}\,dV$, то для выполнения указанных условий необходимо, чтобы

$$\int \mathfrak{L}(\bar{\psi}\psi)\,dV = 0, \qquad (3)$$

т. е. функция Лагранжа после подстановки в нее решения уравнения поля должна обращаться в нуль. Аналогичное условие получаем и для линейного мезонного поля. Как известно, в линейной теории условие (3) выполняется как для спинорного, так и для мезонного поля (независимо от величины L^3).

---

* Все три случая целесообразно рассматривать одним методом в рамках условия (1). Тогда в случае поля с источником (1) следует писать только для поля вне источника, т. е.

$$I_r = \int dt\,\{\Phi_\infty T_{rr}\,dS - \Phi_{(r_0^*)} T_{rr}(r_0^*)\,dS\} = -T_{rr}(r_0^*)\,4\pi r_0^* t, \qquad (1')$$

где r_0^* — радиус источника (другие компоненты $T^{\mu}{}_n$ отсутствуют ввиду сферической симметрии задачи). В электродинамике

$$T_{rr}(r_0^*)\,r_0^{*2} \sim r_0^{*-n},\ n > 0 \text{ и } I_\mu \neq 0,$$

т. е. система неустойчива для точечного источника и для источника конечного радиуса. В случае электродинамики Борна—Инфельда [4] (с точки зрения D-поля с особенностью) имеем

$$I_r = 4\pi T_{rr}(r_0^*)\,r_0^{*2} t = \frac{\xi^3}{3}\,\frac{\xi^2 - \sqrt{1+\xi^4}}{\sqrt{1+\xi^4}}\,t = 0,\ \xi \equiv r/r_0^*. \qquad (1'')$$

В (1″) имеем единственное решение $\xi = 0$ и условие устойчивости выполняется только в случае точечного источника.

Рассмотрим спинорное поле, заключенное в конечном объеме L^3 и описываемое нелинейным уравнением типа Гейзенберга или Иваненко — Гейзенберга. Это уравнение также имеет волновое решение

$$\psi = \psi_k(0) \exp\{ik_\mu x_\mu\}.$$

Определяя

$$T_{\mu\nu} \text{ при } N = 1,\ \vec{k} = 0,\ \psi_k^*(0)\psi_k(0) = L^{-3},$$

находим

$$T_{nn'} = \mathfrak{L}\delta_{nn'},\ \int T_{44}\,dV = \overline{k}_0 + \int L\,dV,$$

где $k_\mu^2 = \omega^2 - k^2 = -\overline{k}_0^2$ и k_0 играет роль массы покоя нелинейного поля, заключенного в объеме L^3. Следовательно, (1) опять сводится к условию (3). Однако, в отличие от линейной теории, в нелинейной теории уравнение $\mathfrak{L}(\overline{\psi}, \psi)$ выполняется только при специальном виде функции Лагранжа. В частности, в случае уравнения Иваненко—Гейзенберга $\mathfrak{L}(\overline{\psi}, \psi) \neq 0$, т. е. нелинейное образование неустойчиво. Ниже эти вопросы рассматриваются подробнее.

Таким образом, вопрос о возможности построения нелинейной теории элементарных частиц, удовлетворяющей условию устойчивости, сводится к совместности системы уравнений

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\overline{\psi}_\mu} = 0,\ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi_\mu} = 0,\ \mathfrak{L}(\overline{\psi}, \psi) = 0. \tag{4}$$

Уравнению нелинейного спинорного поля вида [1]

$$\left\{\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + A(\overline{\psi}\psi)\right\}\psi = 0,\ \overline{\psi}\left\{\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - A(\overline{\psi}\psi)\right\} = 0 \tag{5}$$

соответствует функция Лагранжа

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{2}\left\{\overline{\psi}(D\psi) - (\overline{\psi}\overline{D})\psi + \left[B(\widehat{\rho}) - \widehat{\rho}\,\frac{dB\widehat{\rho}}{d\widehat{\rho}}\right]\right\}, \tag{6}$$

где

$$2A(\widehat{\rho}) = \frac{dB}{d\widehat{\rho}},\ B(\widehat{\rho}) = 2\int_0^{\widehat{\rho}} A(\widehat{\rho})\,d\widehat{\rho},\ \widehat{\rho} = l(\overline{\psi}\psi). \tag{7}$$

Условие устойчивости (3) для такого лагранжиана примет вид

$$\int\left\{\widehat{\rho}\,\frac{dB(\widehat{\rho})}{d\widehat{\rho}} - B(\widehat{\rho})\right\}dV \equiv \int\left\{2\widehat{\rho}A(\widehat{\rho}) - 2\int_0^{\widehat{\rho}} A(\widehat{\rho})\,d\widehat{\rho}\right\}dV = 0. \tag{3'}$$

Рассмотрим частный случай

$$A(\widehat{\rho}) = \sum_{n=1}^{\tilde{}} l_n^n\rho^{n-1},\ B(\rho) = \sum_{n=1}^{\tilde{}}\left(\frac{2}{n}\right) l_n^n\rho^n,\ \rho = (\overline{\psi}\psi), \tag{7'}$$

которому соответствует функция Лагранжа

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left\{\overline{\psi}(D\psi) - (\overline{\psi}\overline{D})\psi + 2\sum_{n=1}^{\tilde{}}\left(\frac{1}{n} - 1\right) l_n^n\rho^n\right\} \tag{6'}$$

и уравнения поля

$$D\psi \equiv \gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \Big(\tilde{\sum_{n=1}} l_n^n \rho^{n-1}\Big)\psi = 0. \qquad (5')$$

Ограничиваясь волновыми решениями, получаем условие (3′) в виде

$$2\widehat{\rho}_0 A(\widehat{\rho}_0) - 2\int_0^{\widehat{\rho}_0} A(\widehat{\rho}_0)\, d\widehat{\rho}_0 = 2\tilde{\sum_{n=1}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) l_n^n \rho_0^n = 0, \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\sum_{n=1}}\Big(\frac{1}{n}-1\Big) l_n^n\rho_0^n = 0, \quad \rho_0 = (\bar{\chi}\chi)\,\varphi_0^*\varphi_0, \\ &\psi = \chi(s)\,\varphi, \quad (\bar{\chi}\chi) = \frac{\bar{k}_0}{\omega}, \quad (\chi^*\chi) = 1, \\ &k_\mu^2 = -\bar{k}_0^2 = -A(\widehat{\rho}_0)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

В случае линейной теории ($n=1$) это условие выполняется. В случае однопараметрической нелинейной теории имеем

$$l_n^n\rho_0^n = 0, \quad l_n \neq 0 \ (\text{суммирования } n \text{ нет}), \qquad (9)$$

т. е. условие (3) не выполняется.

Двухпараметрическая нелинейная теория поля

Рассмотрим двухпараметрическую нелинейную теорию, т. е. теорию с двумя нелинейными членами со степенями нелинейности α и β. В этом случае $A(\widehat{\rho}) = l_\alpha^\alpha \rho^\alpha + l_\beta^\beta \rho^\beta$,

$$\alpha \neq \beta.$$

Тогда условие устойчивости (8′) дает

$$\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big) l_\alpha^\alpha \rho_0^\alpha + \Big(1-\frac{1}{\beta}\Big) l_\beta^\beta \rho_0^\beta = 0, \qquad (10)$$

т. е.

$$-1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{\beta-1}{\beta}\,\rho_0^{\beta-\alpha}\Big(\frac{l_\beta^\beta}{l_\alpha^\alpha}\Big). \qquad (10')$$

Учтем теперь, что

$$(\bar{\chi}\chi) = \frac{\bar{k}_0}{\omega}, \quad \bar{k}_0 = A(\widehat{\rho}_0) = \sum_{n=\alpha}^{\beta} l_n^n (\bar{\chi}\chi)^{n-1} = \sum_{n=\alpha}^{\beta} l_n^n \Big(\frac{\bar{k}_0}{\omega}\Big)_{00}^{n-1} \rho_0^{n-1}, \qquad (11)$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \sum_{n=\alpha}^{\beta} l_\alpha^\alpha \Big(\frac{\bar{k}_0}{\omega}\Big)^{n-2} \rho_{00}^{n-1}, \\ &\rho_{00} = \overset{*}{\varphi}_0\varphi_0 = NL^{-3}. \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

В частности, при $\vec{k}=0$ имеем $\bar{\chi}\chi=1$, $\omega=\bar{k}_0$, $\rho_{00}=\rho_0=L^3$

$$\omega=\bar{k}_0=\sum_{n=\alpha}^{\beta} l_n^n\rho_0^{n-1}=l^{\alpha-1}{}_\alpha\rho+l_\beta^\beta\rho_0^{\beta-1}. \tag{11''}$$

При этом (так как $\mathfrak{L}=0$) получаем

$$\mathscr{E}=-\int T_{44}\,dV=\omega\rho_0L^{-3}=N\omega \tag{12}$$

и при $\vec{k}=0$, $N=1$ находим*

$$\mathscr{E}(N=1,\ \vec{k}=0)=k_0=\sum_{n=\alpha}^{\beta} l_n^nL^{-3(n-1)}=l_\alpha^\alpha L^{-3(\alpha-1)}+l_\beta^\beta L^{-3(\beta-1)}=\bar{k}_0. \tag{12'}$$

Условие устойчивости (10) запишется в виде

$$-1=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{\beta-1}{\beta}\right)L^{-3(\beta-\alpha)}\left(\frac{l_\beta^\beta}{l_\alpha^\alpha}\right). \tag{10''}$$

Как видим, в общем случае двухпараметрической теории результаты зависят от трех параметров l_α, l_β, L^3. Условие устойчивости определяет один из этих параметров через два других. При этом теория становится аналогичной однопараметрической теории и требует еще одного дополнительного предположения. Если из уравнения (10″) определить объем L^3, то потребуется еще одно дополнительное условие для определения второго нелинейного параметра; если же определить второй нелинейный параметр, то для определения объема придется использовать предположение, уже использованное в однопараметрической теории.

Рассмотрим сначала первую возможность. Из (10″) получаем

$$L=a^{-\frac{1}{3(\beta-\alpha)}}\,l_\beta^{\frac{\beta}{3(\beta-\alpha)}}\,l_\alpha^{\frac{\alpha}{3(\beta-\alpha)}},$$

$$a=\frac{\beta}{\beta-1}\,\frac{\alpha-1}{\alpha}. \tag{13}$$

При этом из (12′) и (13) находим

$$k_0\lambda=a^{\frac{\alpha-1}{\beta-\alpha}}-a^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}}=\text{const},$$

$$k_0=l_\alpha^\alpha L^{-3(\alpha-1)}(1-a)=\frac{1}{\lambda}\left(a^{\frac{\alpha-1}{\beta-\alpha}}-a^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}}\right), \tag{13'}$$

$$\lambda=l_\alpha^{\alpha\frac{\beta-1}{\alpha-\beta}}\,l^{\beta\frac{\alpha-1}{\beta-\alpha}}.$$

Кроме того,

$$L=\lambda b,\quad b=a^{\frac{1}{3(\beta-\alpha)}}\,l_\alpha^{\frac{\alpha\left(\frac{4}{3}-\beta\right)}{\alpha-\beta}}\,l_\beta^{\frac{\left(\beta\frac{4}{3}-\alpha\right)}{\beta-\alpha}},$$

---

* Вводится два обозначения $\bar{k}_0=\omega\,(\vec{k}=0, N=1)$ и $k_0=\mathscr{E}(\vec{k}=0,\ N=1)$. В однопараметрической теории ($\mathfrak{L}\neq0$) имеем $k_0=\beta\bar{k}_0$, где β — степень нелинейности; при $\mathfrak{L}=0$ получаем $\bar{k}_0=k_0$.

$$k_0 L = \{a^{\frac{\beta-\frac{4}{3}}{\beta-\alpha}} - a^{\frac{\alpha-\frac{4}{3}}{\beta-\alpha}}\} l_\alpha^{\alpha\frac{\beta-\frac{4}{3}}{\beta-\alpha}}. \quad (14)$$

При $\alpha=\frac{4}{3}$ (т. е. когда один из нелинейных добавков соответствует случаю Гюрши) имеем

$$\lambda = l_{4/3}^{\frac{4(\beta-1)}{4-3\beta}} l_\beta^{\frac{\beta}{3(\beta-4)}},\quad k_0\lambda = a^{\frac{1}{3(\beta-4)}} - a^{\frac{3(\beta-1)}{3(\beta-4)}},$$

$$a = \frac{1}{4}\,\frac{\beta}{\beta-1},\quad k_0 L = (1-a)\, l_{4/3}^{4/3}, \quad (15)$$

$$\frac{L}{l_\beta^{\frac{\beta}{3\beta-4}}} = a^{\frac{1}{4-3\beta}} l_{4/3}^{\frac{4}{3(4-3\beta)}}.$$

Выбор нелинейности для обеспечения устойчивости привлекателен в том отношении, что в теорию вводится безразмерный параметр, в то время как все другие нелинейности вводят размерный параметр.

Как видим, подбор значения β меняет только численные значения объема интегрирования или массы. Сохраняя для β значение $\beta=2$, т. е. беря рассмотренную ранее степень нелинейности Гейзенберга—Иваненко, получаем

$$a = \frac{1}{2},\quad \lambda = l_2\left(-l_{4/3}^{4/3}\right)^{-3/2},\quad k_0\lambda = 2^{-3/2},$$

$$k_0 L = \frac{1}{2}\left(-l_{4/3}^{4/3}\right),\quad \frac{L}{l_2} = \left(-\frac{1}{2}\, l_{4/3}^{4/3}\right)^{-1/2},$$

$$k_0 l_2 = 2^{-3/2}\left(-l_{4/3}^{4/3}\right)^{3/2}. \quad (16)$$

Аналогично при $\beta=\frac{7}{2}$ имеем: $a={}^7/_{20}$, $\lambda=(l_{4/3}^{4/3})^{15/13} l_{7/13}^{7/13}$, $k_0\lambda\,({}^7/_{20})^{2/13}(1-{}^7/_{20})$, $k_0 l_{7/2}^{7/13} = (-{}^7/_{20} l_{4/3}^{4/3})^{15/13}(({}^{20}/_7)^{2/13}-1)$.

Отсюда видно, что λ отличается от l_2 или $l^{7/2}$ однопараметрической теории только тем, что изменен масштаб нелинейного параметра l_2 (или $l_{7/2}$). При этом величина масштаба $l^{4/3}$ фигурирует в теории явно и для получения численных результатов необходимо его фиксировать. От величины масштаба $l^{4}/_{3}$ зависит как масса покоя частицы, так и ее объем, получаемый из условия устойчивости.

Если вместо нелинейности Гюрши $\alpha={}^4/_3$ рассмотреть другое значение α, то в теории войдет размерный параметр.

Рассмотрим вторую возможность. Если L определить из равенств $Lk_0=(2\pi p)$, $N=1$, $\vec{k}=0$, $\omega=k_0=\bar{k}_0$, то из (14) найдем

$$-l_\alpha^\alpha = (2\pi p)^{-\frac{\alpha-\beta}{\beta-4/3}} \{a^{\frac{\beta-4/3}{\beta-\alpha}} - a^{\frac{\alpha-4/3}{\beta-\alpha}}\}^{\frac{\alpha-\beta}{\beta-4/3}} l_\beta^{\beta\frac{4/3-\beta}{\beta-4/3}},$$

$$\lambda = (2\pi p)^{\frac{\beta-1}{\beta-4/3}} \{a^{\frac{\beta-4/3}{\beta-\alpha}} - a^{\frac{\alpha-4/3}{\beta-\alpha}}\}^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}} l_\beta^{\beta/3\beta-4}, \quad (17)$$

$$k_0\lambda = a^{\frac{\alpha-1}{\beta-\alpha}} - a^{\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}} = \text{const}.$$

При $\alpha = {}^4/_3$ получаем

$$- l_{4/3}^{4/3} = (2\pi p)(1 - a)^{-1}, \ \lambda = (2\pi p)^{\frac{1-\beta}{\beta - 4/3}} (1 - \alpha)^{\frac{\beta - 1}{\beta - 4/3}} l_{\beta}^{\beta/3\beta - 4}, \tag{17'}$$

$$k_0 \lambda = a^{\frac{4/3 - 1}{\beta - 4/3}} - a^{\frac{\beta - 1}{\beta - 4/3}},$$

$$\frac{L}{l_{\beta}^{\beta/3\beta-4}} = (2\pi p)^{-\frac{1}{3\beta - 4}} \frac{(1 - a)^{\frac{3(\beta-1)}{3(\beta-4)}}}{a^{1/3\beta - 4} \, a^{\frac{3(\beta-1)}{3(\beta-4)}}}.$$

В частности, когда $\beta = 2$, имеем

$$a = {}^1/_2, \ - l_{4/3}^{4/3} = 4\pi p, \ k_0 l_2 = (2\pi p)^{3/2},$$

$$L/l_2^{7/13} = (2\pi p)^{-1/2}. \tag{18}$$

Аналогично, когда $\beta = {}^7/_2$, имеем

$$a = {}^7/_2, \ l_{4/3}^{4/3} = ({}^{20}/_{13})(2\pi p),$$

$$k_0 l_{7/13}^{7/13} = ({}^7/_{13})^{15/13} [({}^{20}/_7)^{2/13} - 1](2\pi p),$$

$$L/l_{7/13}^{7/13} = \left(\frac{12}{14} \frac{1}{\pi p}\right)^{2/13}.$$

Следовательно, отличие от результатов однопараметрической теории состоит только в изменении масштаба длины, что ввиду гомологической инвариантности теории [1, 4] не является существенным.

Пользуюсь случаем выразить благодарность проф. Д. Иваненко за полезную дискуссию по обсуждаемым в работе вопросам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курдгеладзе Д. Ф. ЖЭТФ, 38, 462, 1960.
2. Gursey F. Nuovo. cim., 7, 411, 1958.
3. Иваненко Д., Соколов А. А. Классическая теория поля.
4. Гейзенберг В., Дюрр Г., Миттер П., Шлидер С. и Ямадзаки К. Нелинейная квантовая теория поля, стр. 351.
5. Терлецкий Я. и др. ЖЭТФ, 35, 425, 1958.

Поступила в редакцию
21. 12 1962 г.

Кафедра
статистической физики и
механики

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Горького
М. Г. У.

п. 14-14-65