ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1964

Б. И. МОРГУНОВ

ПОЛНЫЙ РАСЧЕТ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрено второе приближение для вращательных движений с одной степенью свободы, вычислены фаза и период вращения во втором приближении, найдены в первом приближении координата и скорость. Получена асимптотика по большим энергиям, рассмотрены примеры.

§ 1. Постановка задачи

В работах [10—11] рассматривалась асимптотика некоторых вращательных движений с одной степенью свободы, зависящих от медленно изменяющихся параметров, и получены уравнения, описывающие в первом и во втором приближении (с погрешностью порядка ε и ε^2) медленное изменение энергии возмущенного движения. Вращательные движения исследовались также другими методами [8—9]. Отметим, что колебательные режимы подобных систем исследованы в [2, 7].

В этой работе мы, основываясь на знании второго приближения для энергии возмущенного движения, полученного в [11], находим фазу и период возмущенного движения, а также первые приближения для координаты и скорости. Развитые методы позволяют вычислить также приближения более высоких порядков. Следуя [11], ограничиваемся случаем одного медленного параметра $\tau=\varepsilon t$, хотя общий случай, когда имеются n различных параметров $x = (x_1, ..., x_n)$, изменяющихся по произвольному закону, рассматривается аналогично.

Пусть невозмущенная система имеет вид

$$m(\tau)\,\ddot{y} + Q(\tau, y) = 0, \quad \tau = \text{const}, \tag{1}$$

где y — одномерная координата, $m(\tau)$ — масса, $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, $Q(\tau, y) \equiv \dfrac{V(\tau, y)}{\partial y}$ — потенциальная сила, вызывающая вращение, причем $Q(\tau, y)$ — периодическая функция y с периодом 2π и $\int\limits_0^{2\pi} Q(\tau, y)\,dy = 0$. Соответствующая (1) возмущенная система может быть записана в виде

$$\frac{d}{dt}[m(\tau)\,\dot{y}] + Q(\tau, y) = \varepsilon f_1(\tau, y, \dot{y}) + \varepsilon^2 f_2(\tau, y, \dot{y}), \tag{2}$$

$$\tau = \varepsilon t.$$

Здесь ε — малый параметр, f_1 и f_2 — функции, периодические по y. Члены порядка ε^3 и выше в [2] не выписаны, поскольку мы ограничиваемся рассмотрением второго приближения.

Поставим задачу: найти второе приближение для фазы и периода вращения, а также в первом приближении найти координату y и скорость $\dot{y}$.

§ 2. Основные результаты

Для получения уравнения, описывающего изменение фазы, необходимо привести (2) к виду систем с быстро вращающейся фазой [1, 6 7, 11] и применить специальную схему метода усреднения, аналогичную [2—7, 11]. После ряда вычислений получим

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0(E) + \varepsilon B(\bar{E}_1), \tag{3}$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \; B = \frac{\pi m}{T_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{F\left[\dfrac{\dfrac{E}{m^2}\dfrac{dm}{d\tau} + \dfrac{\partial}{\partial\tau}\dfrac{V}{m}}{E-V}\right]}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(E-V)}}\,dy -$$

$$-\frac{\pi}{T_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{GF\left[\dfrac{1}{E-V}\right]dy}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(E-V)}}, \tag{4}$$

$$G = \frac{1}{m}\left(-E\frac{dm}{d\tau} + \frac{\partial mV}{\partial\tau}\right) + \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\,f_1\left(\tau, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right),$$

F — оператор вида

$$F[\varphi] = \int_0^y \frac{\varphi\, d\eta}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(E-V)}} - \frac{1}{T_0}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi\, dy}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(E-V)}}\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(E-V)}},$$

$\bar{E} = \bar{E}_1 + \varepsilon\bar{E}_2$ — медленно изменяющаяся энергия во втором приближении,

$T_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\sqrt{\dfrac{2}{m}(E-V)}}$ — период вращения в первом приближении. Уравнение (3) элементарно интегрируется в квадратурах, если в него подставить найденное в [11] второе приближение для медленно изменяющейся энергии $\bar{E}(\tau)$.

Зная уравнение (3) для фазы, найдем период вращения во втором приближении. Именно второе приближение периода дается формулой

$$T(\tau)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{GF\left[\frac{1}{(E-V)}\right]}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}dy-\frac{\varepsilon m}{2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{F\left[\dfrac{\frac{E}{m^2}\frac{dm}{d\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{V}{m}}{E-V}\right]}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}dy, \tag{5}$$

Показано, что (5) действительно представляет второе приближение для вращения: если $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ два момента времени, такие, что

$$y(\bar{\bar{t}})-y(\bar{t})=2\pi, \text{ то } \bar{\bar{t}}-\bar{t}=T\left(\frac{\bar{t}+\bar{\bar{t}}}{2}\right)+0(\varepsilon^2).$$

Зная $\bar{E}$ и ψ, найдем y и $\dot{y}$ по формулам

$$y=y(\bar{E},\psi,\tau),\ \dot{y}=\dot{y}(\bar{E},\psi,\tau), \tag{6}$$

представляющим решение невозмущенного уравнения (1). Для нахождения y и $\dot{y}$ нет необходимости знать явный вид решения (1), так как уравнение (1) имеет интегралы, эквивалентные (6):

$$\frac{m(\tau)\dot{y}^2}{2}+V(\tau,y)=E,\quad \int\limits_0^{y}\frac{d\eta}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}=t-t_0. \tag{7}$$

С помощью (7) получим выражения для определения y и $\dot{y}$

$$\int\limits_0^{y}\frac{d\eta}{\sqrt{\frac{2}{m}(\bar{E}_1-V)}}=\frac{T_0(\bar{E}_1)}{2\pi}\int\limits_{t_0}^{t}[\omega_0(\bar{E}_1)+\varepsilon\Phi\ (\bar{E}_1,\bar{E}_2,\tau)]\,dt,$$

$$\frac{m(\tau)\dot{y}^2}{2}+V(\tau,y)=\bar{E}_1, \tag{8}$$

где

$$\Phi(\bar{E}_1,\bar{E}_2,\tau)=\frac{2\pi}{mT_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(\bar{E}_1-V)\right)^{3/2}}\bar{E}_2-$$

$$-\frac{\pi}{T_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{G(\bar{E}_1)F\left[\frac{1}{\bar{E}_1-V}\right]}{\sqrt{\frac{2}{m}(\bar{E}_1-V)}}dy+$$

$$+\frac{\pi m}{T_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{F\left[\dfrac{\frac{\bar{E}_1\,dm}{m^2\,d\tau}+\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{V}{m}}{\bar{E}_1-V}\right]}{\sqrt{\frac{2}{m}(\bar{E}_1-V)}}dy. \tag{9}$$

§ 3. Асимптотика по энергии

Рассмотрим случай больших энергий. В [10, 11] найдены асимптотические выражения для медленной энергии возмущенного движения в первом и во втором приближениях для больших энергий. Асимптотика по большим энергиям для систем типа (2) получена другими методами [8]. Мы ограничимся случаем, когда $f_1(\tau, y, \dot{y}) = \varphi_1(\tau, y)$, $\dot{f}_2(\tau, y, \dot{y}) = \varphi_2(\tau, y)\,\dot{y}$, $m(\tau) \equiv 1$. Уравнение для фазы примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{2\bar{E}_1} - \frac{1}{2\pi\sqrt{2\bar{E}_1}}\int_0^{2\pi} V\,dy + \varepsilon\frac{\bar{E}_2}{\sqrt{2\bar{E}_1}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{4\pi\bar{E}_1}\int_0^{2\pi} V\,dy\right) + 0\left(\frac{1}{E}\right).$$

Для периода вращения во втором приближении получим выражение

$$T(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\bar{E}_1}}\left(1 - \varepsilon\frac{\bar{E}_2}{2\bar{E}_1}\right) + \frac{1}{(2\bar{E}_1)^{3/2}}\left(1 - \varepsilon\frac{3}{2}\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1}\right)\int_0^{2\pi} V\,dy + 0\left(\frac{1}{E^2}\right).$$

Координата и скорость находятся по формулам

$$y(t) = \int_{t_0}^{t}\left(\sqrt{2\bar{E}_1} + \varepsilon\frac{\bar{E}_2}{\sqrt{2\bar{E}_1}}\right)dt + \frac{1}{4\pi\bar{E}_1}\int_0^{2\pi} V\,dy\int_{t_0}^{t}\left(\sqrt{2\bar{E}_1} +\right.$$

$$\left. + \varepsilon\frac{\bar{E}_2}{\sqrt{2\bar{E}_1}}\right)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\bar{E}_1}}\int_0^{2\pi} V\,dy\left(1 - \varepsilon\frac{\bar{E}_2}{2\bar{E}_1}\right)dt + 0\left(\frac{1}{E}\right),$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2\bar{E}_1} - \frac{1}{\sqrt{2\bar{E}_1}}\,V\left(\tau, \int_{t_0}^{t}\left(\sqrt{2\bar{E}_1} + \varepsilon\frac{\bar{E}_2}{\sqrt{2\bar{E}}}\right)dt\right) + 0\left(\frac{1}{E}\right).$$

§ 4. Физические примеры

Рассмотрим маятник Эйнштейна (математический маятник, длина которого медленно изменяется под действием внешних сил) во вращательном режиме. Уравнение движения такого маятника имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[x^2(\tau)\,\dot{y}\right] + gx(\tau)\sin y = 0,\quad \tau = \varepsilon t,$$

где $x(\tau)$ — длина нити, g — ускорение свободного падения. Эта задача рассматривалась в [10, 11], где получены выражения для медленно изменяющейся энергии в первом и во втором приближениях. Ограничиваясь случаем больших энергий, получим период вращения во втором приближении

$$T(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{2E_{10}}}\left(1 - \varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{2\pi g}{(2E_{10})^{3/2}}\left(1 - \varepsilon\frac{3E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{x^3}{x_0^3} + 0\left(\frac{1}{E^2}\right)$$

и координату и скорость маятника

$$y(t) = \sqrt{2E_{10}}\left(1+\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\int_{t_0}^{t}\frac{x_0^2}{x^2}\,dt + \frac{g}{\sqrt{2E_{10}}}\,\frac{x^3-x_0^3}{x_0^2}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{x^2} +$$

$$+\varepsilon\frac{gE_{20}}{(2E_{10})^{3/2}}\,\frac{x^3+x_0^3}{x_0^2}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{x^2} + 0\left(\frac{1}{E}\right),$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2E_{10}}\,\frac{x_0^2}{x^2} + \frac{g}{\sqrt{2E_{10}}}\,\frac{x^3-x_0^3}{x_0^2x^2} - \frac{g}{\sqrt{2E_{10}}}\,\frac{x}{x_0^2}\times$$

$$\times\left[1-\cos\sqrt{2E_{10}}\left(1+\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\int_{t_0}^{t}\frac{x_0^2}{x^2}\,dt\right] + O\left(\frac{1}{E}\right).$$

Здесь $E(t_0) = E_{10} + \varepsilon E_{20}$, $x(t_0) = x_0$.

В качестве второго примера рассмотрим обобщение уравнения Ван дер Поля. Этот пример исследовался в [8]. В [10, 11] найдена медленно изменяющаяся энергия в первом и во втором приближениях. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{y} + k^2\sin y = \varepsilon(a - b\sin^2 y)\,\dot{y},$$

где a, b, k — функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Ограничиваясь случаем больших энергий, получим выражения для периода вращения, координаты и скорости в следующем виде:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2E_{10}}}\left(1-\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2\pi}{(2E_{10})^{3/2}}\left(1-\varepsilon\frac{3E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{\beta-k^2}{\alpha^{3/2}} + 0\left(\frac{1}{E^2}\right),$$

$$y(t) = \sqrt{2E_{10}}\left(1+\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\int_{t_0}^{t}\sqrt{\alpha}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2E_{10}}}\left(1-\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\int_{t_0}^{t}\frac{\beta-k^2}{\sqrt{\alpha}}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2E_{10}}}\left(1+\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{k^2}{\alpha}\int_{t_0}^{t}\sqrt{\alpha}\,dt + 0\left(\frac{1}{E}\right),$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2\alpha E_{10}} + \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha E_{10}}} - \frac{k^2}{\sqrt{2\alpha E_{10}}}\times$$

$$\times\left[1-\cos\sqrt{2E_{10}}\left(1+\varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\int_{t_0}^{t}\sqrt{\alpha}\,dt\right] + 0\left(\frac{1}{E}\right).$$

Здесь

$$\alpha(\tau) = \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau}(2a-b)\,d\tau\right\},\quad \beta(\tau) = \alpha\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{2k\dfrac{dk}{d\tau} - (2a-b)k^2}{\alpha}\,d\tau,$$

Пусть $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$, $\tau_0 = 0$. Имеем

$$y(t) = \sqrt{2E_0}\left(1 + \varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{e^{\left(a-\frac{b}{2}\right)\tau} - 1}{\varepsilon\left(a - \frac{b}{2}\right)} - \frac{k^2}{\sqrt{2E_{10}}} \times$$

$$\times\left(1 - \varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{e^{\left(a-\frac{b}{2}\right)\tau} - 1}{\varepsilon\left(a - \frac{b}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{k^2}{\sqrt{2E_{10}}}\left(1 + \varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)e^{-(2a-b)\tau}\frac{e^{\left(a-\frac{b}{2}\right)\tau} - 1}{\varepsilon\left(a - \frac{b}{2}\right)},$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{2E_{10}}\, e^{\left(a-\frac{b}{2}\right)\tau} - \frac{2k^2}{\sqrt{2E_{10}}}\,\mathrm{sh}\left(a - \frac{b}{2}\right)\tau -$$

$$- \frac{k^2}{\sqrt{2E_{10}}}e^{-\left(a-\frac{b}{2}\right)\tau}\left[1 - \cos\sqrt{2E_{10}}\left(1 + \varepsilon\frac{E_{20}}{2E_{10}}\right)\frac{e^{\left(a-\frac{b}{2}\right)\tau} - 1}{\varepsilon\left(a - \frac{b}{2}\right)}\right].$$

В заключение отметим, что этим методом можно найти приближения более высоких порядков, а также рассмотреть случаи, когда правая часть возмущенной системы (2) явно зависит периодически от времени t.

Пользуюсь случаем принести глубокую благодарность В. М. Волосову за постановку задачи и обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. «Укр. матем. журн.», 7, 5, 1955.
2. Волосов В. М. ДАН СССР, **106**, № 1, 7—10, 1956.
3. Волосов В. М. ДАН СССР, **114**, № 6, 1149—1152, 1957.
4. Волосов В. М. ДАН СССР, 117, № 6, 927—930, 1957.
5. Волосов В. М. ДАН СССР, **121**, № 1, 959—962, 1958.
6. Волосов В. М. «Успехи математических наук», **17**, № 6 (108), 3—126, 1962.
7. Волосов В. М. «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», **3**, № 1, 3—53, 1963.
8. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», **3**, № 1, 145—158, 1963.
9. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем и матем. физики», **3**, № 1, 131—144, 1963.
10. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **151**, № 6, 1260—1263, 1963.
11. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 1963 г.

Поступила в редакцию
22. 3 1963 г.

Кафедра
математики