Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1964

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, Ю. Г. СОСУЛИН

# К РАСЧЕТУ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ ФЛУКТУИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ

Задача обнаружения сигнала в шуме заключается в том, чтобы по результатам анализа принимаемого колебания, которое может быть либо шумом, либо суммой сигнала и шума, определить, присутствует сигнал в принимаемом колебании или нет.

Во многих случаях эта задача решается с помощью теории проверки статистических гипотез Неймана—Пирсона. Согласно этой теории оптимальный приемник обнаружения сигналов в шуме должен образовывать отношение правдоподобия

$$\Lambda = \frac{p(x_1, \ldots, x_n \mid 1)}{p(x_1, \ldots, x_n \mid 0)},$$

где $(x_1, \ldots, x_n \mid 1)$ — плотность вероятностей выборочных значений принимаемого колебания $x_1, \ldots, x_n$, при условии, что на входе приемника есть сигнал плюс шум, $p(x_1, \ldots, x_n \mid 0)$ — плотность вероятностей, $x_1, \ldots, x_n$ при условии, что на входе приемника один шум и сравнивать его с порогом обнаружения $h$. Если отношение правдоподобия, вычисленное за фиксированное время, превосходит порог обнаружения, то считается, что на входе приемника есть сигнал плюс шум. Если $\Lambda < h$, то считается, что на входе приемника один шум. Качество работы приемника обнаружения характеризуется вероятностью ложной тревоги $\alpha$ и вероятностью пропуска сигнала $\beta$. В теории проверки статистических гипотез этим ошибкам соответствуют ошибки 1-го и 2-го рода. Приемник обнаружения типа Неймана—Пирсона обеспечивает минимальную вероятность пропуска сигнала $\beta$ при фиксированной вероятности ложной тревоги $\alpha$.

В радиолокации возникает задача обнаружения флуктуирующих сигналов, которые представляют собой пачку радиоимпульсов, отраженных от цели, причем можно считать, что флуктуации импульсов описываются гауссовым законом распределения. Вопросы обнаружения флуктуирующих сигналов в шумах хорошо исследованы в случае некоррелированных и полностью коррелированных сигналов [например, 1, 2].

В настоящей работе рассматривается более общий случай обнаружения гауссовых коррелированных радиоимпульсов в гауссовом коррелированном шуме. Для решения этой задачи удобно ввести в рассмотрение компоненты принимаемого колебания $x_i$ и $y_i$, определяемые соотношениями

$$x_i = \int\limits_{t_i}^{t_i+\tau_i} y(t)\cos\omega t\, dt,$$

$$y_i = \int\limits_{t_i}^{t_i+\tau_i} y(t)\sin\omega t\, dt,$$

$$i = 1, \dots n,$$

где $y(t)$ — колебание, принимаемое в течение времени $t_i \leqslant t \leqslant t_i + \tau_i$ (сигнал плюс шум или один шум); $t_i$ — момент появления на входе приемника $i$-того импульса, $\tau_i$ — длительность $i$-того импульса; $\omega$ — несущая частота радиоимпульсов, $n$ — число импульсов в пачке. Задача обнаружения пачки из $n$ радиоимпульсов эквивалентна задаче обнаружения компонентов импульсов $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n$. В ряде практически важных случаев можно считать, что совместное распределение компонентов $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n$ является гауссовым.

Обозначим через $p(X|1)$ плотность вероятностей компонентов принимаемого колебания $X = (x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n)$ при условии, что на входе приемника есть сигнал плюс шум; $p(X|0)$ плотность вероятностей $X$ при условии, что на входе приемника один шум.

Вектор $X$ описывается гауссовым законом распределения с корреляционной матрицей $K$, элементами которой являются вторые моменты компонентов $x_i$ и $y_i$, обладающие свойством

$$\overline{x_i x_j} = \overline{y_i y_j}, \quad \overline{x_i y_j} = -\overline{x_j y_i}, \quad i, j = 1, \dots n. \tag{1}$$

Если на входе приемника есть сигнал плюс шум, то

$$K = K_S + K_N = K_{S+N}, \tag{2}$$

где $K_S$ и $K_N$ — корреляционные матрицы сигнала и шума (порядок матриц $2n \cdot 2n$). Когда на входе приемника один шум, то $K = K_N$. Если матрицы $K_{S+N}$ и $K_N$ не вырождены, то, учитывая сказанное выше, имеем

$$p(X|1) = \frac{1}{(2\pi)^n (det\, K_{S+N})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} X^T K_{S+N}^{-1} X\right\}, \tag{3}$$

$$p(X|0) = \frac{1}{(2\pi)^n (det\, K_N)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} X^T K_N^{-1} X\right\}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что отношение правдоподобия имеет вид

$$\Lambda = \frac{(det\, K_N)^{1/2}}{(det\, K_{S+N})^{1/2}} \exp\left\{\frac{1}{2} X^T K_N^{-1} X - \frac{1}{2} X^T K_{S+N}^{-1} X\right\}. \tag{5}$$

Приемник обнаружения, вычисляющий отношение правдоподобия по этой формуле и сравнивающий $\Lambda$ с порогом обнаружения, является оптимальным (для критерия Неймана—Пирсона). Этот результат был известен ранее. В настоящей работе рассматривается задача расчета характеристик обнаружения коррелированных гауссовых радиоимпульсов в коррелированном гауссовом шуме.

Очевидно, что оптимальная обработка (5) эквивалентна обработке вида

$$Z_0 = X^T (K_N^{-1} - K_{S+N}^{-1}) X \tag{6}$$

(так как константы в формуле (5) можно ввести в значение порога обнаружения).

Из (6) следует, что при некоррелированных флуктуациях импульсов и некоррелированном шуме оптимальная обработка принимает вид

$$Z_н = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2). \tag{7}$$

В более общем случае обнаружения коррелированных импульсов в коррелированном шуме обработка типа (7) является неоптимальной. Для определения ошибок обнаружения 1-го и 2-го рода в работе [3] предлагается метод расчета функции распределения напряжения на выходе устройства, осуществляющем неоптимальную обработку коррелированных сигналов типа (7). Расчет характеристик обнаружения флуктуирующих сигналов при оптимальной обработке производится с помощью приближенного метода, развитого Миддлтоном [4], который состоит в аппроксимации величины $Z_0$ рядом Эджворта. Недостатком метода является то, что аппроксимация является удовлетворительной лишь при $\tau_к < \tau_п$, где $\tau_к$ — время корреляции принимаемого колебания, $\tau_п$ — время наблюдения всей пачки сигналов.

При $\tau_к > \tau_п$ для расчета характеристик обнаружения нельзя пользоваться рядом Эдтварта [4]. Поскольку этот случай весьма часто встречается на практике, то представляет интерес разработать методику расчета характеристик обнаружения и для этого случая.

В настоящей работе вычислены точные выражения для ошибок оптимального приемника обнаружения флуктуирующих сигналов. Из общих соотношений выводятся также выражения для ошибок неоптимального приемника обнаружения типа (7). Полученные формулы позволяют сравнивать качество работы оптимального и неоптимального приемников обнаружения.

Вероятность пропуска сигнала $\beta$ и вероятность ложной тревоги $\alpha$ для оптимального приемника обнаружения определяются соотношениями

$$\beta = \int_{Z_0 < r_0} p(X \mid 1)\, dX, \tag{8}$$

$$\alpha = \int_{Z_0 > r_0} p(X \mid 0)\, dX, \tag{9}$$

где $r_0$ — порог обнаружения. Аналогичные соотношения имеют место для неоптимального приемника обнаружения

$$\tilde{\beta} = \int_{z_н < p_н} p(X \mid 1)\, dX, \quad \tilde{\alpha} = \int_{z_н < r_н} p(X \mid 1)\, dX.$$

Так как корреляционные матрицы $K_S$ и $K_N$ положительно определены, то всегда найдется матрица $G$ такая, что

$$G^T K_{S+N} G = \| \mu_j \delta_{ij} \|, \quad G^T K_N G = \| \delta_{ij} \|,$$

$$(\mu_j > 1, \ldots, j = 1, \ldots, 2n),$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{2n}$ — корни обобщенного векового уравнения

$$det\{K_{S+N} - \mu K_N\} = 0. \tag{10}$$

Учитывая (6), (3), (8), дважды делая замену переменных

$$X = (G^{-1})^T \Xi, \ u_j = \sqrt{1 - \frac{1}{\mu_j}}\, \xi_j,$$

получим

$$\beta = \frac{1}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^{2n} (\mu_j - 1)^{1/2}} \int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{2n} u_j^2 < r_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{\mu_j - 1}u_j^2\right\} du_1, \ldots du_{2n}. \tag{11}$$

Аналогично предыдущему

$$\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^{2n}\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)^{1/2}} \int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{2n} u_j^2 > r_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\mu_j}{\mu_j - 1}u_j^2\right\} du_1, \ldots du_{2n}. \tag{12}$$

Соотношение (11) и (12) можно записать в виде

$$\beta = \frac{2}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^{2n} (\mu_j - 1)^{1/2}} \int\limits_0^{r_0} r\,dr \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r^2 - \sum_{j=1}^{2n} u_j^2\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{u_j^2}{\mu_j - 1}\right\} \times$$

$$\times\, du_1, \ldots du_{2n}, \tag{13}$$

$$\alpha = \frac{2}{(2\pi)^n \prod\limits_{j=1}^{2n}\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)^{1/2}} \int\limits_{r_0}^{\infty} r\,dr \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(r^2 - \sum_{j=1}^{2n} u_j^2\right) \exp \times$$

$$\times \left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\mu_j}{\mu_j - 1}u_j^2\right\} du_1, \ldots du_{2n}. \tag{14}$$

Для дальнейших расчетов воспользуемся интегральным представлением дельта-функции

$$\delta\left(r^2 - \sum_{j=1}^{2n} u_j^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\theta\left(r^2 - \sum_{j=1}^{2n} u_j^2\right)\right\} d\theta. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13), (14) и интегрируя по $u_1, \ldots u_{2n}$, получим

$$\beta = \frac{1}{2^n\pi \prod\limits_{j=1}^{2n} (\mu_j - 1)^{1/2}} \int\limits_0^{r_0} r\,dr \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\theta r^2}}{\prod\limits_{j=1}^{2n}\left[\frac{1}{2(\mu_j - 1)} - i\theta\right]^{1/2}} d\theta, \tag{16}$$

$$\alpha = \frac{1}{2^n\pi \prod\limits_{j=1}^{2n}\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)^{1/2}} \int\limits_{r_0}^{\infty} r\,dr \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\theta r^2}}{\prod\limits_{j=1}^{2n}\left[\frac{\mu_j}{2(\mu_j - 1)} - i\theta\right]^{1/2}} d\theta. \tag{17}$$

Корни уравнения (10) совпадают с собственными значениями матрицы $K_N^{-\frac{1}{2}} K_{S+N} K_N^{-\frac{1}{2}}$. Эта матрица обладает тем же свойством, что и матрицы $K_{S+N}$ и $K_N$, для которых выполняются условия (1). Отсюда вытекает [3], что значения $\mu_j$ $j=1, \ldots 2n$ четнократны ($\mu_j = \mu_{n+j}$ $j=1, \ldots n$. Благодаря этому выражения (16), (17) упрощаются, что позволяет в явном виде вычислить интегралы. Разложим подынтегральные выражения

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2(\mu_j-1)} - i\theta\right]} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left[\frac{\mu_j}{2(\mu_j-1)} - i\theta\right]}$$

на простейшие дроби, затем проинтегрируем по $\theta$ и $r$. Если предположить, что все $\mu_j$ $j=1, 2, \ldots n$ различны, то получим

$$\beta = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\mu_j-1)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j - 1}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{\mu_l-1} - \frac{1}{\mu_j-1}\right)} \left\{1 - \exp\left[-\frac{r_0^2}{2(\mu_j-1)}\right]\right\}, \tag{18}$$

$$\alpha = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - \frac{1}{\mu_j}}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left(\frac{\mu_l}{\mu_l-1} - \frac{\mu_j}{\mu_j-1}\right)} \exp\left\{-\frac{r_0^2\mu_j}{2(\mu_j-1)}\right\}. \tag{19}$$

Аналогично для неоптимального приемника получаем

$$\widetilde{\beta} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\nu_j} \sum_{j=1}^{n} \frac{\nu_j}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{\nu_l} - \frac{1}{\nu_j}\right)} \left\{1 - \exp\left(-\frac{r_{\text{н}}^2}{2\nu_j}\right)\right\}, \tag{20}$$

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\varkappa_j} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{\varkappa_l} - \frac{1}{\varkappa_j}\right)} \exp\left(-\frac{r_{\text{н}}^2}{2\varkappa_j}\right), \tag{21}$$

где $\nu_j = \nu_{n+j} j = 1, \ldots n$ — собственные значения матрицы $K_{S+N}$,
$\varkappa_j = \varkappa_{n+j} j = 1, \ldots n$ — собственные значения матрицы $K_N$.

В случае кратных значений $\mu_j$ $j=1, 2, \ldots n$ расчетные формулы для $\beta$ и $\alpha$ значительно усложняются. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ — корни уравнения (10) с кратностями $2a_1, 2a_2, \ldots\ldots 2a_k$, так что $\sum\limits_{l=1}^{k} a_l = n$. Из соотношений (16), (17) можно получить

$$\beta = \frac{1}{2^n \prod\limits_{l=1}^{k}(\mu_l-1)^{a_l}} \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{a_l} C'_{ml}\gamma\left[m, \frac{r_0^2}{2(\mu_l-1)}\right],$$

$$\alpha = \frac{1}{2^n \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\mu_l}\right)^{a_l}} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_l} C''_{ml} \Gamma\left[m, \frac{r_0^2 \mu_l}{2(\mu_l - 1)}\right],$$

где

$$\gamma(m, x) = \int_0^x e^{-t} t^{m-1}\, dt = (m-1)! \left[1 - e^{-x} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{x^q}{q!}\right],$$

$$\Gamma(m, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{m-1}\, dt = (m-1)!\ e^{-x} \sum_{q=0}^{m-1} \frac{x^q}{q!},$$

$$C'_{ml} = \frac{(-1)^{m-a_l} 2^m (\mu_l - 1)^m}{(a_l - m)!\ (m-1)!} \frac{d^{a_l - m}}{dp^{a_l - m}} \left[\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{k} \left[\frac{1}{2(\mu_j - 1)} - p\right]^{a_j}}\right]_{p = \frac{1}{2(\mu_l - 1)}},$$

$$C''_{ml} = \frac{(-1)^{m-a_l} 2^m (\mu_l - 1)^m}{(a_l - m)!\ (m-1)!\ \mu_l^m} \frac{d^{a_l - m}}{dp^{a_l - m}} \left[\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{k} \left[\frac{\mu_j}{2(\mu_j - 1)} - p\right]^{a_j}}\right]_{p = \frac{\mu_l}{2(\mu_l - 1)}}.$$

Аналогичные соотношения можно получить для неоптимального приемника

Рассмотрим подробнее случай, когда шум является некоррелированным, при этом корреляционная матрица шума имеет вид $K_N = \sigma_N^2 \| \delta_{ij} \|$, где $\sigma_N^2$ — дисперсия шума.

Пусть компоненты $x_i$ и $y_j$ независимы, тогда корреляционная матрица сигнала имеет вид

$$K_S = \begin{vmatrix} K'_S & 0 \\ 0 & K'_S \end{vmatrix}, \quad K'_S = \sigma_S^2 \| R_{ij} \|, \quad i, j = 1, 2, \ldots n,$$

где $\sigma_S^2$—дисперсия сигнала, $R_{ij}$—коэффициент корреляции сигнала ($R_{ii} = 1$).

Из соотношения (2) и уравнения (10) следует, что для этого случая в формулах (18), (19) нужно положить $\mu_j = \rho\lambda_j + 1$, где $\rho = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_N^2}$ — отношение сигнал/шум, $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ — собственные значения матрицы $R = \| R_{ij} \|$. Приводим для сравнения значения $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\alpha}$ для неоптимального приемника

$$\widetilde{\beta} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1 + \rho\lambda_j)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1 + \rho\lambda_j}{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left[\frac{1}{(1 + \rho\lambda_l)} - \frac{1}{1 + \rho\lambda_j}\right]} \left\{1 - \exp\left(-\frac{x}{1 + \rho\lambda_j}\right)\right\},$$

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{(n-1)!} \Gamma(n, x) = e^{-x} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{x^l}{l!},$$

где

$$x = \frac{r_н^2}{2\sigma_N^2}.$$

Проводя дальнейшую конкретизацию решаемой задачи, рассмотрим случай экспоненциально коррелированного сигнала, при этом элементы корреляционной матрицы $R$ определим соотношением

$$R_{ij} = e^{-\tau_0|i-j|} = \gamma^{|i-j|}.$$

Собственные значения матрицы $R$ определяются соотношениями [5]

$$\lambda_j = \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2-2\gamma\cos\theta_j},$$

где $\theta_j$ — корни трансцендентного уравнения

$$n\theta_j - \operatorname{arctg}\frac{(1+\gamma^2)\cos\theta_j - 2\gamma}{(1-\gamma^2)\sin\theta_j} = \frac{\pi}{2}(2j-1),$$

$$j = 1, \ldots n.$$

В заключение отметим, что полученные формулы для ошибок оптимального и неоптимального приемников обнаружения флуктуирующих сигналов в коррелированном шуме являются точными, причем они справедливы для всего диапазона изменения отношения сигнал/шум, времени корреляции сигнала и времени корреляции шума. Обычно расчет характеристик обнаружения флуктуирующих сигналов в шумах производится с помощью вычислительной техники. Полученные формулы также могут служить исходным материалом для табулирования характеристик обнаружения с помощью быстродействующей вычислительной машины. Проведение этой работы позволило бы сравнить качество работы оптимального и неоптимального приемников обнаружения для любых параметров сигнала и шума.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Шварц М. Сб. «Прием сигналов при наличии шума» под ред. Л. С. Гуткина. ИЛ, 1960.
2. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. «Советское радио», 1960.
3. Срагович В. Г. «Радиотехника и электроника», вып. 4, 1960.
4. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. «Советское радио», 1962.
5. Stein S., Storer I. E. IRE Trans, 2, 2, 1956.


Поступила в редакцию
13. 4 1963 г.

Кафедра
общей физики для мехмата