Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1964

К. П. СТАНЮКОВИЧ

ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается вывод уравнений гравитационного поля при наличии материи и законов сохранения энергии — импульса материи и поля, исходя из варьирования обобщенной плотности лагранжиана при переменной величине $\varkappa$. Роль лагранжиана в данном случае играет $R/2\varkappa$, где R — скалярная кривизна; $\varkappa$ — переменный параметр, характеризующий гравитационные взаимодействия. В пределе получаются обычные уравнения гравитационного поля и правильный псевдотензор поля, содержащий автоматически вторые производные. При этом существуют реальные гравитационные волны, переносящие энергию и в инерциальной системе координат.

Будем искать уравнения гравитационного поля и законов сохранения в общей теории относительности, используя точный вариационный формализм.

Обычная процедура выделения дивергенции, в которую входят вторые производные g_{ik}, не является ковариантной и как известно, не приводит к удовлетворительному псевдотензору гравитационного поля и законам сохранения энергии — импульса.

Поэтому варьирование скалярной кривизны будем проводить с учетом вторых производных g_{ik}. При этом не будем полагать, что на гиперповерхности $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$.

С самого начала несколько обобщим задачу и будем полагать, что «гравитационная постоянная» $\varkappa = \dfrac{8\pi G}{c^4}$, где G — ньютоновская «гравитационная постоянная», может быть переменной и даже тензором, поскольку связь между тензором поля и тензором материи в самом общем случае может быть тензорной.

Основной тензорной величиной, характеризующей свойства пространства, является тензор кривизны

$$R^l_{imk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^l_{im}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{nm}\Gamma^n_{ik} - \Gamma^l_{nk}\Gamma^n_{im}. \tag{1}$$

Введем тензор (или псевдотензор)

$$B^m_r = f\left(R, g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}, \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial \gamma^m} \lambda^{(\alpha)}\right), \tag{2}$$

«обобщающий» гравитационную постоянную $\varkappa$, причем $\lambda^{(\alpha)}$ — различные параметры, отличающиеся от g_{ik} и их производных, например, координаты x^i.

В частном случае тензор B_r^m должен иметь вид

$$B_r^m = \frac{1}{\varkappa}\,\delta_r^m. \tag{3}$$

Введем также тензор A_m^l, обратный тензору B_r^m, с помощью обычного соотношения $B_r^m A_m^l = \delta_r^l$. В частном случае $A_m^l = \varkappa\delta_m^l$.

Образуем обобщенный тензор кривизны 4-го ранга и свернутый тензор 2-го ранга.

$$\overset{*}{R}{}^l_{irk} = B_r^m R_{imk}^l, \quad \overset{*}{R}_{ik} = \overset{*}{R}{}^l_{ilk} = B_l^m R_{imk}^l. \tag{4}$$

Образуем также обобщенную скалярную кривизну

$$R^* = \delta_l^r g^{ik} \overset{*}{R}{}^l_{irk} = g^{ik} B_{imk}^m = B_l^m R_m^l = B^{ml} R_{ml}. \tag{5}$$

Лагранжианом гравитационного поля можно считать скаляр $L = -\frac{1}{2}R^*$. Запишем основное вариационное уравнение

$$\begin{gathered}\delta(\sqrt{-g}L) = \frac{\partial(\sqrt{gL})}{\partial g^{ik}}\,\delta g^{ik} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\,\delta\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \\ + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\,\partial x^2}}\,\delta\,\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\,\partial x^2} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\,\delta\lambda^{(\alpha)} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

После преобразований оно примет вид

$$\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} + \frac{\partial^2}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^2\,\partial x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}\right]\delta g^{ik} = 0, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik}\delta g^{ik} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\,\delta\lambda^{(\alpha)} + \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{\partial}{\partial x^r}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^r\,\partial x^l}}\right)\delta g^{ik} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\,\partial x^r}}\,\delta\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^r}\right].\end{gathered} \tag{8}$$

Вычислим вариации плотности скалярной кривизны

$$\delta(\sqrt{-g}R^*) = \delta(\sqrt{-g}B_0 g^{ik} R_{ik}) + \delta(\sqrt{-g}\theta) = 0, \tag{9}$$

где

$$B_0 = B_0(R) = \frac{1}{\varkappa},\ \theta = R_{ik}(B^{ik} - B_0 g^{ik}). \tag{10}$$

Преобразуя (9), придем к уравнению

$$\begin{gathered}B_0\sqrt{-g}\delta g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + \sqrt{-g}B_0 g^{ik}\delta R_{ik} + \\ + \sqrt{-g}\delta R\,\frac{dB_0}{d\ln R} + \delta(\sqrt{-g}\theta) = 0\end{gathered}$$

или

$$B_0\sqrt{-g}\delta g^{ik}\left[\left(1+\frac{d\ln B_0}{d\ln R}\right)R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right]+$$

$$+B_0\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik}\left(1+\frac{d\ln B_0}{d\ln R}\right)+\delta(\sqrt{-g}\theta)=0. \qquad (11)$$

Используя уравнение (7), найдем уравнение поля

$$B_0\left(1+\frac{d\ln B_0}{d\ln R}\right)R_{ik}-\frac{B_0}{2}g_{ik}R=T_{ik}-(\tau_{ik}+\beta_{ik}), \qquad (12)$$

где τ_{ik} и β_{ik} определяются соотношениями

$$\sqrt{-g}\tau_{ik}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\theta)}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}\theta)}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}+\frac{\partial^2}{\partial x^l\,\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}\theta)}{\partial\dfrac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\,\partial x^r}}, \qquad (13)$$

$$\beta_{ik}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^l\,\partial x^m}\left[g^{lm}g_{ik}-\delta_i^l\delta_k^m\right]-\frac{\partial\omega}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2}\left(3g^{ml}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}-2g^{ml}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2g^{rm}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i}\delta_k^l\right)-\frac{\partial\omega}{\partial x^l}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{-g}g^{lm}g_{ik})\right], \qquad (14)$$

причем

$$\omega=B_0\left(1+\frac{d\ln B_0}{d\ln R}\right)=\frac{1}{\varkappa}\left(1-\frac{d\ln\varkappa}{d\ln R}\right). \qquad (15)$$

Преобразуя (12), можно написать это уравнение в стандартном виде

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\varkappa\overline{T}_{ik}$$

или

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^kR=\varkappa\overline{T}_i^k, \qquad (16)$$

где

$$\overline{T}_{ik}=T_{ik}(\tau_{ik}+\beta_{ik})+\frac{R_{ik}}{\varkappa}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln R}=T_{ik}+\alpha_{ik}, \qquad (17)$$

причем

$$\alpha_{ik}=\frac{R_{ik}}{\varkappa}\frac{d\ln\varkappa}{d\ln R}-(\tau_{ik}+\beta_{ik}).$$

Если написать уравнение (16) в виде

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^kR=\varkappa T_i^{*k}+R_i^k\frac{d\ln\varkappa}{d\ln R}=\varkappa(T_i^{*k}+t_i^{*k})-\delta_i^kR\frac{\partial\ln\varkappa}{\partial\ln g}, \qquad (18)$$

где

$$\begin{aligned} T_i^{*k}&=T_i^k-(\tau_i^k+\beta_i^k),\\ \varkappa t_i^{*k}&=R_i^k\frac{d\ln\varkappa}{d\ln R}+R\frac{\partial\ln\varkappa}{\partial\ln g}, \end{aligned} \qquad (19)$$

то мы придем к выражению, опубликованному нами в работах [2, 3].

Перейдем к определению величин T_{ik}. Из (18) будем иметь

$$-T_{ik}\delta g^{ik}=-\delta g^{ik}(\tau_{ik}+\beta_{ik})+\omega g^{ik}\delta R_{ik}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g}\theta), \qquad (20)$$

причем вариация

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g}\theta)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\delta^*(\sqrt{-g}\theta)+\frac{\partial(\sqrt{-g}\theta)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\delta\lambda^\alpha\right],$$

где δ^* берется по g_{ik} и их производным.

Мы видим, что величины T_{ik} являются компонентами тензора, который можно назвать тензором энергии — импульса материи, поскольку он определяется источниками поля (8), дивергенция которых не равна нулю. При этом мы получили уравнения поля из одного лагранжиана единым методом при варьировании лагранжиана по g_{ik} и их производным:

$$T_{ik}\delta g^{ik}-(\tau_{ik}+\beta_{ik})\,\delta g^{ik}+\omega g^{ik}\delta R_{ik}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g}\theta)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{-g}}\delta(\sqrt{-g}\hat{p})=0, \tag{21}$$

где $\hat{p}$ — полное давление среды. Подставляя в (7) $L=\hat{L}=\hat{p}$ при условии (21), мы видим, что (7) будет тождественно выполняться.

В частном случае, когда $B^{ik}=g^{ik}B_0$, будем иметь $\theta=0$, $\tau_{ik}=0$. В том случае, когда $B_0=\frac{1}{\varkappa}=\text{const}$, $\overline{T}_{ik}=T_{ik}$, мы придем к известным обычным уравнениям гравитационного поля.

Вычислим величину

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^l}=\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ml}}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^l}+\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}}\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^l\partial x^k}+$$

$$+\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k g x^r}}\frac{\partial^3 g^{lm}}{\partial x^l\partial x^k\partial x^r}+\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k\partial x^r}}\frac{\partial^3 g^{ml}}{\partial x^l\partial x^k\partial x^r}+$$

$$+\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\frac{\partial\lambda^{(\alpha)}}{\partial x^l}. \tag{22}$$

Исключая из (7) и (22) величины $\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ml}}$, придем к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k}}+\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^l\partial x^r}\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k g x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k\partial x^r}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k\partial x^r}}\right]-\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ml}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^l}=$$

$$=\delta_l^k\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial x^k}-\delta_l^k\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\frac{\partial\lambda^{(\alpha)}}{\partial x^k}. \tag{23}$$

Отсюда при $L=\frac{R^*}{2}$ получим

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\,t_l^k}{\partial x^k}=\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^l}, \tag{24}$$

где

$$2t_i^k = \delta_i^k \overline{R}^* - \left[\frac{\partial R^*}{\partial \dfrac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l} + \frac{\partial R^*}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}} \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l \partial x^r} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial R^*}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}} \right), \tag{25}$$

причем

$$\overline{R}^* = R^* - \Omega, \quad \frac{\partial (\sqrt{-g}\Omega)}{\partial x^k} = \frac{\partial (\sqrt{-g} R^*)}{\partial \lambda^{(\alpha)}} \frac{\partial \lambda^{(\alpha)}}{\partial x^k}, \tag{26}$$

что дают законы сохранения.

Вычисляя правую часть из (25), придем к уравнению

$$2t_i^k = \delta_i^k \overline{R}^* - \omega \left\{ \left[\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l \partial x^r} g^{lk} g_{lm} - \frac{\partial^2 g^{kr}}{\partial x r \partial x^l} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[g^{rk} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l} \left(3 \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r} - 2 \frac{\partial g_{lr}}{\partial x^m} \right) - g^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r} \frac{\partial g^{rk}}{\partial x^l} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\partial g^{ml}}{\partial x^l} \left(g^{kr} g_{ml} - \delta_m^k \right) \frac{\partial \omega}{\partial x^r} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^k \partial x^r}} \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l \partial x^r} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g^{ml}}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial (\sqrt{-g}\theta)}{\partial \dfrac{\partial^2 g^{ml}}{\partial x^k \partial x^r}} \right). \tag{27}$$

Поскольку

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R \right)_{;k} = 0, \tag{28}$$

то на основании (16) можно написать

$$\frac{1}{\varkappa} (\varkappa \overline{T}_i^k)_{;k} = (\overline{T}_i^k)_{;k} + \overline{T}_i^k = \frac{\partial \ln R}{d x^k} \frac{d \ln \varkappa}{d \ln R}. \tag{29}$$

Принимая во внимание (17) и (29), можно уравнения сохранения (24) написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} (t_i^k + T_i^k + \alpha_i^k] = \frac{\sqrt{-g}}{2} \alpha^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^l} -$$

$$- \frac{\partial \ln R}{\partial x^k} \frac{d \ln \varkappa}{d \ln R} \sqrt{-g} T_i^k = \sqrt{-g} f_i, \tag{30}$$

где f_i — компоненты дополнительной силы поля, возникающей из-за изменения $\varkappa$. Если $B_l^m = \delta_l^m B_0$, то (30) сохраняет свой вид. При этом $\theta = 0$, $\tau_{ik} = 0$

$$2t_i^k = \delta_i^k R^* - \omega \left[\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l \partial x^r} g^{rk} g_{lm} - \frac{\partial^2 g^{kr}}{\partial x^r \partial x^l} \right] -$$

$$- \frac{\omega}{2} \left[g^{rk} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l} \left(3 \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r} - 2 \frac{\partial g_{lr}}{\partial x^m} \right) - g^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r} \frac{\partial g^{rk}}{\partial x^l} \right] +$$

$$+ \frac{\partial \omega}{\partial x^r} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l} (g^{rk} g_{lm} - \delta_m^k \delta_l^r). \tag{31}$$

Если $B_0 = \frac{1}{\varkappa} = \mathrm{const}$, то $\alpha_{ik} = 0$, $f_i = 0$, и мы придем к тождественным законам сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(t_i^k + T_i^k)] = 0, \tag{32}$$

где

$$2\varkappa t_i^k = \delta_i^k R - \left(\frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^l \partial x^r} g^{rk} g_{lm} - \frac{\partial^2 g^{kr}}{\partial x^r \partial x^l}\right) - \\ - \frac{1}{2}\left[g^{rk}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^l}\left(3\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r} - 2\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^m}\right) - g^{lm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^r}\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^l}\right] \times \\ \times \delta_i^v R + g^{km}\frac{\partial \Gamma^r_{mr}}{\partial x^l} - g^{rm}\frac{\partial \Gamma^k_{mr}}{\partial x^l}. \tag{33}$$

Так как мы не полагали на гиперповерхности $\delta\Gamma^l_{ik}$, то член вида $B^{ik}\ \delta R_{ik}$ можно интерпретировать как скаляр, определяющий источники поля-материи, а тензор T_i^k получающегося при этом поля как тензор-материи. Таким образом, нам при выводе уравнений поля удалось избежать дуализма и вывести эти уравнения из одного (а не двух) лагранжиана.

В отличие от прежних результатов в наших выражениях для t_i^k автоматически содержатся вторые производные по x^l, что делает реальным перенос энергии гравитационными волнами и в инерциальных системах отсчета.

Эти же уравнения можно получить и применяя дуалистический формализм, т. е. варьируя отдельно $L = Lg = -\frac{R^*}{2}$ и L_m. При этом мы автоматически получим уравнение (7)

$$\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x^2}\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\frac{\partial^2 \partial g^{in}}{\partial x^l \partial x^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}\right)\delta g^{ik} = 0,$$

где под $\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik}$ будем теперь понимать выражение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}\delta g^{ik} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_g)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\delta\lambda^{(\alpha)} - \delta(\sqrt{-g}L_m) = \\ = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_g)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\delta\lambda^{(\alpha)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}. \tag{34}$$

(Очевидно, безразлично, куда относить член $\frac{\partial(\sqrt{-g}L_g)}{\partial\lambda^{(\alpha)}}\delta\lambda^{(\alpha)}$: к полевой части уравнения или к тензору-материи; результат от этого не изменится.)

Все остальные выкладки, например, при вычислении t_i^k, будут такими же, как и проделанные выше. Так, оба формализма (при $\delta\Gamma^l_{ik} \neq 0$, и $\delta\Gamma^l_{ik} = 0$) дают один и тот же результат. Разница лишь в идеологии и методах рассуждений.

Поскольку мы ввели в рассмотрение некие тензорные или псевдотензорные величины B_l^m, то необходимо ввести и новый лагранжиан L_x^* (скаляр или псевдоскаляр), образованный из B_r^m и его производных, порождающих новое поле (новые взаимодействия), соответствующее этому лагранжиану.

Действительно ли необходимо это делать?

П. Иордан [4, 5], развивая формализм с переменной скалярной величиной $\varkappa$, несколько аналогичный нашему, ввел, например, в рассмотрение

$$L_{\varkappa}^{*} = \frac{\overline{\gamma}}{\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial x^{l}} \frac{\partial \varkappa}{\partial x^{l}} = \frac{\gamma}{\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial x^{l}} \frac{\partial \varkappa}{\partial x^{k}} g^{lk}, \tag{35}$$

где γ — безразмерная константа, этому лагранжиану соответствовало некоторое скалярное поле, характеризующее «рождение материи».

Новый лагранжиан вводить надо, но несколько иным способом, чем тот, которым пользовался Иордан.

В общем случае получаем

$$L_{\varkappa} = \overline{\gamma}, \ B g^{lk} \frac{\partial \ln B}{\partial x^{l}} \frac{\partial \ln B}{\partial x^{k}}, \tag{36}$$

где γ — безразмерная константа, B — скаляр или псевдоскаляр. Очевидно, что так же можно написать

$$L_{\varkappa} = \gamma g^{lk} \frac{\partial^{2} B}{\partial x^{l} \partial x^{k}}, \tag{37}$$

где γ — безразмерная константа.

Оба эти лагранжиана эквивалентны друг другу. Полный лагранжиан

$$\widehat{L} = L + L_{\varkappa} = -\frac{R^{*}}{2} + \gamma g^{lk} \frac{\partial^{2} B}{\partial x^{l} \partial x^{k}} = -\frac{1}{2} B_{l}^{m} R_{m}^{l} + \gamma g^{lk} \frac{\partial^{2} B}{\partial x^{l} \partial x^{k}}. \tag{38}$$

Считая, что B зависит также от параметров $\lambda^{(\alpha)}$, можно добавить к лагранжиану новый член, и в частности с какой-либо размерной константой, однако этого можно не делать.

Поскольку B_{l}^{m} пока произвольно, то можно написать

$$\widehat{L} = -\frac{1}{2} \widehat{B}_{l}^{m} R_{m}^{l} = -\frac{1}{2} B_{l}^{m} R_{m}^{l} + \gamma g^{lk} \frac{\partial^{2} B}{\partial x^{l} \partial x^{k}}, \tag{39}$$

где $\widehat{B}_{l}^{m}$ — новые величины.

Следовательно, заменяя всюду B_{l}^{m} на $\widehat{B}_{l}^{m}$ и опуская знак $\wedge$ наверху, придем к прежним уравнениям. Если все же варьировать сумму L и $L_{\varkappa}$, то появятся новые члены в уравнениях поля и это приведет к тому, что определения T_{1i}^{k} и T_{2i}^{k} будут иными. Добавочные члены можно «загонять» в T_{1i}^{k} и T_{2i}^{k}, поскольку новое поле B повлияет и на материальный тензор энергии-импульса. Изменится также определение псевдотензора t_{i}^{k}, но вид уравнения поля и сохранения останется прежним. Поскольку и оба указанных тензора и псевдотензор определяются из конкретных задач, то введение B-поля изменит только условия определения T_{1i}^{k}, T_{2i}^{k} и t_{i}^{k}, но не основные уравнения.

Вывод уравнений поля и законов сохранения из единого лагранжиана при $\varkappa = \mathrm{const}$ имеет явное преимущество, хотя результаты получаются одинаковые. В методе варьирования двух лагранжианов поля и материи должен быть изменен и лагранжиан материи за счет ее взаимодействия с B-полем и вследствие того, что B может зависеть (должно зависеть) от термодинамических параметров — давления и энтропии (p, σ).

В частном случае, когда $B_l^m = \delta_l^m \frac{1}{\varkappa}$, $B = \frac{4}{\varkappa} = 4B_0$,

$$\widehat{L} = -\frac{R}{2\varkappa} + 4\gamma g^{ik} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varkappa}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{R}{2\varkappa} + 4\overline{\gamma}_1 \times \tag{40}$$

$$\times \frac{g^{ik}}{\varkappa} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^i} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^k}.$$

Если $\widehat{L}$ зависит от (p, σ), то надо учесть и этот дополнительный член. Однако поскольку в самом общем случае ($\widehat{L}=(R, p, \sigma)$ p и σ — скаляры, а $f(p, \sigma)=\varphi(R)$), то всегда $\overline{L}=\widehat{L}(R)$.

Далее, очевидно,

$$4\overline{\gamma}_1 \frac{g^{ik}}{\varkappa} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^i} \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x^k} = 4\overline{\gamma}_1 \frac{g^{ik}}{\varkappa} \left(\frac{d \ln \varkappa}{d \ln R} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{\partial \ln R}{\partial x^i} \frac{\partial \ln R}{\partial x^k} = f(R). \tag{41}$$

В противном случае при варьировании надо учитывать производные по g^{ik} по x^l второго порядка. (Если эти производные учитывать, то, формально изменяя T_{1i}^k, T_{2i}^k и T_i^k, придем к прежним уравнениям поля и сохранения.)

Из (40) и (41), поскольку $f(R)$ должна иметь вид (исходя из размерностей) $f(R) = -\overline{\gamma}_0 \frac{R}{2\varkappa}$, находим

$$\widehat{L} = \frac{R}{2\varkappa}(1+\overline{\gamma}_0) = -\gamma_0 \frac{R}{2\varkappa}. \tag{42}$$

В частном случае изотропного пространства это сразу очевидно, поскольку

$$R = R(Q) = \text{const}\, a^{-2}, \quad \varkappa = \varkappa(a) = \text{const}\, a$$

и

$$L_\varkappa = \text{const}\, a^{-3} = -\overline{\gamma}_0 \frac{R}{2\varkappa}. \tag{43}$$

При полном лагранжиане (42) ни уравнения поля, ни законы сохранения, выведенные выше (при $\gamma_0=1$), не изменятся.

При дуалистическом выводе этих уравнений соответственно изменится определение T_i^k, эта величина также войдет в уравнения с множителем γ_0.

Коэффициент γ_0 вычислим, исходя из конкретных условий, задавая вид пространства и вычисляя его полную энергию. Иными словами, γ_0 можно найти из законов сохранения энергии, сравнивая дифференциальные и интегральные методы определения энергии для Шварцшильдовского пространства, где при $r \to \infty$ можно интегрировать дифференциальные соотношения.

При этом оказывается, что $\gamma_0 = \frac{3}{4}$.

Поскольку имеет место уравнение

$$\frac{1}{\varkappa}(\varkappa T_i^k)_{ik} = 0, \text{ или } \frac{\partial \ln \varkappa}{\partial x\, \varkappa} \overline{T}_i^k + T_{i,k}^k = 0,$$

то, подставляя

$$\overline{T}_i^k = T_i^k + \alpha_i^k = T_i^k - (\tau_i^k + \beta_i^k) + \frac{R_i^k d\ln\varkappa}{\varkappa\, d\ln R},$$

получим

$$\frac{\partial \ln\varkappa}{\partial x} T_i^k + \frac{1}{\varkappa} R_{i,k}^k \frac{d\ln\varkappa}{d\ln R} + R_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{d\ln\varkappa}{\varkappa\, d\ln R}\right) -$$

$$- (\tau_i^k + \beta_i^k)_{ik} + T_{i,k}^k = 0. \qquad (44)$$

Из вариационных уравнений, поскольку необходимо к T_i^k прибавить дополнительный тензор $\underset{\varkappa}{T_i^k}$, связанный с B полем, следует, что

$$(T_i^k + \underset{\varkappa}{T_i^k})_{ik} = 0. \qquad (45)$$

Сравнивая (44) и (45), находим

$$\underset{\varkappa}{T_{i,k}^k} = \frac{\partial\ln\varkappa}{\partial x^k} \overline{T}_i^k - (\tau_i^k + \beta_i^k)_k - \left(\frac{\partial \frac{1}{\varkappa}}{\partial \ln R} R_i^k\right)_{ik}. \qquad (46)$$

В частном случае, когда $B_i^m = \frac{1}{\varkappa}\delta_i^m$, $\tau_i^k = 0$

$$\left(\underset{\varkappa}{T_i^k} + \frac{d\frac{1}{\varkappa}}{d\ln R} R_i^k + \beta_i^k\right)_{;k} = \frac{d\ln\varkappa}{d\ln R}\,\frac{\partial \ln R}{\partial x^k}\left[T_i^k = \beta_i^k - R_i^k \frac{d\frac{1}{\varkappa}}{d\ln R}\right]. \qquad (47)$$

Соотношение (46) или (47) полностью определяет дополнительный тензор $\underset{\varkappa}{T_i^k}$. Очевидно, что в последнем случае

$$T_i^k + \underset{\varkappa}{T_i^k} = \overset{*}{\gamma}_0 T_i^k,$$

где $\overset{*}{\gamma}_0$ =const, поскольку все величины зависят только от a. Далее очевидно, что $\overset{*}{\gamma}_0 = \gamma_0$, поскольку при нашей манере написания в случае $\varkappa \sim a$ вид уравнений поля не изменяется по сравнению с классическим вариантом, когда $\varkappa$=const, а левая часть $\varkappa \sim a$ множится на γ_0.

В дальнейшем будем, как правило, исследовать подробно только этот частный, но исключительно важный случай, поскольку только он может быть в какой-то мере практически проверен. Общий неоднородный случай введения B_l^m пока вряд ли заслуживает более пристального внимания, чем изучение его в самом общем виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1960, § 93.
2. Станюкович К. П. ДАН СССР, **147**, № 6, 1962.
3. Станюкович К. П. ДАН СССР, **148**, № 2, 1963.
4. Jordan P. Naturwiss, **25**, 513, 1937.
5. Jordan P. Naturwiss, **26**, 417, 1938.

Поступила в редакцию
27. 5 1963 г.

Кафедра
статистической физики
и механики