Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1964

Б. И. МОРГУНОВ

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследовались дрейфовые уравнения для аксиально-симметричного магнитного поля. Получен приближенный интеграл точных уравнений движения, свойства которого изучены на численном примере.

1. Интегрирование уравнений движения заряженной частицы в неоднородных и переменных во времени электрическом и магнитном полях представляет сложную задачу. Практически единственным методом является численный просчет на вычислительных машинах. Но и численный счет становится затруднительным, если частица в своем движении совершает большое число оборотов вокруг силовой линии магнитного поля. В этом случае применим другой метод, впервые предложенный X. Альфвеном [1], заключающийся в отделении «быстрого» движения частицы по ларморовской окружности и в переходе к исследованию «плавного» движения центра этой окружности, называемого также «ведущим центром». Условием применимости этого метода является малость выражения $R_L \frac{\nabla H}{H} \ll 1$, где R_L — ларморовский радиус, H — напряженность магнитного поля.

И. Н. Боголюбов и др. [2, 3] с помощью метода усреднения получили систему уравнений, описывающую движение ведущего центра (дрейфовые уравнения), из которой движение поперек магнитного поля определяется в первом приближении (с точностью до $\frac{1}{\omega_H}$, где ω_H — ларморовская частота — большой параметр), а движение ведущего центра вдоль поля — в нулевом приближении.

Полная система дрейфовых уравнений первого приближения получена С. И. Брагинским [4]. Движение релятивистской частицы в дрейфовом приближении исследовано Г. Хеллвигом [5].

В настоящей работе рассматриваются дрейфовые уравнения для аксиально-симметричного магнитного поля. Показано, что в этом случае уравнения сильно упрощаются. Система дрейфовых уравнений дополняется уравнением для фазы, знание которой позволяет вычислить параметры движения частицы по координатам и скорости ее ведущего центра. В работе получен приближенный интеграл точных уравнений движения, причем полная производная этого интеграла по времени имеет порядок $\frac{1}{\omega^2_H}$. На численном примере исследована зависимость полученного интеграла от времени для аксиально-симметричного магнитного поля.

2. Полная система дрейфовых уравнений первого приближения весьма громоздка, что сильно усложняет ее применение. Однако для практически важного класса магнитных полей — полей с аксиальной симметрией — дрейфовые уравнения удается существенно упростить. В правые части уравнений входят комбинации трех взаимно ортогональных единичных векторов $\vec{\tau}_0$, $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, где $\vec{\tau}_0$ — вектор, касательный к силовой линии поля H. Целесообразно направить $\vec{\tau}_1$ по главной нормали, а $\vec{\tau}_2$ — по бинормали. Тогда для аксиально-симметричного поля $\vec{H} = \{H_r, 0, H_z\}$ (в цилиндрической системе координат) имеем

$$\vec{\tau}_0 = \left\{\frac{H_r}{H}, 0, \frac{H_z}{H}\right\}, \quad \vec{\tau}_1 = \left\{\frac{H_z}{H}, 0, -\frac{H_r}{H}\right\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{0, 1, 0\}.$$

Для простоты будем предполагать, что электрическое поле отсутствует.

Дрейфовые уравнения в этом случае принимают вид

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{H_r}{H},$$

$$r\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{mc}{e}\frac{u^2}{H}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H_z}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{H_r}{H}\right)\right] - \frac{mc}{2e}\frac{w^2}{H^3}\left[H_r\frac{\partial H}{\partial z} - H_z\frac{\partial H}{\partial r}\right],$$

$$\frac{dz}{dt} = u\frac{H_z}{H},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{w^2}{2H^2}\left[H_r\frac{\partial H}{\partial r} + H_z\frac{\partial H}{\partial z}\right],$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{uw}{2H^2}\left[H_r\frac{\partial H}{\partial r} + H_z\frac{\partial H}{\partial z}\right].$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты ведущего центра, u — компонент скорости ведущего центра, направленный по касательной к силовой линии, w — компонент скорости, перпендикулярный к u. Уравнения для u, w, r, z не содержат φ, т. е. φ находится по известным u, w, r, z-квадратурой. Кроме того, уравнения для r, z, u, w не содержат членов первого порядка по $\frac{1}{\omega_H}$. Если аксиально-симметричное магнитное поле таково, что $\operatorname{rot}\vec{H} = 0$, то дрейфовые уравнения можно еще более упростить:

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{H_r}{H},$$

$$\frac{dz}{dt} = u\frac{H_z}{H},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{w^2}{2H^3}\left[H_r^2\frac{\partial H_r}{\partial r} + 2H_rH_z\frac{\partial H_r}{\partial z} + H_z^2\frac{\partial H_z}{\partial z}\right],$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{uw}{2H^3}\left[H_r^2\frac{\partial H_r}{\partial r} + 2H_rH_z\frac{\partial Hr}{\partial z} + H_z^2\frac{\partial H_z}{\partial z}\right],$$

$$r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mc}{e}\left(u^2 + \frac{w^2}{2}\right)\frac{1}{H^4}\left[H_rH_z\left(\frac{\partial H_r}{\partial r} - \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial H_r}{\partial z}(H_z^2 - H_r^2)\right].$$

3. Для того чтобы по координатам и скорости ведущего центра найти координаты и скорость частицы в первом приближении, необходимо знать фазу скорости ведущего центра α, т. е. угол между вектором поперечной скорости $\vec{w}$ и вектором $\vec{\tau}_1$. Уравнение для фазы можно получить из общей схемы усреднения систем с быстро вращающейся фазой, развитой Н. Н. Боголюбовым [3]. В этом уравнении достаточно удержать только члены нулевого порядка по $\frac{1}{\omega_H}$, опустив члены первого порядка малости. Искомое уравнение имеет вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega_H - \frac{u}{2}[2\vec{\tau}_0 \operatorname{rot} \vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_1 \operatorname{rot} \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2 \operatorname{rot} \vec{\tau}_2].$$

Характерно, что для аксиально-симметричного магнитного поля члены нулевого порядка обращаются в нуль, т. е. $\frac{d\alpha}{dt} = -\omega_H + 0\left(\frac{1}{\omega_H}\right)$.

4. Для ряда задач желательно знать приближенные интегралы системы точных уравнений движения заряженной частицы. Величина $\frac{\overline{\omega}^2}{\omega_н}$ является приближенным интегралом системы дрейфовых уравнений. Как показал С. И. Брагинский [4], имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\left(\overline{w} - \frac{\overline{u}\overline{w}}{2\overline{\omega}_H}\vec{\tau}_0 \operatorname{rot} \vec{\tau}_0\right)^2}{\overline{\omega}_H}\right] = 0\left(\frac{1}{\omega_H^3}\right).$$

Из этого равенства, если магнитное поле удовлетворяет условию $\vec{H} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$, следует $\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{w}^2}{\overline{\omega}_H}\right) = 0\left(\frac{1}{\omega_H^3}\right)$. Заметим, что для аксиально-симметричных полей всегда $\vec{H} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$. Однако можно привести примеры магнитных полей, для которых $\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{w}^2}{\overline{\omega}_H}\right) = 0\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right)$. Такими полями, например, являются поля $\vec{H} = \{0,\ A,\ B\cos\varphi\}$ и $\vec{H} = \{0,\ Crz,\ D\}$, где A, B, C, D — произвольные константы, отличные от нуля. (Будем отмечать величины, относящиеся в ведущему центру, чертой над соответствующей буквой.) Рассмотрим величину $\frac{w^2}{\omega_H}$. Используя систему точных уравнений движения, нетрудно получить

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^2}{\omega_H}\right) = &-\frac{w^3}{\omega_H}\frac{\nabla\omega_H}{\omega_H}\vec{\tau}_1\cos\alpha - \frac{w^3}{\omega_H}\frac{\nabla\omega_H}{\omega_H}\vec{\tau}_2\sin\alpha - \\ &-\frac{2u^2w}{\omega_H}\vec{\tau}_1(\vec{\tau}_0\nabla)\vec{\tau}_0\cos\alpha - \frac{2u^2w}{\omega_H}\vec{\tau}_2(\vec{\tau}_0\nabla)\vec{\tau}_0\sin\alpha - \\ &-\frac{uw^2}{\omega_H}[\vec{\tau}_1(\vec{\tau}_1\nabla)\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_2(\vec{\tau}_2\nabla)\vec{\tau}_0]\cos 2\alpha - \\ &-\frac{uw^2}{\omega_H}[\vec{\tau}_1(\vec{\tau}_2\nabla)\vec{\tau}_0 + \vec{\tau}_2(\vec{\tau}_1\nabla)\vec{\tau}_0]\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Мы видим, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{w^2}{\omega_H}\right)$ имеет первый порядок милости. Поставим задачу: найти функцию вида $I = \frac{w^2}{\omega_H} + f(\vec{r}, \vec{v})$ $\left(\text{где } f(\vec{r}, \vec{v}) \text{ имеет порядок } \frac{1}{\omega_H^2}\right)$, такую, что $\frac{dI}{dt} = 0\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right)$. Для этого перейдем в выражении $\frac{\overline{w}^2}{\omega_H}$

от координат и скорости ведущего центра к координатам и скорости самой частицы. После ряда преобразований получим

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{w^3}{\omega_H^2} \frac{\nabla\omega_H}{\omega_H} (\vec{\tau}_2 \cos\alpha - \vec{\tau}_1 \sin\alpha) + \frac{2u^2 w}{\omega_H^2} \vec{\tau}_0 (\vec{\tau}_0 \nabla)(\vec{\tau}_2 \cos\alpha - \vec{\tau}_1 \sin\alpha) +$$

$$+ \frac{uw^2}{2\omega_H^2} [\vec{\tau}_1 (\vec{\tau}_2 \nabla)\vec{\tau}_0 + \vec{\tau}_2 (\vec{\tau}_1 \nabla)\vec{\tau}_0] \cos 2\alpha -$$

$$- \frac{uw^2}{2\omega_H^2} [\vec{\tau}_1 (\vec{\tau}_1 \nabla)\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_2 (\vec{\tau}_2 \nabla)\vec{\tau}_0] \sin 2\alpha,$$

причем $\frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{w^2}{\omega_H} + f(\vec{r}, \vec{v})\right) = 0\left(\frac{1}{\omega_H^2}\right)$. Отметим, что отношение $f(\vec{r}, \vec{v})$ к $\frac{w^2}{\omega_H}$ имеет порядок $R_L \frac{\nabla H}{H}$. Функцию I можно дополнить членами третьего порядка так, чтобы производная во времени от полученного выражения была уже не второго, а третьего порядка, но пользоваться этим интегралом затруднительно ввиду громоздкости.

В случае аксиально-симметричного поля приближенный интеграл можно записать в более простом виде

$$I = \frac{w^2}{\omega_H} + f(\vec{r}, \vec{v}), \; f(\vec{r}, \vec{v}) = -\frac{m^2c^2}{e^2}(2u^2 + w^2)\frac{1}{H^5} \times$$

$$\times \left[H_r H_z \left(\frac{\partial H_r}{\partial r} - \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial H_r}{\partial z}(H_z^2 - H_r^2)\right] \sin\alpha +$$

$$+ \frac{m^2c^2}{2e^2} \frac{uw^2}{H^3} \left[\frac{2}{r} H_r + \frac{1}{H^2}\left(H_r^2 \frac{\partial H_r}{\partial r} + 2H_r H_z \frac{\partial H_r}{\partial z} + H_z^2 \frac{\partial H_z}{\partial z}\right)\right] \sin 2\alpha.$$

Знание приближенного интеграла движения $\frac{w^2}{\omega_H}$ позволяет приближенно определить координаты точки отражения частицы от магнитной пробки. Уточненный интеграл I позволяет определить также фазу частицы в момент отражения от пробки.

5. Свойства полученного приближенного интеграла системы точных уравнений движения были рассмотрены на примере движения заряженной частицы в аксиально-симметричном магнитном поле с векторным потенциалом вида $\vec{A} = \left\{0,\, H_0\left(\frac{r}{2} + \gamma I_1(\beta r)\cos\beta z\right),\; 0\right\}$, где H_0, β, γ — постоянные, I_1 — функция Бесселя мнимого аргумента. Программа, составленная для решения этой задачи, предусматривала численное интегрирование канонических уравнений движения методом Штермера и вычисление по найденным координатам и скорости частицы величин $\frac{w^2}{\omega_H}$ и $I = \frac{w^2}{\omega_H} + f(\vec{r}, \vec{v})$. Начальные данные выбирались так, чтобы частица находилась внутри области абсолютного удержания. Счет проводился до тех пор, пока частица не совершит трех отражений от магнитных пробок. Вычисления проводились с двумя значениями абсолютной точности (10^{-7} и 10^{-8}), причем результаты совпали до седьмого десятичного знака. Проведенный численный анализ показал, что I, в отличие от $\frac{w^2}{\omega_H}$, не испытывает колебаний с ларморовской частотой

и изменяется весьма мало (относительное изменение I на интервале между двумя последовательными отражениями равно 0,033%), при этом I максимально при отражении и минимально, когда частица находится на равном расстоянии от магнитных пробок.

В заключение пользуюсь случаем принести благодарность А. Н. Тихонову за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфвен Х. Космическая электродинамика. ИЛ, М., 1952.
2. Боголюбов Н. Н. и Зубарев Д. Н. «Укр. матем. журн., 7, 5, 1955.
3. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.
4. Брагинский С. И. «Укр. матем. журн.», 8, 119, 1956.
5. Hellwig G. Zs. Naturforsch, 10a, 508, 1955.

Поступила в редакцию
22. 3 1963 г.

Кафедра
математики