

В. П. ГУЖОВ

К ВОПРОСУ О ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрен процесс возбуждения колебаний в автоколебательной системе с запаздывающей обратной связью. В качестве цепи обратной связи использована искусственная линия, нагруженная на активное сопротивление, равное волновому. Полученные результаты сравниваются с известными для случая идеального согласования линии с нагрузкой.

Среди автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью можно выделить определенный класс систем, не имеющих резонансных элементов. К их числу относятся, например, широкополосный усилитель с искусственной или ультразвуковой линией задержки в качестве цепи запаздывающей обратной связи, распределенный усилитель с отрезком коаксиального кабеля, генератор на ЛБВ.

Исследование процессов возбуждения в автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью (см., например, [1—4]) показало, что условия самовозбуждения в таких системах могут быть выполнены для целого ряда колебательных компонентов. Частоты возбуждающихся колебательных компонентов равно отстоят одна от другой, если запаздывание в цепи обратной связи одинаково для всех частот, или образуют неэквидистантный спектр при наличии дисперсии цепи обратной связи. В последнем случае скорости регенерации колебательных компонентов оказываются зависящими от дисперсионных свойств цепи запаздывания.

В настоящей работе исследовались процессы возбуждения колебаний в автоколебательной системе с n -звенной искусственной линией задержки, нагруженной на активное сопротивление, равное волновому (рис. 1). С подобными схемами приходится иметь дело на практике. Схема, представленная на рис. 1, отличается от исследований в работе [3], где рассматривалась полубесконечная линия, тем, что условия согласования линии с активной нагрузкой выполняются лишь в ограниченной полосе частот, значительно меньшей полосы прозрачности линии задержки. Потери в линии не учитывались.

Поведение автоколебательной системы в режиме возбуждения колебаний описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
2\ddot{u}_1 &= u_2 - u_1 - 2\dot{u}_1 - 2\sqrt{\frac{L}{C}} S\dot{u}_{n+1}, \\
4\ddot{u}_2 &= u_3 - 2u_2 + u_1, \\
&\dots\dots\dots \\
4\ddot{u}_k &= u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}, \\
&\dots\dots\dots \\
4\ddot{u}_n &= u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}, \\
2\ddot{u}_{n+1} &= u_n - u_{n+1} - 2\dot{u}_{n+1} + 2\dot{u}_{вх},
\end{aligned}
\tag{1}$$

где $u_1, u_2 \dots u_{n+1}$ — напряжения в узловых точках линии задержки, S — крутизна характеристики лампы в линейной области. Дифференцирование ведется по безразмерному времени $t = \frac{2t_1}{\sqrt{LC}}$.

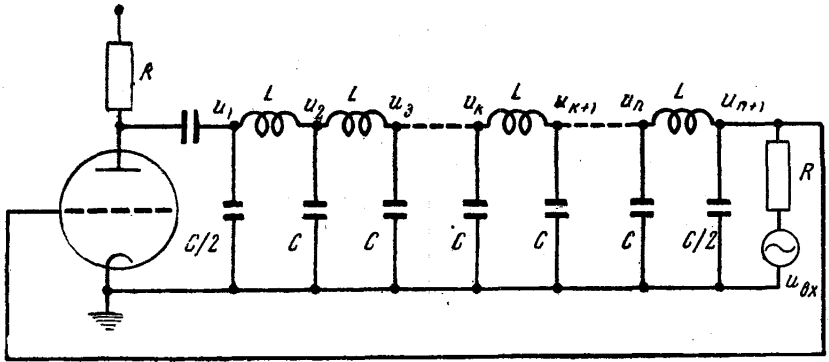


Рис. 1

Как известно [3, 5], решение задачи о возбуждении колебаний в автоколебательной системе с запаздывающей обратной связью складывается из двух частей. Одна из них описывает вынужденные колебания и является ограниченной функцией времени, другая соответствует свободным колебаниям системы и представляет собой сумму колебательных компонентов вида

$$A_m(t) \sin \eta_m t + B_m(t) \cos \eta_m t.$$

Здесь η_m — безразмерные частоты, а $A_m(t)$ и $B_m(t)$ — амплитуды колебательных компонентов, возрастающие во времени при коэффициенте усиления, большем единицы. Для схемы с искусственной линией задержки эта сумма имеет конечное число компонентов.

Заданием внешних воздействий в виде импульсов определенной формы и длительности можно обеспечить для некоторого момента времени определенные соотношения между амплитудами различных колебательных компонентов. Будем предполагать, что к этому моменту времени внешние воздействия прекратились. Дальнейшее развитие процесса нарастания колебаний определяется свойствами самой автоколебательной системы.

В этой связи решение задачи (1) о возбуждении колебаний будем искать в виде

$$u_k(t) = \sum_{m=1}^N A_{k,m}(t) \sin(\eta_m t - \vartheta_{k,m}), \quad (2)$$

где $N = \frac{n}{2}$ для четного n и $N = \frac{n+1}{2}$ для нечетного n ; по-прежнему m — номер колебательного компонента, k — номер звена в линии задержки. Для фиксированного номера m совокупность величин $A_{k,m}(t)$ дает распределение амплитуд по узловым точкам линии в момент времени t , а разность $\vartheta_{k,m} - \vartheta_{k-1,m}$ — сдвиг фаз на k -м звене линии задержки для m -го колебательного компонента.

Подставим искомое решение (2) в систему дифференциальных уравнений (1), полагая $A_{k,m}(t) = A_{k,m}(t_0) \exp[\alpha_m(t - t_0)]$, где α_m — показатель роста амплитуды m -го колебательного компонента, а $A_{k,m}(t_0)$ — значение амплитуды на k -м звене линии для m -го колебательного компонента в момент времени t_0 , выбранный за начальный. Учтем также, что для линейной системы выполняется тождество $\frac{d}{dt}(\vartheta_{k,m} - \vartheta_{k-1,m}) \equiv 0$. В результате получим систему из $2(n+1)m$

трансцендентных уравнений для определения $\frac{A_{k,m}}{A_{k-1,m}}, (\vartheta_{k,m} - \vartheta_{k-1,m}), \alpha_m, \eta_m$. Величины показателей роста амплитуд и частоты возбуждающихся колебательных компонентов оказываются следующим образом связанными с отношениями амплитуд и разностями фаз в линии:

$$\begin{aligned} \eta_m^2 - \alpha_m^2 &= \frac{1}{4} \left[2 - \frac{A_{k-1,m}}{A_{k,m}} \cos(\vartheta_{k,m} - \vartheta_{k-1,m}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_{k+1,m}}{A_{k,m}} \cos(\vartheta_{k+1,m} - \vartheta_{k,m}) \right], \\ \eta_m \alpha_m &= \frac{1}{8} \left[\frac{A_{k-1,m}}{A_{k,m}} \sin(\vartheta_{k,m} - \vartheta_{k-1,m}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_{k+1,m}}{A_{k,m}} \sin(\vartheta_{k+1,m} - \vartheta_{k,m}) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

При идеальном согласовании линии задержки с нагрузкой выполняются соотношения

$$\frac{A_{k+1,m}}{A_{k,m}} = \frac{A_{k,m}}{A_{k-1,m}}, \quad (\vartheta_{k+1,m} - \vartheta_{k,m}) = (\vartheta_{k,m} - \vartheta_{k-1,m}). \quad (4)$$

Для коэффициента усиления усилителя, близкого к единице ($K = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$) и идеального согласования, выражения (3) сводятся к полученным в работе [3] зависимостям для показателей роста амплитуд и частот нарастающих колебательных компонентов

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \cos \frac{\pi}{2n} (2m - 1), \quad (5)$$

$$\eta_m = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) \sin \frac{\pi}{2n} (2m - 1), \quad (6)$$

где $\xi = \sqrt[2n]{K}$.

Соотношение (5) можно переписать, если воспользоваться известным в теории искусственных линий выражением для фазовой характеристики линии задержки

$$\varphi(\eta) = 2n \arcsin \eta. \quad (7)$$

Следует оговориться. Понятие фазовой характеристики применимо лишь при рассмотрении стационарных процессов. Однако при выбранном ограничении на коэффициент усиления процесс возбуждения колебаний для каждого из колебательных компонентов будет квазипериодическим. В этом случае допустимо использование соотношения (7) при анализе неустановившихся движений в автоколебательной системе.

Возвращаясь к выражению (5) с учетом (7), получим

$$\alpha_m = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \frac{n}{\tau_m}, \quad \tau_m = \left. \frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_m}, \quad (8)$$

откуда следует, что показатель роста амплитуды m -го колебательного компонента в автоколебательной системе с n -звенной искусственной линией зависит от коэффициента усиления K , усилителя и величины групповой задержки в одном звене линии на частоте соответствующего

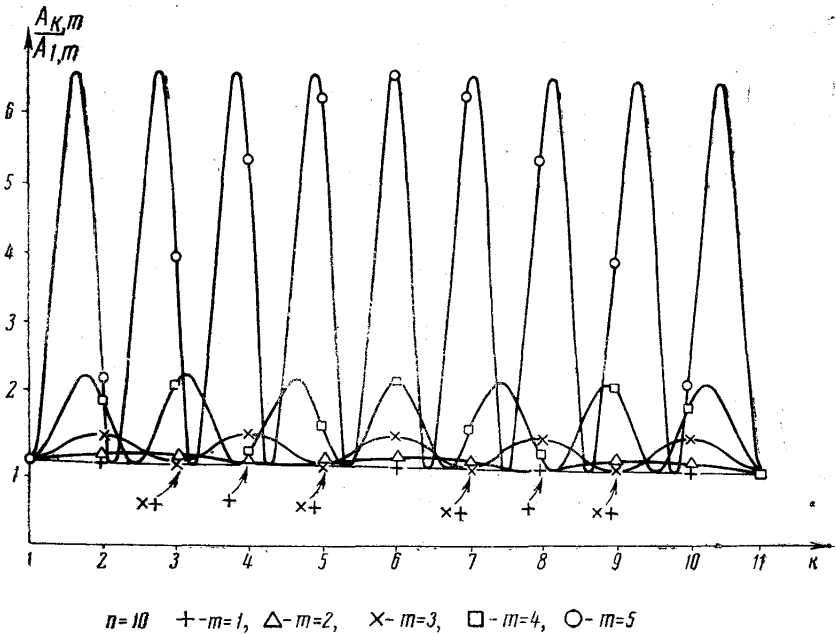


Рис. 2

колебательного компонента. В выражение для α_m входит групповое, а не фазовое запаздывание, это связано с тем, что для каждого колебательного компонента рассматриваемый процесс является квазипериодическим. Так как $\tau(\eta)$ быстро растет, стремясь к бесконечности при приближении η к критической частоте искусственной линии, величина показателя роста амплитуды колебательного компонента быстро падает с увеличением номера m .

При использовании в качестве нагрузки линии активного сопротивления $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ распределение амплитуд и фаз не определяется выражениями (4). По рис. 2 можно проследить за тем, как в этом случае изменяются амплитуды вдоль линии для различных колебательных компонентов.

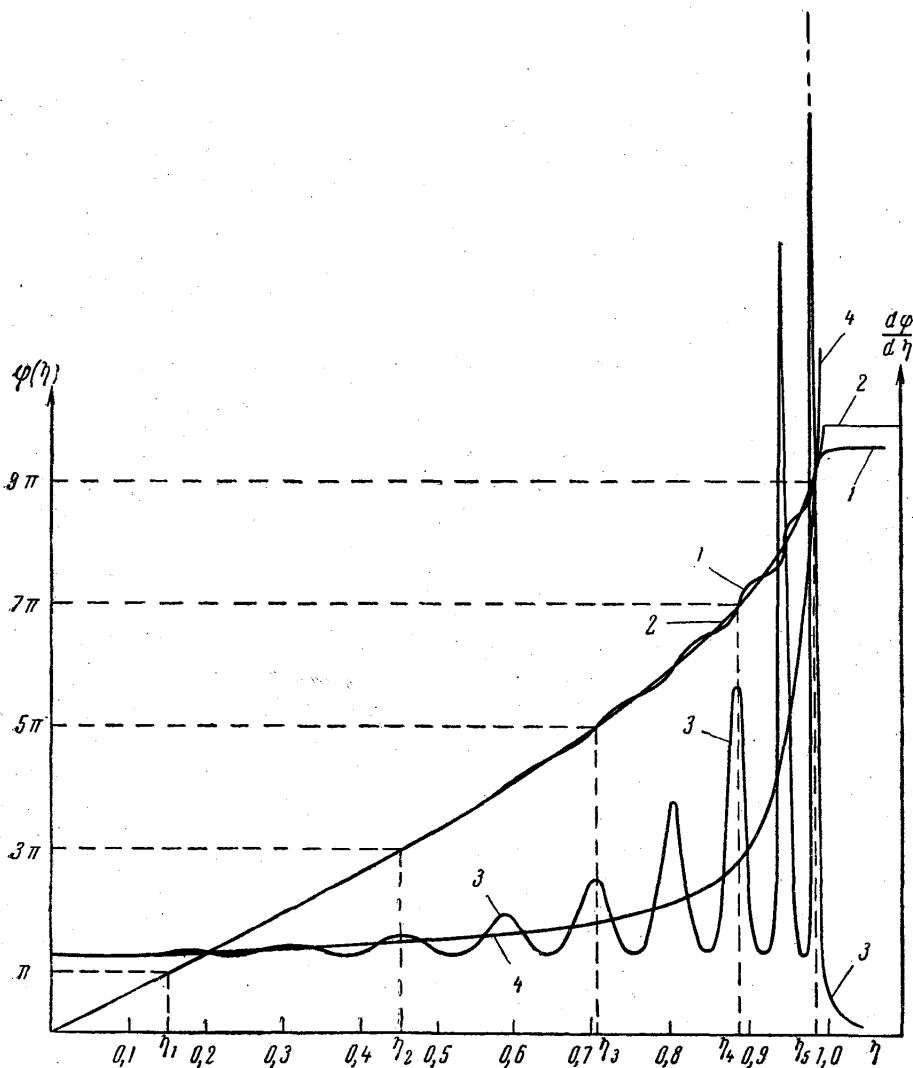


Рис. 3

Фазовая характеристика искусственной линии, нагруженной на активное сопротивление, равное волновому, приобретает осциллирующий характер, причем возможные отклонения от фазовой характеристики идеально согласованной линии увеличиваются по мере приближения частоты к критической (рис. 3). Производная фазовой характеристики по частоте, т. е. групповая задержка в линии на частотах колебательных компонентов, возрастает по сравнению со случаем идеального согласования (фазовая задержка в линии на этих частотах практически

не изменяется). Увеличение группового запаздывания особенно заметно для больших номеров m , а так как показатели роста амплитуд зависят от величины группового запаздывания, то для больших номеров колебательных компонентов следует ожидать уменьшения величин α_m по сравнению с (5). Последнее замечание основывается на предположении, что характер зависимости показателей роста амплитуды от запаздывания в линии, определяемый соотношением (8), остается справедливым и в случае активной нагрузки линии. (На рис. 3: 1 — фазовая характеристика линии, нагруженной на активное сопротивление $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$; 2 — фазовая характеристика идеально согласованной линии; 3 — $\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}$ при $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$; 4 — $\frac{d\varphi}{d\eta}$ при идеальном согласовании.)

Расчет режимов возбуждения в исследуемых системах был проведен с помощью электронной вычислительной машины. Получены частоты и показатели роста амплитуд возбуждающихся колебательных компонентов; распределение амплитуд по узловым точкам 10-звенной линии задержки см. на рис. 2.

Сравнение величин показателей роста амплитуд различных колебательных компонентов для случаев идеально согласованной линии и линии, нагруженной на активное сопротивление, равное волновому α_{m_0} и α_m , показано на рис. 4 для $n=10$. Как видно из рисунка, величина α_m ($m=5$) для идеально согласованной линии примерно втрое превышает показатель роста амплитуды пятого колебательного компонента в системе с активной нагрузкой, что подтверждает высказанное ранее замечание. Для четвертого колебательного компонента различие в величинах α значительно меньше (примерно в 1,3 раза), для колебательных компонентов меньших номеров величины показателей роста амплитуд практически совпадают.

Если сравнить величины α_m для $m=1$ и $m=5$ в системе с активной нагрузкой, то окажется, что $\alpha_1 \approx 20 \alpha_5$ (для идеального согласования $\alpha_{10} \approx 6,3 \alpha_{50}$).

Из-за отличия в параметрах регенерации в автоколебательной системе со многими степенями свободы в процессе возбуждения с течением времени будут преобладать амплитуды колебательных компонентов низших номеров, что отмечалось в [3]. Однако это не справедливо, если в начальном соотношении амплитуд различных колебательных компонентов, задаваемом внешними воздействиями, амплитуды колебательных компонентов высших номеров преобладают настолько, что нелинейные эффекты возникнут раньше заметного перераспределения амплитуд. Это существенно, так как любая реальная автоколебательная система может рассматриваться линейной лишь в ограниченной сверху области изменения амплитуд.

Соотношения между амплитудами различных колебательных компонентов нами подробно не рассматривались, поскольку они имеют значение лишь при изучении процессов установления в автоколебательных системах с запаздывающими обратными связями. Результаты исследования процессов установления будут изложены в последующих работах.

Частоты возбуждающихся колебательных компонентов, как показывают расчеты, близки к частотам (6) и растут с увеличением K . Однако относительные изменения частот $\Delta\eta_m/\eta_m$ для различных номеров m не остаются постоянными с ростом K в отличие от (6).

Отношения $\frac{\Delta\eta_m}{\eta_m} / \frac{\Delta\eta_1}{\eta_1}$ для разных m представлены на рис. 5. На графике нанесены точки, соответствующие линиям задержки с числом звеньев $n=4, 5, 10$. Все точки (для всех n) располагаются вблизи общей кривой, круто спадающей при приближении к $\eta=1$. Резкое уменьшение $\Delta\eta_m/\eta_m$ для частот, близких к критическим, связано, по-видимому, со значительным увеличением производной фазовой характеристики в этой области частот. Для соответствующих колебательных компонентов необходимые фазовые соотношения выполняются при меньших относительных изменениях частот.

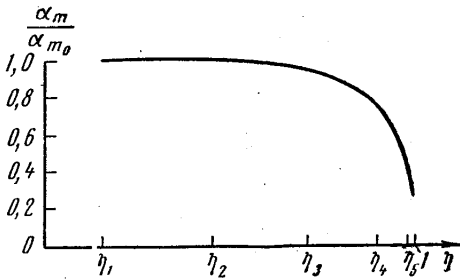


Рис. 4

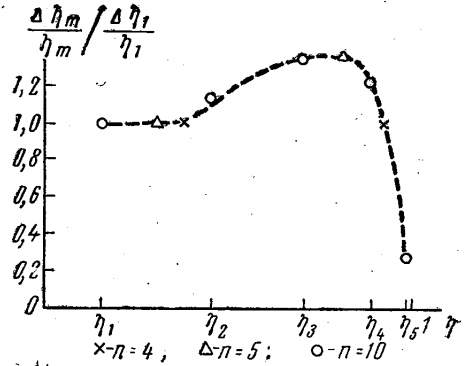


Рис. 5

В заключение сделаем некоторые выводы.

Для автоколебательной системы с искусственной линией задержки, нагруженной на активное сопротивление, равное волновому, частоты возбуждающихся колебательных компонентов существенно не отличаются при малых коэффициентах усиления от частот колебательных компонентов системы с идеально согласованной искусственной линией.

Для колебательных компонентов больших номеров показатели роста амплитуд оказываются значительно меньшими по сравнению со случаем идеального согласования.

Это следует учитывать, например, при конструировании динамических систем с m различными устойчивыми режимами. Для таких систем можно использовать линии задержки с числом звеньев, большим $2m+1$. Появляющаяся при этом потенциальная возможность для $(m+1)$ -го режима, по-видимому, не будет осуществляться, тем более что неучтенные нами потери в линии задержки в еще большей степени уменьшают скорость регенерации соответствующего колебательного компонента. Скорости регенерации первых m колебательных компонентов оказываются более близкими.

Выражаю признательность проф. В. В. Мигулину и канд. физ.-мат. наук Ю. М. Азьяну за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витт А. А. ЖТФ, IV, вып. I, 1934.
2. Edson W. A. IRE Trans., CT—2, Nr. I, 1955.
3. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», 1, вып. 4, 1956.
4. Met V. Proc. IRE, 46, Nr. 8, 1957.
5. Азьян Ю. М. «Радиотехника и электроника», 8, № 10, 1665, 1963.

Поступила в редакцию
6. 5 1963 г.

Кафедра
теории колебаний