Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1964

И. Б. АЛЕКСАНДРОВ, Ю. А. КУХАРЕНКО,
А. В. НИУККАНЕН

ДВУХВРЕМЕННЫЕ ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ФЕРМИ-СИСТЕМЫ

Рассматривается вывод уравнений для двухвременных корреляционных функций и одночастичных функций Грина для слабо-неидеальной ферми-системы в предположении малости потенциальной энергии бинарного взаимодействия по сравнению со средней кинетической энергией. С помощью введения массового оператора получено уравнение дайсоновского типа в квадратичном приближении относительно малого параметра теории возмущений. При выводе уравнений использовано условие ослабления корреляций для пространственно-удаленных частей системы. Найдено выражение для массового оператора во втором приближении. С его помощью вычислена энергия и затухание элементарных возбуждений.

Как показано в [1], получение кинетического уравнения на основе приближенного расцепления цепочки уравнений для одновременных корреляционных функций затруднено в результате затухания элементарных возбуждений.

Исследование высших приближений и, в частности, оценку роли затухания удобно проводить на основе функций Грина, с помощью которых можно естественно ввести понятие квазистационарного спектра элементарных возбуждений слабо-возбужденных неидеальных статистических систем и оценить границы применимости этого понятия.

Рассмотрим систему N фермионов с гамильтонианом [1]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\int dx\, \psi^+(tx)\,\Delta\psi(tx) + \frac{1}{2}\int dx_1\, dx_2\, \Phi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\psi^+(tx_1)\,\psi^+(tx_2)\,\psi(tx_2)\,\psi(tx_1). \tag{1}$$

С помощью усреднения по статистическому ансамблю с гамильтонианом H определяем двухвременные функции Грина

$$G_S^r = \theta(t-\tau) < [\psi^+(\tau y)\,\psi(\tau y');\, \psi^+(tx_1')\ldots\psi^+(tx_S')\,\psi(tx_S)\ldots\psi(tx_1)] >,$$

$$G_S^a(t-\tau) = -\theta(\tau - t) < [\psi^+(\tau y)\,\psi(\tau y');\; \psi^+(tx_1')\ldots\psi^+(tx_S')\,\psi(tx_S)\ldots\psi(tx_1)] >,$$

$$G_S^c(t-\tau) = \frac{1}{i\hbar}\langle\{\psi^+(\tau y)\,\psi(\tau y');\, \psi^+(tx_1')\ldots\psi^+(tx_S')\times \psi(tx_S)\ldots\psi(tx_1)\}\rangle,\quad S = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

где

$$[A; B] = \frac{AB + BA}{i\hbar}$$

представляет собой скобку Пуассона для ферми-операторов A и B. Заметим, что для введенных функций Грина (2), содержащих лишь комбинации операторов, сохраняющих число частиц, среднее по каноническому ансамблю совпадает со средним по большому ансамблю Гиббса. В самом деле операторы $\psi H_\lambda\,(tx)$, определяемые в гейзенберговском представлении с помощью гамильтониана $H = H - \lambda N$, отличаются от $\psi(tx)$ фазовыми множителями $e^{-i\lambda t}$, которые компенсируются в комбинациях операторов $\psi H_\lambda(tx)$, сохраняющих число частиц.

Для того чтобы получить уравнения для введенных функций Грина, будем исходить из известной цепочки уравнений для одновременных корреляционных функций [3]. Варьируя уравнения этой цепочки, легко получить систему неоднородных уравнений для функций Грина [5]. Для этого следует учесть, что, в силу теоремы о вариации гамильтониана [4], малое отклонение $\delta R_S(t)$ корреляционной функции от равновесной

$$\delta R_S(t) = R_S(t) - R_S^0$$

выражается через некоторую аналитическую функцию $G_S(E)$, предельные значения которой на вещественной оси при $Im E \to \pm 0$ представляют собой Фурье-образы, введенных согласно (2), запаздывающей и опережающей функций Грина. Переходя в неоднородной системе уравнений к функциям

$$G_S'(E) = G_S(E) - G_S(0),$$

получим цепочку однородных уравнений для «перенормированных» функций Грина (штрихи далее всюду опущены):

$$\begin{aligned} hEG(E, x_1 x_1' yy') &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1} - \Delta_{r_1'})\,G_1(E\,x_1 x_1'\,yy') + \\ &+ \int \{\Phi(r_1 - r_2) - \Phi(r_1' - r_2)\}\,G_2(E, x_1 x_2, x_1' x_2, yy')\,dx_2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} hEG_2(E, x_1 x_2 x_1' x_2'\; yy') &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2} - \Delta_{r_1'} - \Delta_{r_2'}) \times \\ &\times G_2(Ex_1 x_2 x_1' x_2' yy') + \{\Phi(r_1 - r_2) - \Phi(r_1' - r_2')\}\,G_2(Ex_1 x_2 x_1' x_2' yy') + \\ &+ \int dx_3 \{\Phi(r_1 - r_3) + \Phi(r_2 - r_3) - \Phi(r_1' - r_3) - \Phi(r_2' - r_3)\} \times \\ &\times G_3(E, x_1 x_2 x_3, x_1' x_2' x_3', yy') \end{aligned}$$

. . . .

Переходя в уравнениях (3) к запаздывающим и опережающим функциям Грина и используя для Фурье-образа причинной функции Грина следующее представление:

$$G^c(E) = \frac{e^{E\hbar/\theta}\,G^r(E) - G^a(E)}{e^{E\hbar/\theta}} \quad (E\text{ — вещественно}),$$

убеждаемся, что функции G_S^r, G_S^a, G_S^c удовлетворяют той же системе уравнений (3).

Переходя в уравнениях (3) к временно́му представлению для функций Грина и используя соотношение, вытекающее из определения (2):

$$i\hbar\,(G_S^c(t-\tau)-G_S^r(t-\tau))=\langle\psi^+(\tau y)\,\psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1')\,\ldots$$

$$\ldots\,\psi^+(tx_S')\,\psi(tx_S)\,\ldots\,\psi(tx_1)\rangle\equiv S_S(t-\tau,\,x_1x_1'x_2x_2'\,\ldots\,x_Sx_S';\;yy'),\tag{4}$$

получаем систему уравнений для двухвременных средних S_S:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}S_1(t-\tau,\,x_1x_1'yy')=-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1}-\Delta_{r_1'})\,S_1(t-\tau,\,x_1x_1'\,yy')+$$

$$+\int dx_2\{\Phi(r_1-r_2)-\Phi(r_1'-r_2)\}\,S_2(t-\tau,\,x_1x_2x_1'x_2yy'),\tag{5}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}S_2(t-\tau,\,x_1x_1'x_2x_2'\,yy')=-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1}+\Delta_{r_2}-\Delta_{r_1'}-\Delta_{r_2'})\times$$

$$\times S_2(t-\tau,\,x_1x_1'x_2x_2'yy')+\{\Phi(r_1-r_2)-\Phi(r_1'-r_2')\}\times$$

$$\times S_2(t-\tau,\,x_1x_1'x_2x_2'yy')+\int dx_3\{\Phi(r_1-r_3)+\Phi(r_2-r_3)-$$

$$-\Phi(r_1'-r_3)-\Phi(r_2'-r_3)\}\,S_3(t-\tau,\,x_1x_1'x_2x_2'x_3x_3yy').\tag{6}$$

Нашей целью является получение замкнутых уравнений для «одночастичных» функций Грина

$$\begin{aligned}K^r(t-\tau)&=\theta(t-\tau)\,\langle[\psi^+(\tau y),\,\psi(tx_1)]_+\rangle,\\ K^a(t-\tau)&=-\theta(\tau-t)\,\langle[\psi^+(\tau y),\,\psi(tx_1)]_+\rangle,\end{aligned}\tag{7}$$

полюсы аналитического продолжения которых в комплексную E-плоскость определяют спектр и затухание элементарных возбуждений [6], [7]. Для того чтобы, исходя из уравнений (5), (6), получить уравнения для одночастичных функций K^a и K^r, необходимо уменьшить число операторов, входящих в выражения для функций S_S. Используем для этого принцип ослабления корреляций [8].

Разобьем пространственные аргументы функции $S_1(t-\tau,\,xx_1'yy')$ на две группы: (r_1, r) и (r_1', r'). Предположим, что совокупность точек с координатами r_1, r пространственно удалена от совокупности точек r_1', r'. Тогда операторы $\psi^+(x_1't)$, $\psi(\tau y')$ приближенно антикоммутируют с операторами $\psi^+(\tau y)$, $\psi(tx_1)$. Поэтому при неограниченном удалении точек (r_1, r) от (r_1', r') асимптотическая форма S_1 в силу ослабления корреляции принимает вид

$$S_1(t-\tau,\,x_1x_1'yy')\equiv\langle\psi^+(\tau y)\,\psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1')\,\psi(tx_1)\rangle\to$$

$$\to\langle\psi^+(\tau y)\,\psi(tx_1)\rangle\;\langle\psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1')\rangle.$$

Предположим далее, что потенциал Φ имеет конечный радиус действия. В этом случае интегральный член в уравнении (5) отличен от нуля только тогда, когда расстояния $r_1-r_2\mid$ и $\mid r_1'-r_2\mid$ не превышают радиуса действия сил. Тогда асимптотическая форма интегрального члена уравнения (5) имеет вид

$$\int dx_2\Phi(r_1-r_2)\,\langle\psi^+(\tau y)\,\psi^+(tx_2)\,\psi(tx_2)\rangle\,\langle\psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1')\rangle-$$

$$-\int dx_2\,\Phi(r_1'-r_2)\,\langle\psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1')\,\psi^+(tx_2)\,\psi(tx_2)\rangle\,\langle\psi^+(\tau y)\,\psi(tx_1)\rangle,$$

так как в первом слагаемом точка r_2 находится на малом расстоянии от r_1 и, следовательно, удалена от r_1' и r', а во втором слагаемом точка r_2 удалена от r_1 и r.

Таким образом, асимптотическая форма уравнения (5) принимает вид

$$\left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{x_1}\right)\langle\psi^+(\tau y)\psi(tx_1)\rangle-\int dx_2\Phi(r_1-r_2)\times\right.$$

$$\left.\times\langle\psi^+(\tau y)\psi^+(tx_2)\psi(tx_2)\psi(tx_1)\rangle\right\}\langle\psi(\tau y')\psi^+(tx_1')\rangle=$$

$$=\left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{x_2}\right)\langle\psi(\tau y')\psi^+(tx_1')\rangle-\int dx_2\Phi(r_1'-r_2)\times\right.$$

$$\left.\times\langle\psi(\tau y')\psi^+(tx_1')\psi^+(tx_2)\psi(tx_2)\rangle\right\}\langle\psi^+(\tau y)\psi(tx_1)\rangle. \quad (8)$$

Разделив обе части выражения (8) на

$$\langle\psi(\tau y')\psi^+(tx_1')\rangle\langle\psi^+(\tau y)\psi(tx_1)\rangle,$$

получим равенство, левая и правая части которого зависят от разных пространственных переменных. Это позволяет ввести константу разделения λ. Как легко показать с помощью непосредственного дифференцирования по t среднего по большому ансамблю Гиббса $\langle\psi^+(\tau y)\psi(tx_1)\rangle_{H_\lambda}$, константа λ представляет собой химический потенциал системы.

В результате получаем уравнения

$$\left(i\hbar+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{r_1}+\lambda\right)\alpha_1(x_1y,t-\tau)-\int dx_2\,\Phi(r_1-r_2)\,\alpha_2(t-\tau,x_1yx_2x_2'), \quad (9)$$

где

$$\alpha_1(t-\tau,x,y)=\langle\psi^+(\tau y)\psi(tx_1)\rangle,$$

$$\alpha_2(t-\tau,x,yx_2x_2')=\langle\psi^+(\tau y)\psi^+(tx_2')\psi(tx_2)\psi(tx_1)\rangle.$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{r_1'}-\lambda\right)\alpha_1'(t-\tau,y'x_1')+\int dx_2\,\Phi(r_1'-r_2)\,\alpha_2'(t-\tau,y'x_1'x_2x_2), \quad (10)$$

где

$$\alpha_1'(t-\tau,y'x_1')=\langle\psi(\tau y')\psi^+(tx_1')\rangle,$$

$$\alpha_2'(t-\tau,y'x_1'x_2x_2')=\langle\psi(\tau y')\psi^+(tx_1')\psi^+(tx_2')\psi(tx_2)\rangle.$$

Легко показать, что уравнения (9), (10) справедливы не только асимптотически, но и для любых значений r_1, r_1', r, r'. В самом деле, фиксируем положение точек r_1 и r, а точки с координатами r_1', r' удалим на бесконечность. Проводя прежние рассуждения, убеждаемся, что уравнение (9) имеет место для любых значений r_1 и r. Аналогичным образом можно показать, что уравнение (10) справедливо для любых значений r_1' и r'.

Чтобы найти асимптотическую форму уравнения (6), разобьем пространственные аргументы функции $S_2(t-r,x_1x_1'x_2x_2';yy')$ на две группы: $(r_1rr_2r_2')$ и $(r_1'r')$. Предполагая, что расстояние между совокупностями этих точек неограниченно возрастает, находим, что

$$S_2(t-\tau,\ x_1x_1'x_2x_2';\ yy') \equiv \langle \psi^+(\tau y)\,\psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1') \times$$
$$\times \psi^+(tx_2')\,\psi(tx_2)\,\psi(tx_1)\rangle \to \langle \psi^+(\tau y)\,\psi^+(tx_2')\,\psi(tx_2)\,\psi(tx_1)\rangle \times$$
$$\times \langle \psi(\tau y')\,\psi^+(tx_1')\rangle \equiv \alpha_2(t-\tau,\ x_1yx_2x_2')\,\alpha_1'(t-\tau,\ y'x_1').$$

В результате находим асимптотическую форму уравнения (7)

$$\frac{1}{\alpha_2(t-\tau,\ x_1yx_2x_2')}\left\{\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_{r_1}+\Delta_{r_2}-\Delta_{r_2'})-\Phi(r_1-r_2)\right]\times\right.$$
$$\times\alpha_2(t-\tau,\ x_1\,yx_2x_2')-\int dx_3\,[\Phi(r_1-r_3)+\Phi(r_2-r_3)-\Phi(r_2'-r_3)]\times$$
$$\left.\times\alpha_3(t-\tau,\ yx_1x_2x_2'x_3x_3)\right\}=\frac{1}{\alpha_1'(t-\tau,\ y'x_1')}\left\{\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\right.\right. \tag{11}$$
$$\left.\left.+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{r_1'}\right]\alpha_1'(t-\tau,\ y'x_1')-\int dx_3\,\Phi(r_1'-r_3)\,\alpha_2^1(t-\tau,\ y'x_1'x_3x_3)\right\}.$$

Так как левая и правая части уравнения (11) не содержат одинаковых переменных, то, вводя константу разделения, это уравнение можнс разбить на два: для α_2 и α_1'. Сравнивая полученное уравнение для α_1' с уравнением (10), убеждаемся, что константа разделения равна λ. Для α_2 получаем уравнение, справедливое не только асимптотически, но, как легко показать, при любых значениях r_1, r, r_2, r_2':

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2(t-\tau,\ x_1yx_2x_2')=-\frac{\hbar^2}{2m}\{\Delta_{r_1}-\Delta_{r_2}-\Delta_{r_2'}-\lambda\}\times$$
$$\times\alpha_2(t-\tau,\ x_1yx_2x_2')+\Phi(r_1-r_2)\,\alpha_2(t-\tau,\ x_1yx_2x_2')+$$
$$+\int dx_3\,\{\Phi(r_1-r_3)+\Phi(r_2-r_3)-\Phi(r_2'-r_3)\}\,\alpha_3(t-\tau,\ x_1yx_2x_2'x_3x_3). \tag{12}$$

Итак, получена система уравнений (9), (12) для двухвременных средних α_1 и α_2, содержащих функцию α_3 высшего порядка. Для того чтобы получить *замкнутое* уравнение для одночастичного оператора α_1, необходимо расцепить систему уравнений для α_1, α_2, α_3, ... Это расцепление удобно производить с помощью массового оператора, который введем следующим образом:

$$\int dx_2\,M(t-\tau,\ x_1x_2)\,\alpha_1(t-\tau,\ yx_2)=\int dx_2\,\Phi(r_1-r_2)\,\alpha_2(t-\tau,\ x_1yx_2x_2). \tag{13}$$

Отметим, что обычная форма теории возмущений, использующая разложения функций Грина неидеальных статистических систем, неприменима.

Запишем уравнения для α_1 и α_2 в импульсном представлении:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{p_1^2}{2m}+\lambda\right)\alpha_1(t-\tau,\ p_1p_1')-\int dp_2\,M(t-\tau,\ p_1p_2)\,\alpha_1(t-\tau,\ p_1,\ p_2,\ p_1',\ p_2'), \tag{14}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{p_1^2}{2m}-\frac{p_2^2}{2m}+\frac{p_2'^2}{2m}+\lambda\right)\alpha_2(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2')-$$
$$-\int dp_3\,dp_1''\,dp_2''\,dp_3''\,\{\Phi(p_1-p_1'')\,\delta(p_2-p_2'')\,\delta(p_1+p_3-p_1''-p_3'')+$$
$$+\Phi(p_2-p_2'')\,\delta(p_1-p_1'')\,\delta(p_2+p_3-p_2''-p_3'')\}\,\alpha_3(t-\tau,\ p_1''p_1'p_2''p_2'p_3''p_3)-$$

$$-\int dp_3\,dp_1''\,dp_2''\,\Phi(p_2''-p_2')\,\delta(p_1''-p_1')\,\delta(p_2''+p_3''-p_2'-p_3)\times$$
$$\times\,\alpha_3(t-\tau,\ p_1p_1''p_2p_2''p_3p_3''). \qquad (15)$$

Будем рассматривать систему уравнений (14), (15) в приближении «слабого» взаимодействия. В этом случае, как и в [2, 11 и 12], можно ввести малый параметр теории возмущений ε. Для получения замкнутой системы уравнений для α_1 и α_2 произведем расцепление функции α_3 с помощью теоремы Блоха—Вика [9]. Предполагая, что равновесное распределение $R^0{}_1$ пространственно однородно

$$R_1^0(p_1p_1')=n(p_1)\,\delta(p_1-p_1'),$$

получаем следующее выражение для α_3:

$$\alpha_3(p_1p_1'p_2p_2'p_3p_3')=\alpha_1(p_1p_1')\,n_{p_2}n_{p_3}\,\delta(p_2-p_2')\,\delta(p_3-p_3')+$$
$$+\alpha_1(p_2p_1')\,n_{p_3}n_{p_1}\,\delta(p_3-p_2')\,\delta(p_1-p_3')+\alpha_1(p_3p_1')\,n_{p_1}n_{p_2}\times$$
$$\times\,\delta(p_1-p_2')\,\delta(p_2-p_3')-\alpha_1(p_2p_1')\,n_{p_1}n_{p_3}\,\delta(p_1-p_2')\,\delta(p_3-p_3')-$$
$$-\alpha_1(p_3p_1')\,n_{p_2}n_{p_1}\,\delta(p_2-p_2')\,\delta(p_1-p_3')-$$
$$-\alpha_1(p_1p_1')\,n_{p_3}n_{p_2}\,\delta(p_3-p_2')\,\delta(p_2-p'), \qquad (16)$$

причем одновременные корреляционные функции $R_1(t)$ заменены в выражении (16) их равновесными значениями, так как член уравнения (15), содержащий α_3, имеет порядок ε.

Заметим, что в общем случае оператор потенциальной энергии удовлетворяет условиям теоремы Блоха—Вика лишь приближенно, в силу чего равенство (16) носит приближенный характер. Использование теоремы Блоха—Вика соответствует в рассматриваемом случае квадратичному приближению в кинетическом уравнении для одновременной функции распределения [1, 2, 12].

Ищем решение уравнения (15) в следующем виде:

$$\alpha_2(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2')=\alpha_1(t-\tau,\ p_1p_1')\,n_{p_2}\,\delta(p_2-p_2')-$$
$$-\alpha_1(t-\tau,\ p_2p_1')\,n_{p_1}\,\delta(p_1-p_2')+\varepsilon\alpha_2''(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2'). \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (15), находим, что α_2'' удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2''(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2')=[T_{p_1}+T_{p_2}-T_{p_2'}-\lambda]\times$$
$$\times\,\alpha_2''(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2')+A(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2'), \qquad (18)$$

где A — некоторая функция чисел заполнения, которая в случае пространственно-однородного распределения

$$\alpha_1(p_1p_1',\ t-\tau)=\alpha_1(t-\tau,\ p_1)\,\delta(p_1-p_1')$$

принимает вид:

$$A(t-\tau,\ p_1p_1'p_2p_2')=\varepsilon\,[\Phi(p_2-p_2')-\Phi(p_1-p_2')]\,[n_{p_2}+n_{p_1}\,n_{p_2}-$$
$$-n_{p_1}n_{p_2}'-n_{p_2}n_{p_2'}]\,\alpha_1(t-\tau,\ p_1+p_2-p_2')\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')+$$
$$+\varepsilon\int dp_3\,[\Phi(0)-\Phi(p_1'-p_3)]\,n_{p_1}n_{p_2}n_{p_3}\{\delta(p_2-p_2')\,\delta(p_1-p_1')-\delta(p_1-$$
$$-p_2')\,\delta(p_2-p_1')\}. \qquad (19)$$

Для решения уравнения (18) наложим на функцию $\alpha_2''(t-\tau)$ условие ослабления корреляции в начальный момент $t=-\infty$[1]. Легко показать, что, используя начальное условие [1], для α_2'' в E-представлении можно получить решение в виде

$$\alpha_2''(Ep_1p_1'p_2p_2') = \frac{i}{2\pi}\frac{A(Ep_1p_1'p_2p_2')}{E-T_{p_1}-T_{p_2}+T_{p_2'}+\lambda+i\varepsilon}, \tag{20}$$

$$\alpha_2(Ep_1p_1'p_2p_2') = \alpha_1(Ep_1)\,u_{p_2}\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2') -$$

$$-\alpha_1(Ep_2)\,u_{p_2}\delta(p_2-p_1')\,\delta(p_1-p_2') + \varepsilon\frac{i}{2\pi}\frac{A(Ep_1p_1'p_2p_2')}{E-T_{p_1}-T_{p_2}+T_{p_2'}+\lambda+i\varepsilon}, \tag{21}$$

где $A(Ep_1p_1'p_2p_2')$ определяется формулой (19).

Подставим (21) в уравнение (14), записанное в E-представлении, получим уравнение для двухвременной одночастичной корреляционной функции $\alpha_1(p_1E)$

$$\{E-T_{p_1}+\lambda-M(p_1E)\}\,\alpha_1(Ep_1)=0,$$

где выражение для $M(p_1,E)$ аналогично выражению для массового оператора, полученному в [10] другим способом. С точностью до членов порядка ε^2

$$M=\varepsilon M_1+\varepsilon^2 iM_2,$$

$$M_1(p_1E)=\int dp_2\,[\Phi(0)-\Phi(p_1-p_2)]\,n_{p_2}, \tag{22}$$

$$M_2(p_1E)=\frac{1}{2\pi}\int dp_2\,dp_1'\,dp_2'\,\Phi(p_1-p_1')\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2')\times$$

$$\times\frac{[\Phi(p_2'-p_2)-\Phi(p'-p_2)]}{E-T_{p_1'}+T_{p_2}-T_{p_2'}+\lambda+i\varepsilon}\,[n_{p_2}+n_{p_1'}n_{p_2'}-n_{p_2'}n_{p_2}-n_{p_1'}n_{p_2}]. \tag{23}$$

Симметризуем выражение для M_2:

$$M_2(Ep_1)=\frac{1}{4\pi}\int dp_2\,dp_1'\,dp_2'\,\frac{[\Phi(p_1-p_1')-\Phi(p_1-p_2')]^2}{E+T_{p_2}-T_{p_1'}-T_{p_2'}+\lambda+i\varepsilon}\times$$

$$\times[n_{p_2}+n_{p_1'}n_{p_2'}-n_{p_2'}n_{p_2}-n_{p_1'}n_{p_2}]\,\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2'). \tag{24}$$

Нетрудно получить уравнение для

$$K_1^r(E,p_1)=\langle\langle a_{p_1s_1}|a^+_{p_1's_1'}\rangle\rangle^r\delta(p-p')\,\delta_{s_1s_1'}:$$

$$\{E-T_{p_1}+\lambda-M(p_1,E)\}\,K_1^r(p_1,E)=\frac{1}{2\pi}, \tag{25}$$

где $M=\varepsilon M_1+\varepsilon^2 M_2$, а M_1 и M_2 определяются формулами (22) и (23).

Рассмотрим в заключение вопрос о нахождении энергетического спектра и затухания «одночастичных» элементарных возбуждений. Как видно из решения уравнения (25)

$$K_1^r(p_1,E)=\frac{\frac{1}{2\pi}}{E-T_{p_1}-M(E,p_1)}, \tag{26}$$

полюсы функции Грина определяются нулями выражения

$$E - T_{p_1} + \lambda - M(E, p_1) = 0. \tag{27}$$

Совершаем аналитическое продолжение в комплексную плоскость по формуле

$$E = \varepsilon(p_1) - i\Gamma(p_1) - \lambda.$$

Так как об элементарном возбуждении имеет смысл говорить лишь при условии $\frac{\Gamma(p_1)}{\varepsilon(p_1)} \ll 1$, то с помощью формулы $\frac{1}{x + i\varepsilon} = p\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, легко найти

$$\operatorname{Re} M_2 = \frac{P}{4\pi}\int dp_2\, dp_1'\, dp_2' \frac{[\Phi(p_1 - p_1') - \Phi(p_1 - p_2')]^2}{\varepsilon(p_1) + T_{p_2} - T_{p_1'} - T_{p_2'}} \times$$

$$\times [n_{p_2} + n_{p_1'} n_{p_2'} - n_{p_2'} n_{p_2} - n_{p_1'} n_{p_2}]\,\delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2');$$

$$Im M_2 = \frac{1}{4}\int dp_2\, dp_1'\, dp_2' [\Phi(p_1 - p_2') - \Phi(p_1 - p_2')]^2 \times$$

$$\times [n_{p_2} + n_{p_1'} n_{p_2'} - n_{p_2'} n_{p_2} - n_{p_1'} n_{p_2}]\,\delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \times$$

$$\times \delta(\varepsilon(p_1) + T_{p_2} - T_{p_1'} - T_{p_2'}).$$

Отсюда получаем следующие уравнения для определения энергии и затухания элементарного возбуждения

$$\varepsilon(p_1) = T_{p_1} + \varepsilon\int[\Phi(0) - \Phi(p_1 - p_2)]\, n_{p_2}\, dp_2 +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{P}{4\pi}\int dp_2\, dp_1' dp_2' \frac{[\Phi(p_1 - p_1') - \Phi(p_1 - p_2')]^2}{\varepsilon(p_1) + T_{p_2} - T_{p_1'} - T_{p_2'}} \times$$

$$\times [n_{p_2} + n_{p_1'} n_{p_2'} - n_{p_2'} n_{p_2} - n_{p_1'} n_{p_2}]\,\delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2'); \tag{28}$$

$$\Gamma(p_1) = \frac{\varepsilon^2}{4}\int dp_2\, dp_1'\, dp_2' [\Phi(p_1 - p_1') - \Phi(p_1 - p_2')]^2 \times$$

$$\times [n_{p_2} + n_{p_1'} n_{p_2'} - n_{p_2'} n_{p_2} - n_{p_1'} n_{p_2}]\,\delta(\varepsilon(p_1) +$$

$$+ T_{p_2} - T_{p_1'} - T_{p_2'})\,\delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2'). \tag{29}$$

Так как $n_p = \dfrac{1}{1 + \exp\left[\dfrac{\lambda - T(p_1)}{\theta}\right]}$ выражает число заполнения состояния для идеального газа, то, вводя m_p по формуле

$$n_p = \frac{1}{1 + m_p},$$

легко показать, что $\Gamma(p_1) > 0$ и, следовательно, определяет затухание волновых функций квазистационарных состояний.

Решая уравнения (28), (29) методом последовательных приближений, находим: $\varepsilon^{(0)}(p_1) = T_{p_1}$;

$$\varepsilon^{(1)}(p_1) = T_{p_1} + \varepsilon\int[\Phi(0) - \Phi(p_1 - p_2)]\, n_{p_2}\, dp_2,$$

$$\varepsilon^{(2)}(p_1) = T_{p_1} + \varepsilon \int [\Phi(0) - \Phi(p_1 - p_2)]\, n_{p_2}\, dp_2 + \varepsilon^2 \frac{P}{4\pi} \int dp_2\, dp_1'\, dp_2' \times$$

$$\times \frac{[\Phi(p_1 - p_1') - \Phi(p_1 - p_2')]^2}{T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')} [n_{p_2} + n_{p_1'} n_{p_2'} - n_{p_2'} n_{p_2} - n_{p_1'} n_{p_2}] \times$$

$$\times \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2');$$

$$\Gamma(p_1) = \frac{\varepsilon^2}{4} \int dp_2\, dp_1'\, dp_2' [\Phi(p_1 - p_1') - \Phi(p_1 - p_2')]^2 \times$$

$$\times [n_{p_2} + n_{p_1'} n_{p_2'} - n_{p_2'} n_{p_2} - n_{p_1'} n_{p_2}]\, \delta[T(p_1) + T(p_2) - T(p_1') - T(p_2')] \times$$

$$\times \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2').$$

Итак, величина $\varepsilon^{(1)}(p_1)$ содержит поправку к энергии частицы, обусловленную самосогласованным полем Хартри—Фока с учетом обменного взаимодействия. В этом приближении затухание отсутствует, и полюсы функций Грина лежат на вещественной оси. Математически это объясняется тем, что в первом порядке по ε уравнение для функции Грина линейно, и оператор $E - T_{p_1} + \lambda - \varepsilon M_1$ эрмитов. В следующем приближении задача становится несамосопряженной, и массовый оператор имеет *комплексные диагональные элементы*, мнимой частью которых определяется *затухание*.

Величина $\varepsilon^{(2)}(p_1)$ содержит не только энергию самосогласованного взаимодействия частиц, но и член, соответствующий бинарным корреляциям. В этом приближении появляется величина $\Gamma(p_1)$, определяющая затухание элементарных возбуждений.

Авторы выражают благодарность Н. Боголюбову (мл.) и Б. Садовникову за полезное обсуждение некоторых вопросов, рассмотренных в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И. Б., Кухаренко Ю. А., Ниукканен А. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 1, 1963.

2. Боголюбов Н. Н., Гуров К. П. ЖЭТФ, 17, 614, 1947.

3. Боголюбов Н. Н. Лекції з квантової статистики. Київ, «Радянська школа», 1949.

4. Бонч-Бруевич В. А., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. Физматгиз, М., 1961.

5. Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 1, 1963; ЖЭТФ, 43, 677, 1962.

6. Галицкий В. М., Мигдал А. Б. ЖЭТФ, 34, 139, 1958.

7. Коган Ш. М. «Физика твердого тела», 2, 1186, 1960.

8. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1961.

9. Bloch C., De Dominicis C. La leçon dans le livre «Le problème à N corps», Dunod-Wiley, 1959.

10. Тябликов С. В., Бонч-Бруевич В. Л. Теория возмущений для двух—временных функций Грина. Препринт. Матем. Ин-т АН СССР им. В. А. Стеклова, 1961.

11. Александров И. Б., Кухаренко Ю. А., Ниукканен А. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 2, 1963.

12. Александров И. Б., Кухаренко Ю. А., Ниукканен А. В. ДАН СССР, 149, 557, 1963.

Поступила в редакцию
22. 5 1963 г.

Кафедра
теоретической физики