Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1964

Б. Н. ФРОЛОВ

ОБ ИСТИННОМ ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

На основании теоремы Нётер находится общековариантный тензор энергии гравитационного поля. Обосновывается необходимость использования для получения истинного тензора энергии гравитационного поля инвариантных свойств касательного пространства ортогональных реперов.

1. Для получения точных законов сохранения в общей теории относительности (о.т.о) объект $t^{\mu\nu}$, описывающий энергию, импульс и натяжение гравитационного поля, должен подчиняться в силу уравнения поля соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\sqrt{-g} t^{\mu\sigma}) = 0, \tag{1}$$

причем (1) должно иметь один и тот же вид во всех системах координат, т. е. быть ковариантным. Ввиду того что операция обычного дифференцирования симметричной тензорной плотности не является ковариантной в о.т.о., ковариантность (1) достигается тем, что $t^{\mu\nu}$ не является истинным тензором. Таким образом, проблема локализации гравитационного поля возникает из самой постановки задачи о существовании законов сохранения в о.т.о.

Ситуация существенно меняется, если у объекта $t^{\mu\sigma}$ только один индекс относится к координатному пространству, другой же индекс относится к пространству ортогональных реперов: $t^{a\sigma} = t^{\mu\sigma}\Omega^{a}_{\mu}$. где Ω^{a}_{μ} есть матрица Ламе [1]. Латинскими буквами обозначены индексы реперного пространства, греческими буквами — индексы координатного пространства. Метрический тензор реперного пространства ε^{ab} имеет вид

$$\varepsilon^{ab} = e^{a}\delta^{ab} \quad e^{a} = \begin{cases} 1 \text{ при } a = 0 \\ -1 \text{ при } a = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{2}$$

Метрический тензор координатного пространства имеет вид $g_{\mu\nu} = \varepsilon_{ab}\Omega^{a}_{\mu}\Omega^{b}_{\nu}$. Откуда $\Lambda = det|\Omega^{a}_{\mu}| = \sqrt{-det|g_{\mu\nu}|}$.

Соотношение

$$0 = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\Lambda t_{a}{}^{\sigma}) = t_{a}{}^{\sigma}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\mu} t_{a}{}^{\sigma} \tag{3}$$

является ковариантным при условии, что t_a^σ является истинным координатным вектором. Тем самым проблема локализации гравитационной энергии оказывается совместной с проблемой существования законов сохранения.

2. Для определения истинного тензора энергии гравитационного поля используем теорему Нётер. Лагранжиан гравитационного поля выберем в виде:

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2}\Lambda R, \quad R = R_{kl}{}^{kl}, \tag{4}$$

$$R_{ab}{}^{kl} = \Omega_a^\nu \Delta_b{}^{kl}{}_{,\nu} - \Omega_b^\nu \Delta_a{}^{kl}{}_{,\nu} + 2C^c{}_{ab}\Delta_c{}^{kl} - \Delta_a{}^{ks}\Delta_{bs}{}^l + \Delta_b{}^{ks}\Delta_{as}{}^l, \tag{5}$$

где Δ_{abc} есть символы вращения Риччи [1].

$$\Delta_{abc} = -C_{cab} - C_{bca} + C_{abc}, \tag{6}$$

$$C_{cab} = \frac{1}{2}(\Omega_{c\sigma,\tau} - \Omega_{c\tau,\sigma})\,\Omega_a^\tau\Omega_b^\sigma = \Omega_{c[\sigma,\tau]}\Omega_a^\tau\Omega_b^\sigma . \tag{7}$$

Общий лагранжиан $\mathfrak{L}$ есть сумма $\mathfrak{L}_0$ и лагранжиана внешнего поля Q^A

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \varkappa\mathfrak{L}_{(Q)}, \quad \varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{L}_{(Q)} = \Lambda L_{(Q)}(Q^A, Q^A_{|q}), \tag{9}$$

где $Q^A_{|q}$ — так называемая инвариантная [1] (или компенсирующая [13, 15]) производная. Предполагается, что $\mathfrak{L}_{(Q)}$ содержит только первые производные поля Q^A.

Вариация интеграла действия имеет вид

$$0 = \delta D = \int (dx^4)\left\{\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta Q^A}\bar{\delta}Q^A + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Omega_\mu^a}\bar{\delta}\Omega_\mu^a + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left[\mathfrak{L}\delta x^\sigma + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}}\bar{\delta}Q^A + \right.\right.$$
$$\left.\left. + U_a{}^{\mu\sigma}[\mathfrak{L}]\,\bar{\delta}\Omega_\mu^a + W_a{}^{\mu\sigma\rho}[\mathfrak{L}]\,\bar{\delta}\Omega_{\mu,\rho}^a\right]\right\}, \tag{10}$$

где введены следующие обозначения:

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta Q^A} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A_{,\sigma}}, \tag{11}$$

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\Omega_\mu^a} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_\mu^a} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_{\mu,\sigma}^a} + \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_{\mu,\sigma\rho}^a}, \tag{12}$$

$$U_a^{\mu\sigma}[\mathfrak{L}] = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_{\mu,\sigma}^a} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_{\mu,\sigma\rho}^a}, \quad W_a{}^{\mu\sigma\rho}[\mathfrak{L}] = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_{\mu,\sigma\rho}^a}, \tag{13}$$

а символ $\bar{\delta}$ обозначает вариацию формы функции $\left(\bar{\delta} = \delta - \delta x^\sigma\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)$.

Уравнение гравитационного поля

$$-\frac{1}{\Lambda}\frac{\delta\mathfrak{L}_0}{\delta\Omega_\sigma^m} = -\varkappa T_m^\sigma, \tag{14}$$

$$\Lambda T_m^\sigma = -\frac{\delta\mathfrak{L}_{(Q)}}{\delta\Omega_\sigma^m} \tag{15}$$

есть уравнение Эйнштейна

$$R_{mn}{}^{\sigma n}-\frac{1}{2}R\Omega_m^\sigma=-\varkappa T_m^\sigma. \qquad (16)$$

Уравнение (14) полезно также представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}U_m{}^{\sigma\rho}[\mathfrak{L}]=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Omega_\sigma^m}. \qquad (17)$$

Рассмотрим бесконечномалый сдвиг криволинейного пространства на вектор $\delta x^\sigma=\omega^\sigma$. Координаты этого вектора в касательном реперном пространстве имеют вид $\omega^a=\Omega_\sigma^a\omega^\sigma$. Ввиду общей ковариантности о.т.о. инвариантность относительно 4-трансляций координатного пространства не может привести к каким-либо физическим следствиям. Для получения законов сохранения необходимо использовать инвариантные свойства плоского касательного реперного пространства. Поэтому в качестве независимых параметров будут рассматриваться величины ω^a. В этом случае имеем

$$\delta x^\sigma=\Omega_m^\sigma\omega^m,\quad \omega^m=\mathrm{const} \qquad (18)$$

и для вариации формы матрицы Ω_μ^a получаем

$$\bar{\delta}\Omega_\mu^a=-\Omega_\sigma^a\frac{\partial\delta x^\sigma}{\partial x^\mu}-\Omega_{\mu,\sigma}^a\delta x^\sigma=2C^a\mu m\omega^m. \qquad (19)$$

Подставляя в (10), получим для тензора энергии — импульса гравитационного поля выражение

$$\Lambda t_m{}^\sigma=-\mathfrak{L}_0\Omega_m^\sigma-2U_a{}^{\mu\sigma}[\mathfrak{L}_0]C^a{}_{\mu m}-2W_a{}^{\mu\sigma\rho}[\mathfrak{L}_0]C^a{}_{\mu m,\rho}, \qquad (20)$$

откуда

$$t_m{}^\sigma=-\frac{1}{2}R\Omega_m^\sigma+2\Delta^{s\rho\sigma}C_{s\rho m}+2C^{\sigma a\rho}C_{a\rho m}-4C^a{}_{a\rho}C^{(\sigma\rho)}{}_m+2g^{\sigma\rho}C^a{}_{am,\rho}+$$
$$+2\Omega_a^{(\sigma}\Omega_p^{\rho)}C^{ap}{}_{m,\rho}. \qquad (21)$$

Выражение (21) является истинным тензором. Это есть аналог комплекса Меллера—Мицкевича [2, 3, 4].

3. Получим тензор энергии—импульса гравитационного поля, не содержащий вторых производных от матрицы Ламе. Для этого, используя соотношение

$$\Delta_{ab}^a=\frac{1}{\Lambda}(\Lambda\Omega_b^\sigma)_{,\sigma}, \qquad (22)$$

представим (4) в виде

$$\Lambda R=2S^\tau{}_{,\tau}+\Lambda G, \qquad (23)$$

$$S^\tau=\Lambda\Delta_a{}^{\tau a}, \qquad (24)$$

$$G=\Delta_{abc}\Delta^{bac}-\Delta_{ab}{}^a\Delta_c{}^{bc}. \qquad (25)$$

Это разбиение является ковариантным в отличие от подобного разбиения в обычном формализме о.т.о.

Выберем лагранжиан гравитационного поля в виде

$$\tilde{\mathfrak{L}}_0=\frac{1}{2}\Lambda G. \qquad (26)$$

Соответствующий тензор энергии — импульса имеет вид

$$\Lambda \widetilde{t}_m{}^\sigma = -\widetilde{\mathfrak{L}}_0 \Omega^\sigma_m - 2U_a{}^{\mu\sigma} [\widetilde{\mathfrak{L}}_0] C^a{}_{\mu m}, \tag{27}$$

откуда

$$\widetilde{t}_m{}^\sigma = -\frac{1}{2} G\Omega^\sigma_m + 2\Delta^{sp\sigma}\Delta_{spm} + 4C_a{}^{\sigma a}C^p{}_{pm} - 4C_a{}^{pa}C^\sigma{}_{pm}. \tag{28}$$

Выражение (28) также является истинным тензором. Это есть аналог комплекса Эйнштейна.

4. При наличии внешнего поля Q^A в законе сохранения энергии появляется тензор энергии внешнего поля $t^{(Q)}{}_m{}^\sigma$, имеющий вид

$$\Lambda t^{(Q)}{}_m{}^\sigma = \Omega^\rho_m \left(-\delta^\sigma_\rho \mathfrak{L}_{(Q)} - \frac{\partial \mathfrak{L}_{(Q)}}{\partial Q^A_{,\sigma}} Q^A_{,\rho} - 2U_a{}^{\mu\sigma} [\mathfrak{L}_{(Q)}] C^a{}_{\mu\rho} \right). \tag{29}$$

Если поле Q^A есть тензорное поле, то всегда будет предполагаться, что оно задано своими реперными компонентами, а мировой тензор является уже функцией матрицы Ламе (например, для векторного поля $A_\mu = \Omega_{a\mu} A^a$ и т. д.).

В псевдоевклидовом пространстве тензор (29) переходит в обычный канонический тензор энергии поля Q^A.

5. Нелинейность гравитационного поля заключается, в частности, в том, что оно способно порождать само себя при помощи своего тензора энергии. Поэтому нужно ожидать, что уравнение Эйнштейна можно разбить на две части, одна из которых содержит вторые производные от матрицы Ламе, а вторая часть их не содержит и является тензором энергии гравитационного поля. Действительно, используя (23), уравнение (14) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{L}}_0}{\partial \Omega^m_{\sigma,\rho}} - \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{L}}_0}{\partial \Omega^m_\sigma} = -\varkappa \Lambda T^\sigma_m. \tag{30}$$

Отсюда, учитывая выражение для метрического тензора энергии—импульса (15) и то, что $\widetilde{\mathfrak{L}}_0$ и $\mathfrak{L}_{(Q)}$ содержат производные от матрицы Ламе только в антисимметричной комбинации (7), получаем, закон сохранения общей энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Lambda \widetilde{t}_m{}^\sigma + \varkappa \Lambda t^{(Q)}{}_m{}^\sigma) = 0, \tag{31}$$

$$\Lambda \widetilde{t}_m{}^\sigma = -\frac{\partial \widetilde{\mathfrak{L}}_0}{\partial \Omega^m_\sigma}, \tag{32а}$$

$$\Lambda t^{(Q)}{}_m{}^\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{L}_{(Q)}}{\partial \Omega^m_\sigma}. \tag{32б}$$

Используя соотношение

$$\frac{\partial C_{cab}}{\partial \Omega^m_\sigma} - 2\frac{\partial C_{cab}}{\partial \Omega^a_{\mu,\sigma}} C^a{}_{\mu m} = 0, \tag{33}$$

легко показать, что тензоры энергии (32а) и (32б) совпадают соответственно с тензорами (27) и (29). Это является косвенным подтверждением правильности использования для получения законов сохранения в о.т.о. инвариантных свойств плоского касательного реперного пространства.

Отсюда, в частности, также следует, что в то время, как метрический тензор энергии любого поля имеет вид (15) и сохраняется в смысле обращения в нуль ковариантной дивергенции [1], канонический тензор энергии любого поля имеет вид (32) и сохраняется в смысле обращения в нуль обычной дивергенции.

Уравнение Эйнштейна (30) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} U_m{}^{\sigma\rho}[\widetilde{\mathfrak{L}}] = -\Lambda\widetilde{\theta}_m{}^\sigma, \tag{34}$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{L}} = \widetilde{\mathfrak{L}}_0 + \varkappa\mathfrak{L}_{(Q)}, \quad \widetilde{\theta}_m{}^\sigma = \widetilde{t}_m{}^\sigma + \varkappa t^{(Q)}{}_m{}^\sigma, \tag{35}$$

а

$$-U_m{}^{\sigma\rho}[\widetilde{\mathfrak{L}}] = -\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{L}}_0}{\partial\Omega^m_{\sigma,\rho}} - \frac{\partial\mathfrak{L}_{(Q)}}{\partial\Omega^m_{\sigma,\rho}} = \Lambda\Delta_m{}^{\sigma\rho} + 2\Lambda\Delta_a{}^{a[\sigma}\Omega^{\rho]}_m - \frac{\partial\mathfrak{L}_{(Q)}}{\partial\Omega^m_{\sigma,\rho}} \tag{36}$$

есть суперпотенциал суммарной энергии гравитационного поля и внешнего поля Q^A.

Уравнение (34) описывает порождение гравитационного поля самим собой.

6. Полезно найти суперпотенциал для тензора (20). Используя общий метод, основанный на теореме Нётер [5, 2, 4, 15], будем считать при варьировании интеграла действия (10) параметры преобразования (18) произвольными функциями координат $\omega^m(x)$. Тогда вместо (19) имеем

$$\delta\Omega^a_\mu = 2C^a{}_{\mu m}\omega^m - \delta^a_m\omega^m{}_{,\mu}. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (10) и полагая ω^m, $\omega^m{}_{,\sigma}$, $\omega^m{}_{,\sigma\rho}$, $\omega^m{}_{,\sigma\rho\mu}$ произвольными и независимыми функциями координат, получаем соотношения

$$(\Lambda\theta_m{}^\sigma)_{,\sigma} = 0, \tag{38}$$

$$\Lambda\theta_m{}^\sigma + (U_m{}^{\sigma\rho}[\mathfrak{L}] - 2W_a{}^{\mu\rho\sigma}[\mathfrak{L}]\,C^a{}_{\mu m})_{,\rho} = 0, \tag{39}$$

$$U_m{}^{(\sigma\rho)}[\mathfrak{L}] - 2W_a{}^{\mu(\sigma\rho)}[\mathfrak{L}]\,C^a{}_{\mu m} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_m{}^{(\sigma\rho)\mu}[\mathfrak{L}] = 0, \tag{40}$$

$$W_m{}^{(\sigma\rho\mu)}[\mathfrak{L}] = 0, \tag{41}$$

где

$$\theta_m{}^\sigma = t_m{}^\sigma + \varkappa t^{(Q)}{}_m{}^\sigma. \tag{42}$$

Из уравнений (38)—(41) получаем

$$\Lambda\theta_m{}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(-U_m{}^{[\sigma\rho]}[\mathfrak{L}] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_m{}^{(\sigma\rho)\mu}[\mathfrak{L}]\right). \tag{43}$$

Учитывая (23) и (34), легко получить связь между тензорами $t_m{}^\sigma$ и $\widetilde{t}_m{}^\sigma$ в виде

$$\Lambda t_m{}^\sigma = \Lambda\widetilde{t}_m{}^\sigma + \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(-U_m{}^{[\sigma\rho]}[S^\tau{}_{,\tau}] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_m{}^{(\sigma\rho)\mu}[S^\tau{}_{,\tau}]\right). \tag{44}$$

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$S^\tau{}_{,\tau} = \frac{\partial S^\tau}{\partial\Omega^a_\mu}\Omega^a{}_{\mu,\tau} + \frac{\partial S^\tau}{\partial\Omega^a_{\mu,\rho}}\Omega^a_{\mu,\rho\tau}, \tag{45}$$

получаем полезные выражения

$$U_m{}^{\sigma\rho}[S^\tau{}_{,\tau}] = \frac{\partial S^\rho}{\partial \Omega^m_\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial S^\mu}{\partial \Omega^m_{\sigma,\rho}} - \frac{\partial S^\rho}{\partial \Omega^m_{\sigma,\mu}}\right), \tag{46}$$

$$W_m{}^{\sigma\rho\mu}[S^\tau{}_{,\tau}] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^\mu}{\partial \Omega^m_{\sigma,\rho}} + \frac{\partial S^\rho}{\partial \Omega^m_{\sigma,\mu}}\right), \tag{47}$$

используя которые и учитывая (24), представим (44) в виде

$$\Lambda t_m{}^\sigma = \Lambda \tilde{t}_m{}^\sigma + \frac{\partial}{\partial x^\rho} Q_m{}^{[\sigma\rho]}, \tag{48}$$

где

$$Q_m{}^{[\sigma\rho]} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^\sigma}{\partial \Omega^m_\rho} - \frac{\partial S^\rho}{\partial \Omega^m_\sigma}\right) = 2\Lambda C^{[\sigma\rho]}{}_m - 4\Lambda C_a{}^{a[\sigma}\Omega^{\rho]}_m. \tag{49}$$

Учитывая (34) и (36), окончательно получаем

$$\Lambda \theta_m{}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\rho} P_m{}^{\sigma\rho}, \tag{50}$$

где

$$P_m{}^{\sigma\rho} = \Lambda C_m{}^{\sigma\rho} - x\frac{\partial \mathfrak{L}_{(Q)}}{\partial \Omega^m_{\sigma,\rho}}. \tag{51}$$

Соотношения (38)—(41) являются следствием инвариантности лагранжиана гравитационного поля относительно локализованного преобразования (18) и по существу являются требованиями, которым лагранжиан гравитационного поля необходимо должен удовлетворять. Существует прямая связь между уравнениями (38)—(41) и принципом локальной инвариантности [15], и можно утверждать, что существование суперпотенциала является следствием справедливости этого принципа. Поскольку принцип локальной инвариантности каждому закону сохранения (связанному с непрерывной группой) сопоставляет определенное компенсирующее поле, то суперпотенциал должен существовать для любого закона сохранения.

7. Интегральная величина энергии—импульса

$$P_m = \frac{1}{\varkappa c}\int (dx^3)_\sigma \Lambda\theta_m{}^\sigma = \frac{1}{\varkappa c}\int \Lambda\theta_m{}^0\, dV \tag{52}$$

обладает только реперными компонентами и, следовательно, является скаляром по отношению к координатным преобразованиям. Это есть вектор по отношению к ортогональным преобразованиям касательного пространства. Если гравитационное поле и поле Q^A на пространственной бесконечности исчезают достаточно быстро, то величина P_m сохраняется. Ввиду наличия суперпотенциала энергия и импульс определяются значениями гравитационного поля и внешнего поля Q^A на границе области интегрирования:

$$P_m = \frac{1}{\varkappa c}\oint (dx^2)_{\sigma\rho} P_m{}^{\sigma\rho}. \tag{53}$$

8. Предположим, что уравнения некоторой теории, описываемой в псевдоевклидовом пространстве, переписаны в криволинейных координатах. В этом случае при получении в этой теории при помощи теоремы Нётер канонического тензора энергии используются инвариантные свойства не криволинейного пространства, а первоначального псевдоевклидова пространства — времени, которое для данного криволинейного пространства (в случае отсутствия гравитации) является пространством ортогональных реперов.

Рассмотрим случай наличия гравитационного поля. Если теория формулируется в псевдоевклидовом пространстве и тем самым не учитывает гравитационные эффекты, то она справедлива лишь в достаточно малой окрестности пространства-времени. В этой окрестности криволинейное пространство совпадает со своим касательным реперным пространством. Поэтому то псевдоевклидово пространство, в котором описывается данная теория, является по отношению к о.т.о. касательным реперным пространством. Когда хотят учесть эффекты о.т.о., свертывают все векторные соотношения теории с матрицей Ламе с заменой обычных производных на ковариантные, тем самым переводя векторные соотношения из плоского пространства в криволинейное. Спинорные соотношения первоначально необходимо связать с векторами при помощи матриц Дирака γ^a, играющих для связи спиноров и векторов ту же роль, какую играет матрица Ламе для связи тензоров, являющихся представлениями ортогональной группы касательного пространства, и мировых тензоров, являющихся представлениями аффиной группы криволинейного пространства. Поскольку спиноры являются представлениями только ортогональной группы, но не аффиной, то для описания спиноров в о.т.о. использование реперного пространства наряду с криволинейным является необходимостью [6, 7, 8, 1].

Используя для получения тензора энергии в теории, не учитывающей гравитационные эффекты, инвариантные свойства псевдоевклидова пространства, мы тем самым и в этом случае используем (по отношению к возможному учету гравитации) инвариантные свойства пространства ортогональных реперов. Поэтому вполне естественно использование реперного пространства и в случае, когда ищется тензор энергии самого гравитационного поля. Это является гораздо более естественным с точки зрения аналогии с остальными полями, чем любые другие методы.

9. Инвариантные свойства касательного пространства использовались также Ю. А. Рыловым для получения двухточечного тензора энергии гравитационного поля [9, 10, 11]. Матрица Ламе для построения тензора энергии гравитационного поля использовалась Мёллером [12] и Плебаньским и Пеллегрини. Тензор Мёллера обладает обоими координатными индексами и поэтому не может быть истинным тензором. Тензор Плебаньского и Пеллегрини обладает одним индексом координатным, а другим реперным и содержит только первые производные от матрицы Ламе. Поэтому тензор Плебаньского и Пеллегрини может отличаться от тензора (28) только величиной, дивергенция которой тождественно равна нулю. Тензор Плебаньского и Пеллегрини получен не из соображений теоремы Нётер, поэтому необходимо отметить, что сохраняющихся в смысле обычной дивергенции истинных тензоров можно в реперном формализме получить не меньше, чем комплексов энергии получено в обычном формализме, но отождествить с энергией гравитационного поля можно только тот тензор, который получен на основании теоремы Нётер, поскольку энергия и импульс отражают определенные свойства симметрии лагранжиана гравитационного поля.

Одновременно с автором тензор энергии при помощи матрицы Ламе был построен В. И. Родичевым. Однако при этом Родичевым существенно использовалось некоторое дополнительное условие, накладываемое на матрицу Ламе, и поэтому тензор, предложенный Родичевым, сохраняется только при определенном выборе матрицы Ламе. Тензоры Мёллера, Плебаньского—Пеллегрини и Родичева содержат только первые производные от матрицы Ламе и являются реперными аналогами тензора Эйнштейна.

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить проф. Д. Иваненко и В. И. Родичева за ценные дискуссии.

Локальные преобразования Лоренца

Полученные тензоры $\widetilde{t}_m{}^\sigma$ и $t_m{}^\sigma$ являются ковариантными относительно координатных преобразований и относительно ортогональных преобразований матрицы Ламе, не зависящих от координат. Выясним ковариантные свойства полученных законов сохранения относительно так называемых локальных преобразований Лоренца, т. е. относительно ортогональных преобразований матрицы Ламе, параметры которых являются произвольными функциями координат.

Легко видеть, что закон сохранения, использующий тензор $t_m{}^\sigma$, является ковариантным относительно локальных преобразований Лоренца. Действительно, поскольку тензор кривизны Римана является ковариантным относительно этих преобразований [15], то лагранжиан (4), уравнения Эйнштейна, интеграл действия и его вариация инвариантны относительно этих преобразований. Первый член правой части соотношения (10) исчезает в силу уравнения Эйнштейна, поэтому второй член, имеющий вид

$$\omega^m(x)\,(\Lambda\theta_m{}^\sigma),\,\sigma$$

инвариантен относительно локальных преобразований Лоренца, что и требовалось доказать. Что же касается тензора $\widetilde{t}_m{}^\sigma$, то хотя лагранжиан (26) и не является инвариантным относительно локальных преобразований Лоренца, но вариация его будет инвариантна и поэтому все предыдущие рассуждения останутся справедливыми. Также легко непосредственно убедиться, что закон сохранения (31) является прямым следствием соотношений (6), (7), (25) и (30), которые справедливы для любого представления метрического тензора $g_{\mu\nu}=\Omega^a_\mu\,\Omega_{a\nu}$ при помощи матрицы Ламе.

Однако сами тензоры преобразуются при локальных преобразованиях Лоренца нетензорным образом, что является непосредственным следствием нековариантности символов вращения Риччи (6) относительно этих преобразований [14]. Поэтому остается открытой возможность (до сих пор, однако, не доказанная) обратить в нуль тензор (7), а с ним и тензоры (21) и (28) в заданной точке пространства-времени локальным преобразованием Лоренца. Однако физический смысл подобного преобразования до сих пор окончательно еще не выяснен.

Отметим, что заранее очевидна невозможность построения тензора энергии гравитационного поля, обладающего реперными компонентами и преобразующегося при локальных преобразованиях Лоренца тензорным образом, так как закон сохранения должен быть ковариантным относительно этого преобразования, в то время как операция обычного дифференцирования тензора с реперными компонентами не является ковариантной. Поэтому необходимо сделать выбор между комплексом энергии, нековариантным относительно координатных преобразований, и тензором энергии, нековариантным относительно локальных преобразований Лоренца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румер Ю. Б. Исследования по 5—оптике. Гостехиздат, М., 1956, гл. 5.
2. Мицкевич Н. В. Ann. d. Phys., **I**, 319, 1958.
3. Möller C. Ann. of Phys., **4**, 347, 1958.
4. Möller C. Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.—fys. Medd., **31**, No. 14, 1959. Перевод в сб.: «Новейшее развитие гравитации». ИЛ, М., 1961.
5. Паули В. Теория относительности. Гостехиздат, М., 1947, § 23.
6. Фок В. А., Иваненко Д. Phys. Zs., **30**, 648, 1929.
7. Фок В. А., Иваненко Д. Compt. Rend., **188**, 1470, 1929.
8. Фок В. А. Zs. f. Phys., **57**, 216, 1929.
9. Рылов Ю. А. «Изв. вузов». Математика, **3**, 131, 1962.
10. Рылов Ю. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 70, 1962.
11. Рылов Ю. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 45, 1962.
12. Möller C. Ann. of Phys., **12**, 118, 1961.
13. Бродский А., Иваненко Д., Соколик Г. ЖЭТФ, **41**, 1307, 1961.
14. Соколик Г. А. ДАН СССР, **148**, № 3, 1963.
15. Фролов Б. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 1963.

Поступила в редакцию
11. 6 1963 г.

Кафедра
теоретической физики