ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1964

А. А. АБДУРАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ЯВЛЕНИЯ ХОЛЛА В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Введение

Известно, что поле Холла $\vec{E}_H$ в ферромагнетиках связано с магнитной индукцией $\vec{B}$, намагниченностью $\vec{I}$ и плотностью тока $\vec{j}$ следующим соотношением:

$$\vec{E}_H = [R_0\vec{B} + R_S 4\pi\vec{I}, \vec{j}],$$

где параметры R_0 и R_S носят название постоянных Холла.

Появление в ферромагнетиках части E_H, пропорциональной намагниченности, и зависимость этой части от температуры получили объяснение в работах [1] и [2]. В [1] рассматривался случай, когда рассеяние электронов в основном происходит на примесях, т. е. случай, соответствующий относительно низким температурам. Кроме того, было дано объяснение наблюдаемой в бинарных сплавах связи между R_S и остаточным электрическим сопротивлением ρ_0. В работе [2] рассматривался случай высоких температур, когда электроны в основном рассеиваются на фононах. В этом случае R_S связано с удельным электрическим сопротивлением ρ соотношением $R_S(T) \sim [\rho(T)]^2$. Опыт [3] показывает, что между R_S и ρ существует связь:

$$R_S(T) = a\rho(T) + b[\rho(T)]^2$$

и при высоких температурах второй член больше первого, чем подтверждает справедливость [2].

Существование части R_S, пропорциональной ρ, показывает, что при расчете поля Холла в области средних и высоких температур необходимо учитывать оба механизма рассеяния электронов.

В настоящей работе произведен расчет поля Холла в общем случае, когда принимается во внимание рассеяние электронов на примесях и на фононах.

Как в [1] и [2], расчет постоянной Холла ферромагнитных металлов произведен в рамках классической зонной теории и в изотропном приближении. В связи с тем что для металла данное приближение является весьма грубым, по результатам нашей работы можно сделать лишь качественные выводы, например о характере температурной зависимости постоянной Холла ферромагнитных металлов (оценив порядок ее величины зависимости), о связи ее с удельным электрическим сопротивлением.

Вывод кинетического уравнения

Напишем исходный гамильтониан $\widetilde{H}_T$ задачи в представлении вторичного квантования в виде

$$\widetilde{H}_T = \widetilde{H} + \widetilde{H}' + \widetilde{H}_{E'}, \tag{1}$$

где

$$\widetilde{H} = \sum_l \varepsilon_l a_l^+ a_l + \sum_q \varepsilon_q b_q^+ b_q + \sum_l (\vec{q}\vec{\nabla}U)\, p_{all'} a_l^+ a_l',$$

$$\widetilde{H}' = \sum_{ll'q} (Q_{ll'q} a_l^+ a_{l'} b_q + Q^*_{ll'q} a_{l'}^+ a_l b_q^+) + \sum_l V(\vec{r} - \vec{R}_{\vec{n}})\, a_l^+ a_l',$$

$$\widetilde{H}_{E'} = eE'_\alpha \sum_{ll'} r^\alpha_{ll'} a_l^+ a_{l'}. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon_l = \varepsilon_{nk}$ — энергия электрона в полосе n с волновым вектором $\vec{k}$, ε_q — энергия фонона с волновым вектором $\vec{q}$.

В гамильтониан $\widetilde{H}$ кроме энергий электрона и фонона входит и спин-орбитальное взаимодействие

$$\widetilde{H}_{S,0} = \sum_l (\vec{q}\vec{\nabla}U)\, P_{\alpha ll'} a_l^+ a_{l'},$$

где $\vec{q} \equiv -\left(\frac{1}{4m^2c^2}\right)\frac{\vec{I}}{I_S}$, U — периодический потенциал, m и p_α — масса и импульс электрона соответственно, $\frac{I}{I_S}$ — средняя относительная намагниченность. Величина H' описывает взаимодействия электрона с фононами и с примесными центрами

$$Q_{ll'q} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{2M\varepsilon_q}}\, q_i C_{ll'} \delta_{\vec{k}-\vec{k}',q}$$

и

$$V_{(\vec{k},\vec{k}')} = Ne^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{R}_n} \int U^*_{\vec{n}'}(\vec{r})\, V(\vec{r} - \vec{R}_n)\, U_{\vec{k}}(\vec{r})\, d\vec{r}_0,$$

где N — число ионов в основной области кристалла, M — масса ионов, C_{ll}' — постоянная Блоха, $V(r)$ — энергия взаимодействия электрона с одним отдельным примесным центром, $\vec{R}_{\vec{n}}$ — радиус — вектор n-го примесного центра, $\widetilde{H}_E'$ — оператор энергии взаимодействия с внешним электрическим полем и E_α и r^α — компоненты внешнего электрического поля и координаты соответственно. Наконец, a_l, b_q — операторы вторичного квантования электронов и фононов. Мы воспользуемся представлением l, в котором диагонален оператор $\widetilde{H}$, и системой единиц, в которой $\hbar = 1$.

Введем матрицу плотности $\rho_T = ke^{-\beta \widetilde{H}_T}\left(\beta = \frac{1}{kT}\right)$, изменение со временем которой определяется уравнением

$$i\left(\frac{\partial \widetilde{\rho}_T}{\partial t}\right) = [\widetilde{H}_T, \widetilde{\rho}_T] = \widetilde{H}_T\widetilde{\rho}_T - \widetilde{\rho}_T\widetilde{H}_T \tag{3}$$

и условиями, что при адиабатическом включении поля

$$E' = Ee^{st},\ \widetilde{H}_{E'} = \widetilde{H}_E e^{st}.$$

Матрицу плотности можно представить в виде

$$\widetilde{\rho}_T = \widetilde{\rho} + \widetilde{\rho}_E,\quad \widetilde{\rho}_E = \widetilde{f} e^{st}, \tag{4}$$

где $\widetilde{\rho}$ — равновесная матрица плотности, $\widetilde{\rho}_E$ линейно зависит от E_α, $\widetilde{f}$ — поправка к матрице плотности при $t=0$, удовлетворяющая уравнению

$$isf = [\widetilde{H}_E, \widetilde{\rho}] + [\widetilde{H}, \widetilde{f}] + [\widetilde{H}', \widetilde{f}]. \tag{5}$$

Для матричных элементов операторов, входящих в (5), получаются уравнения, частными случаями которых являются соответствующие уравнения в [1] и [2]. Уравнения имеют следующий вид:

$$(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - is) f_{l'l} = eE_\alpha C^\alpha_{l'l} + \sum_{l_1} (f_{l'l_1} V_{l_1 l} - V_{l'l_1} f_{l_1 l}) +$$

$$+ \sum_{l_1 q} [(Q_{l_1 lq} f_{l'l_1 q} + \overset{*}{Q}_{ll_1 q} f^{+}_{l'l_1 q}) - (Q_{l'l_1 q} f_{l_1 lq} Q_{l_1 l' q} f^{+}_{l_1 lq})], \tag{6}$$

где

$$C^\alpha_{l'l} = [\rho, r^\alpha]_{l'l},\ f_{l'lq} = Sp\{\widetilde{f} a_l^+ a_{l'} bq\}, \tag{7}$$

$$f^{+}_{l'l_q} = Sp\{\widetilde{f} a_l^+ a_{l'} b_q^+\}$$

и

$$(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) f_{l'lq} = eE_\alpha C^\alpha_{l'lq} + \sum_{l'} (f_{l'l_1 q} V_{l_1 l} - V_{l'l_1} f_{l_1 l^q}) +$$

$$+ \sum_{l_1 q_1} [(Q_{l_1 lq_1} f_{l'l_1} \rho_{\overline{qq_1}} + \overset{*}{Q}_{ll_1 q_1} f_{l'l} \rho_{qq_1}) - (Q_{l'l_1 q} f_{l_1 l} \rho_{\overline{qq_1}} + \overset{*}{Q}_{l_1 l' q_1} f_{l_1 l} \rho_{qq_1})] -$$

$$- \sum_{l_1 l'_1} \overset{*}{Q}_{l'_1 l_1 q} [f_{l'l} \rho_{l'_1 l_1} + \rho_{l'l} f_{l'_1 l_1} + f_{l'_1 l} (\delta_{l'l_1} - \rho_{l'l_1}) - \rho_{l'_1 l} f_{l'l_1}], \tag{8}$$

$$(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q - is) f^{+}_{l'lq} = eE_\alpha C^{+\alpha}_{l'lq} + \sum_{l_1} (f^{+}_{l'l_1 q} V'_{l_1 l} - V'_{l'_1 l} f^{+}_{l_1 lq}) +$$

$$+ \sum_{l_1 q} [(Q_{l_1 lq_1} f_{l'q_1} (\rho_{q_1 q} + \delta_{qq_1}) + \overset{*}{Q}_{ll_1 q_1} f_{l'l_1} \rho^{+}_{qq_1}) - (Q_{l'l_1 q_1} f_{l_1 l} (\rho_{q_1 q} +$$

$$+ \delta_{qq_1}) + \overset{*}{Q}_{l_1 l' q} f_{l_1 l} \rho^{+}_{qq_1})] - \sum_{l_1 l'_1} Q_{l_1 l'_1 q} [f_{l'l'_1} \rho_{l'_1 l} + \rho_{l'l} f_{l'_1 l_1} + f_{l'_1 l} (\delta_{l'l_1} - \rho_{l'l_1}) -$$

$$- \rho_{l'_1 l} f_{l'l_1}]. \tag{9}$$

Здесь

$$C^\alpha_{l'lq} = \sum_{l_1} (\rho_{l'l_1 q} r_{l_1 l} - r_{l_1 l} - r^\alpha_{l'l_1} \rho_{l_1 lq}),$$

$$\rho_{ll'q} = Sp\{\widetilde{\rho} a^+_{l'} a_l b_q\},\quad \widetilde{\rho}_{\overline{qq_1}} = Sp\{\widetilde{\rho} b_{q_1} b_q\}, \tag{10}$$

$$\rho^{+}_{qq_1} = Sp\{\widetilde{\rho} b^+_{q_1} b^+_q\},\quad \rho_{qq_1} = Sp\{\widetilde{\rho} b^+_{q_1} b_q\}.$$

Пользуясь теорией возмущения, найдем решение уравнения (6) в виде ряда по степеням малого параметра λ (λ^{-2}, λ^{-1}, λ^0 и т. д.), т. е. по степеням потенциалов рассеяния Q и V. При этом разложение f_e начинается с члена $f_l^{(-2)}(\sim\lambda^{-2})$, $f_{ll'}$ — с члена $f_{ll'}^{(-1)}(\sim\lambda^{-1})$. Подставляя $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$ в уравнение (6), получаем кинетическое уравнение первого приближения $(f_l^{(-2)})$. Подставив решение кинетического уравнения первого приближения в уравнение (6) и решая его относительно $f_{ll'}$, найдем первый поправочный член к кинетическому уравнению. Продолжая эту процедуру бесконечное число раз, получаем $f_{ll'}$ в виде ряда по степеням λ.

В общем случае, когда учитывается рассеяние электронов на примесях и на фононах, для $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$ получаются выражения, совпадающие с соответствующими выражениями работы [2]. Присутствие примесей на $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$ не влияет. Подставляя выражения для $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$ в (6) при $l = l'$ и устремляя $s \to 0$, получаем

$$eE_\alpha^{(0)}C_l^{(0)\alpha} + 2\pi i\sum_{l_1q}\{|Q_{ll_1q}|^2\,\delta(\varepsilon_{l_1}-\varepsilon_l+\varepsilon_q)\times$$
$$\times[\rho_q^0(f_{l_1}^{(-2)}-f_l^{(-2)})-f_l^{(-2)}(1-\rho_{l_1}^0)+\rho_l^0 f_{l_1}^{(-2)}]+$$
$$+|Q_{l_1lq}|^2\,\delta(\varepsilon_{l_1}-\varepsilon_l-\varepsilon_q)[(\rho_q+1)(f_{l_1}^{(-2)}-f_l^{(-2)})+$$
$$+f_l^{(-2)}(1-\rho_{l_1}^0)-\rho_l^0 f_{l_1}^{(-2)}]\}+2\pi i\sum|V_{ll_1}|^2(f_{l_1}^{(-2)}-f_l^{(-2)})\,\delta(\varepsilon_{l_1}-\varepsilon_l)=0. \quad (11)$$

Это уравнение совпадает с обычным кинетическим уравнением, причем первая сумма соответствует изменению функции распределения из-за электрон-фононного взаимодействия, а вторая — изменению функции распределения вследствие рассеяния электронов на примесях [4].

Решением уравнения (11) является

$$f_l^{(-2)} = -\tau eE_\alpha\frac{\partial\rho_{nk}}{\partial\varepsilon_{nk}}V_\alpha^{nk}, \quad (12)$$

где $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau_\Phi}+\frac{1}{\tau_{np}}$ — обратная величина времени релаксации (τ_Φ, τ_{np} — времена релаксации при рассеянии электронов на фононах и примесях соответственно). Уравнение (11) не содержит линейных членов по спин-орбитальному взаимодействию. Поэтому для решения нашей задачи необходимо рассмотреть разложения $f_{ll'}$, $f_{ll'q}$ более высоких порядков.

Вычисление спонтанного эффекта Холла

Для получения кинетического уравнения с членами более высокого порядка нам нужно разложить функции $\rho_{qq'}$, $\rho_{qq'}^-$, $\rho_{ll'q}$, $\rho_{ll'q}^+$ по степеням потенциалов рассеяния Q и V. Эти разложения можно выполнить по методу, описанному в работах [1] и [2], только вместо одного из потенциалов рассеяния V или Q брать оба эти потенциала. Выражения для $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$ в общем случае совпадают с соответствующими выражениями для частного случая, когда электроны рассеиваются только на фононах. Поэтому при последующих расчетах $f_l^{(0)}$, $f_{ll'}^{(-1)}$, $f_{ll'q}^{(0)}$ мы будем пользоваться формулами для $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$, полученными в работе [2]. После подстановки выражений для $f_{ll'q}^{(-1)}$ и $f_{ll'q}^{(-1)+}$, взятых из работы [2] в (6), получим

$$f^{(0)}_{l'l} = (\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - is)^{-1}\left\{ eE_\alpha C^{(0)\alpha}_{l'l} - \sum_{l_1 q}\left[Q_{l'l_q}Q^*_{ll_1q}\frac{\varphi^{(-2)}_{l_1lq}}{\Delta^+_{l_1l_q}} - \right.\right.$$

$$\left. - Q^*_{l_1l'q}Q_{l_1lq}\frac{\varphi^{(-2)}_{ll_1q}}{\Delta^-_{l_1lq}} - Q_{l_1lq}Q^*_{l_1l'q}\frac{\varphi^{(-2)}_{l'l_1q}}{\Delta^+_{l'l_1q}} + Q^*_{ll_1q}Q_{l'lq}\frac{\varphi^{(-2)}_{l_1l'q}}{\Delta^-_{l'l_1q}}\right] +$$

$$\left. + \sum_{\substack{l_1 \\ (l_1 \neq l_1 l')}} V_{l'l_1}V_{l_1l}\left(\frac{f^{(-2)}_{l'} - f^{(-2)}_{l_1}}{\varepsilon_{l'} - \varepsilon_{l_1} - is} - \frac{f^{(-2)}_{l_1} - f^{(-2)}_{l}}{\varepsilon_{l_1} - \varepsilon_l - is}\right)\right\}^*, \qquad (13)$$

где

$$\Delta^{\pm}_{l_1lq} = \varepsilon_{l_1} - \varepsilon_l \pm \varepsilon_q - is, \qquad (14)$$

$$\varphi^{(-2)}_{l_1l_q} = [\rho^0_q(f^{(-2)}_{l_1} - f^{(-2)}_{l}) + f^{(-2)}_{l}\rho^0_{l_1} + f^{(-2)}_{l_1}\rho^0_l - f^{(-2)}_l]. \qquad (15)$$

Подставляя выражения для $f^{(-1)}_{ll'q}$ и $f^{(-1)+}_{ll'q}$ в (8), получим для $f^{(0)}_{ll'q}$

$$f^{(0)}_{l'lq} = (\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q - is)^{-1}\left\{ Q^*_{ll'q}[\rho^0_q(f^{(-1)}_{l'} - f^{(-1)}_l) + f^{(-1)}_l\rho^0_{l'} + f^{(-1)}_{l'}\rho^0_l - f^{(-1)}_l] + \right.$$

$$+ \sum_{l_1}{}'\left[\frac{V_{l_1l}Q^*_{l_1l'q}}{\Delta^+_{l'l_1q}}(\rho^0_q(f^{(-2)}_{l'} - f^{(-2)}_{l_1}) - f^{(-2)}_{l_1}(1 - \rho^0_{l'}) + \rho^0_{l_1}f^{(-2)}_{l'}) - \right.$$

$$\left. - \frac{V_{l'l_1}Q^*_{ll_1q}}{\Delta^+_{l_1lq}}(\rho^0_q(f^{(-2)}_{l_1} - f^{(-2)}_l) - f^{(-2)}_l(1 - \rho^0_{l_1}) + \rho^0_l f^{(-2)}_{l_1})\right] +$$

$$\left. + \sum_{l_1}{}'[Q^*_{ll_1q}f^{(-1)}_{l'l_1}(\rho^0_q + \rho^0_l) - Q^*_{l_1l'q}f^{(-1)}_{l_1l}\rho^0_q - Q^*_{l'l_1q}f^{(-1)}_{l_1l}(1 - \rho^0_{l'})]\right\}. \qquad (16)$$

Для получения диагональных матричных элементов $f^{(0)}_{ll}$ подставим (16) и аналогичное выражение для $f^{(0)+}_{l'lq}$ в уравнение (6) с учетом разложения (15) работы [2]. При этом ограничиваемся рассмотрением рассеяния электронов в пределах одной зоны ($n = n'$ во всех индексах $l = nk$ и $l' = n'k'$). Используя закон сохранения импульса $\vec{k}' = \vec{k} \pm \vec{q}$ после некоторых преобразований [4], имеем при $s \to 0$

$$\sum_{l'q}[|Q_{ll'q}|^2\varphi^{(-1)}_{l'lq}\delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) - |Q_{l'lq}|^2\varphi^{(-1)}_{ll'q}\delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q)] +$$

$$+ 2\pi\sum_{l'l_1q}{}'\left\{\left[\frac{Q_{ll_1q}V_{l_1l'}Q^*_{l'lq}}{d^-_{l_1l'}} + \frac{Q_{ll'q}V_{l'l_1}Q^*_{l_1lq}}{d^-_{l'l_1}}\right]\varphi^{(-2)}_{l'lq}\delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{Q_{l'l_1q}V_{l_1l}Q^*_{ll'q}}{d^-_{ll_1}} + \frac{Q_{l'lq}V_{ll_1}Q^*_{l_1l'q}}{d^-_{l_1l}}\right]\varphi^{(-2)}_{ll'q}\delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q)\right\} +$$

$$+ \sum_{l'}[(W^{(1)}_{l'l}f^{(-2)}_{l'} - W^{(1)}_{ll'}f^{(-2)}_l) + (W^{(0)}_{l'l}f^{(-1)}_{l'} - W^{(0)}_{ll'}f^{(-2)}_l)] = 0, \qquad (17)$$

---

* Здесь надо учитывать формулу (2,2) работы [1]:

$$f^{(-1)}_{l'l} = \frac{f^{(-2)}_{l'} - f^{(-2)}_l}{\omega_{l'l} - is}V_{l'l},$$

где обозначения $W_{ll'}^{(1)}$, $W_{ll'}^{(0)}$ и $d_{ll_1}^{\pm}$ совпадают с соответствующими обозначениями работы [1], а именно:

$$W_{ll'}^{(0)} = 2\pi N \delta(\omega_{ll'}) |V_{ll'}|^2,$$

$$W_{ll'}^{(1)} = 2\pi N \delta(\omega_{ll'}) \sum_{l_1}' \left(\frac{V_{ll_1} V_{l_1 l'} V_{l'l}}{d_{ll_1}^{+}} + \frac{V_{ll'} V_{l'l_1} V_{l_1 l}}{d_{ll_1}^{-}} \right), \tag{17'}$$

$$d_{ll_1}^{\pm} = (\varepsilon_l - \varepsilon_{l_1} \pm is) = \omega_{ll_1} \pm is.$$

После некоторых преобразований получаем

$$\sum_{l'q} [\,|Q_{ll'q}|^2 \varphi_{l'lq}^{(-1)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) - |Q_{l'lq}|^2 \varphi_{ll'q}^{(-1)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q) +$$

$$+ L_{ll'}^{('')} \varphi_{l'l_q}^{(-2)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) - L_{l'l}^{('')} \varphi_{ll'q}^{(-2)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q)] +$$

$$+ \sum_{l_1} [(W_{l'l}^{('')} f_{l'}^{(-2)} - W_{ll'}^{('')} f_l^{(-2)}) + (W_{l'l}^{(0)} f_{l'}^{(-1)} - W_{ll'}^{(0)} f_l^{(-1)})] = 0. \tag{18}$$

десь

$$L_{ll'}^{('')} = 4\pi^2 i \sum_{l_1} \delta(\omega_{l_1 l'}) (Q_{ll_1 q}^{(1)} V_{l'l_1}^{(0)} Q_{l'lq}^{*(0)} + cyclic),$$

$$W_{l'l}^{('')} = 4\pi^2 i N \delta(\omega_{l'l}) \sum_{l_1} \delta(\omega_{l'l_1}) (V_{l'l}^{(1)} V_{ll_1}^{(0)} V_{l_1 l'}^{0} + cyclic),$$

где $V_{ll'}^{(1)}$, $Q_{ll'q}^{(1)}$ и $V_{ll'}^{(0)}$, $Q_{ll'q}^{(0)}$ — соответственно части потенциалов рассеяния, зависящие и не зависящие от спин-орбитального взаимодействия. В уравнении (18) мы оставили кроме членов с $f_l^{(-1)}$ лишь линейные по спин-орбитальному взаимодействию члены. Следовательно, в уравнении (18) и далее $f_l^{(-1)}$ представляет добавку к $f_l^{(-1)}$ за счет спин-орбитального взаимодействия. Принимая для $V_{ll'}$ предположения, оговоренные в работе [1], пользуясь разложением $\varphi_{ll'}$ по формулам (4,3) и (с, 7) работы [1] и принимая во внимание формулы (12) и (17'), получим

$$\sum_{l'} W_{l'l}^{('')} (f_{l'}^{(-2)} - f_l^{(-2)}) =$$

$$= \frac{in\bar{V}^3}{3} \tau \left[\frac{(2m^*)^3 \varepsilon_l^2}{4\pi^2} \right] k_\nu \rho_l' e E_\alpha \left(\frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\nu} - \frac{\partial I_\nu^l}{\partial k_\alpha} \right), \tag{19}$$

где $\bar{V} = \int V(r)\,dr$, n — число рассеивающих центров, m^* — эффективная масса электрона, I_α^l — диагональный матричный элемент, входящий в формулу для матричного элемента координаты $r_{ll'}^\alpha$ (см. [2], [5]), $\rho_l' = \frac{\partial \rho_l}{\partial \varepsilon_l}$

$$r_{ll'}^\alpha = i\delta_{ll'} \frac{\partial}{\partial k_\alpha'} + i I_\alpha^{ll'} \delta_{kk'}, \tag{20}$$

$$I_\alpha^{ll'} = \frac{1}{\omega_c} \int U_{nk}^*(r) \frac{\partial}{\partial k_\alpha} U_{n'k'}(r)\,dr\,\delta_{kk'} \tag{21}$$

(ω_c — объем элементарной ячейки). Учитывая, что

$$\tau_{np}^{-1} = n\bar{V}^2 (2m^*)^{3/2} \varepsilon_l^{1/2} / 2\pi, \tag{22}$$

можем переписать формулу (19) в следующем виде:

$$\sum_{l'} W_{l'l}^{('')} (f_{l'}^{(-2)} - f_l^{(-2)}) = \frac{i\varepsilon_l}{3nV_{np}^2} k_\nu \rho_l' eE_\alpha \left(\frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\nu} - \frac{\partial I_\nu^l}{\partial k_\alpha} \right). \qquad (19')$$

Далее, предполагая, что $Q_{ll'q}$ можно разложить по степеням $(k_\mu - k'_\mu)$ так же, как и $V_{ll'}$, и пользуясь формулами, аналогичными формулам (4,3) и (с,7) работы [1], можем представить $L_{ll'}^{('')}$ в следующем виде:

$$L_{ll'}^{('')} = 4\pi^2 i \sum_{l'} \delta(\omega_{l'l_1}) \Big\{ Q_{kk_1q} V_{k_1k'} Q_{k'kq}^* \times$$

$$\times \delta_{n_1n'} \delta_{n'n} \left[(k_{1\mu} - k_\mu) I_\mu^{nn_1}(k) + \frac{1}{2} (k_{1\nu} - k_\nu) I_{\mu(\nu)}^{nn_1} + \ldots \right] + cyclic \Big\}. \qquad (23)$$

Обозначения здесь те же, что и в работе [1]. Принимая во внимание, что в нашем приближении $Q_{ll'q} Q_{l'lq}^* \approx |Q_{ll'q}|^2$, и производя преобразования, аналогичные выполненным в (19), получим

$$L_{ll'}^{('')} = \frac{i\pi^2 \bar{V}}{(2\pi)^2 \Omega} [(2m^*)_l^{3/2} \varepsilon l'^{1/2}] |Q_{ll'q}| (k_\mu k_\nu' - k_\mu' k_\nu) \left(\frac{\partial I_\mu^l}{\partial k_\nu} - \frac{\partial I_\nu^l}{\partial k_\mu} \right)$$

и

$$\sum_{l'q} [L_{ll'}^{('')} \varphi_{l'lq}^{(-2)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) - L_{l'l}^{('')} \varphi_{ll'q} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q)] =$$

$$= \frac{i\varepsilon_l}{3n\bar{V}} \frac{\tau}{\tau_{np}\tau_\phi} k_\nu \rho_l' eE_\alpha \left(\frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\nu} - \frac{\partial I_\nu}{\partial k_\alpha} \right). \qquad (24)$$

При выводе (24) было принято во внимание, что в случае высоких температур $\beta\varepsilon_q \ll 1$ и

$$\beta\rho_{l'}^0 (1 - \rho_{l'}^0) = -\beta\rho_l^0 = -\frac{\partial \rho_l^0}{\partial \varepsilon_l}.$$

Складывая (19′) и (24) и подставляя в уравнение (18), получаем

$$\frac{i\varepsilon_l}{3n\bar{V}} \frac{1}{\tau_{np}} k_\nu \rho_l' eE_\alpha \left(\frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\nu} - \frac{\partial I_\nu^l}{\partial k_\alpha} \right) + \sum_{l'q} [|Q_{ll'q}|^2 \times$$

$$\times \varphi_{l'lq}^{(-1)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l + \varepsilon_q) - |Q_{l'lq}|^2 \varphi_{ll'q}^{(-1)} \delta(\varepsilon_{l'} - \varepsilon_l - \varepsilon_q)] + \qquad (25)$$

$$+ \sum_{l'} (W_{l'l}^{(0)} f_{l'}^{(-1)} - W_{ll'}^{(0)} f_l^{(-1)}).$$

Коэффициенты при $f_l^{(-1)}$ и $f_{l'}^{(-1)}$ в уравнении (25) совпадают с соответствующими коэффициентами при $f_l^{(-2)}$ и $f_{l'}^{(-2)}$ в уравнении (11). Поэтому мы можем решить уравнение (18), вводя то же время релаксации τ, как при решении уравнения (11). Тогда получим решение уравнения (18) в виде

$$f_l^{(-1)} = -ieE_\alpha \left(\frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\nu} - \frac{\partial I_\nu^l}{\partial k_\alpha} \right) \frac{\varepsilon_l \tau}{3n\bar{V}\tau_{np}} k_\nu \rho_l'. \qquad (26)$$

С помощью (26) получаем выражение для средней скорости

$$\overline{V}_\beta^{(-1)} = -ieE_\alpha \frac{\tau \in_F}{3n\overline{V}\tau_{np}} \left(\frac{\partial I_\beta^l}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\beta} \right), \tag{27}$$

где $\in_F$ — энергия Ферми.

Наш результат отличается от результата в [1], где при выводе $\overline{V}_\beta^{(-1)}$ не принимается во внимание рассеяние на фононах. По формуле (27) $\overline{V}_\beta^{(-1)}$ зависит от τ_Φ, и, таким образом, зависит от числа фононов *, хотя спин-орбитальное взаимодействие влияет на $\overline{V}_\beta^{(-1)}$ лишь через матричные элементы потенциала примесей, входящих в I_α^l. При очень низких температурах, когда $\tau_\Phi \gg \tau_{np}$, формула (27) переходит в формулу для $\overline{V}_\beta^{(-1)}$, полученную в работе [1].

Аналогичным методом производятся расчеты следующего приближения по малому параметру λ. После проведения простых, но довольно громоздких расчетов, решая соответствующие уравнения для $f_l^{(0)}$ и подставляя $f_l^{(0)}$ в формулу для средней скорости, получаем

$$\overline{V}_\beta^{(0)} = -ieE_\alpha \left(\frac{\partial I_\beta^l}{\partial k_\alpha} - \frac{\partial I_\alpha^l}{\partial k_\beta} \right) + V_\beta^c, \tag{28}$$

где V_β^{c} представляет собой вклад от «столкновительных» членов (ср. формулы (4,29) [1]).

Таким образом, в общем случае при учете рассеяния электронов на фононах и примесях формула для $\overline{V}_\beta^{(0)}$ совпадает с формулой, полученной ранее Латтингером в работе [1] при рассмотрении частного случая, когда электроны рассеиваются на примесных центрах **.

Матричные элементы I_β^l (k), входящие в (27) и (28), были вычислены в работах [2] и [5].

Согласно [2]

$$I_\beta^l = \frac{1}{m} \sum_{n'} \frac{H_{nn'}^{s0}\, \rho_{n'n}^\beta - \rho_{nn'}^\beta H_{n'n}^{s0}}{\omega_{nn'}^2} = \frac{il^2}{3m^3c^2\omega_{nn'}^2} \frac{1}{l_s} [\vec{k} + l]^\beta \nu, \tag{29}$$

где

$$\nu = \int U_{nk}^*(r)\, \rho(r)\, U_{nk}(r)\, dr \tag{30}$$

($\rho(r)$ — плотность электронов, обусловливающих потенциал U).

Чтобы вычислить постоянную Холла, определим электропроводность

$$\sigma_{\beta\alpha} = \frac{en_0 \overline{V}_\beta}{E_\alpha}, \tag{31}$$

---

* Формула (27) была выведена автором совместно с Е. И. Кондорским. В работе [6] приведена формула для $V_\beta^{(-1)}$ для общего случая, когда кроме электрического поля E_α в ферромагнитном металле имеется градиент температуры $\nabla_\alpha T$.

** На то, что формула для $V_\beta^{(0)}$, получаемая при учете рассеяния электронов на фононах, совпадает с формулой, выведенной в [1], впервые было указано Гуревичем и Яссиевич в работе [7].

где n_0 — число носителей тока в единице объема. Подставляя I_β^l из (29) в (27) и (28), складывая последние и подставляя $\overline{V_\beta}=\overline{V}_\beta^{(-1)}+V_\beta^{(0)}$ в формулу (31), найдем

$$\sigma_{yx}=\frac{2\pi}{3}\,\frac{e^4 n_0}{m^2c^2\,\Delta^2}\,\overline{\nu}\,\delta<\frac{1}{m^*}>\frac{I_s}{I_s}\left(\frac{\epsilon_F}{3n\overline{V}}\,\frac{\tau}{\tau_{np}}+1\right). \tag{32}$$

Здесь δ — число полос, электроны которых участвуют в проводимости, а $<\frac{1}{m^*}>$, ν — усредненные по этим полосам обратная эффективная масса и эффективная плотность электронов соответственно, $\Delta=\omega_{ll'}\cong\mathrm{const}$.

При помощи (32) легко вычислить постоянную Холла

$$R_s=-\rho^2\sigma_{yx}\frac{1}{4\pi I_z}=\frac{1}{6}\,\frac{e^4 n_0\overline{\nu}}{m^2c^2\,\Delta^2}\,\delta<\frac{1}{m^*}>\frac{1}{I_s}\left(\frac{\epsilon_F}{3n\,\overline{V}}\,\frac{\tau}{\tau_{np}}+1\right)\rho^2. \tag{33}$$

Учитывая, что при высоких температурах $\tau\approx\tau_\text{ф}\sim\frac{1}{T}$, $\rho\sim T$ и, кроме того, $\tau_{np}\sim\frac{1}{\rho_\text{ост}}$, где $\rho_\text{ост}$ — остаточное удельное электрическое сопротивление, можем записать формулу (33) в следующем виде:

$$R_s=a\rho_\text{ост}\,\rho+b\rho^2, \tag{34}$$

где

$$a=b\frac{\epsilon_F}{3n\,\overline{V}},\quad b=-\frac{1}{6}\,\frac{n_0e^4}{m^2c^2\,\Delta}\,\overline{\nu}\,\delta<\frac{1}{m^*}>\frac{1}{I_s}. \tag{35}$$

Связь между постоянной Холла R_s и удельным электрическим сопротивлением ρ, даваемая формулой (34), подтверждается опытом (см. [3]). В частном случае при $\rho_\text{ост}=0$ ($\tau_{np}\to\infty$) формула (33) с точностью до знака совпадает с формулой для R_s, выведенной ранее в работе [2]. Грубая оценка R, сделанная в цитированной работе, показывает, что теория дает правильный порядок величины.

Автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность руководителю работы профессору Евгению Ивановичу Кондорскому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luttinger J. M. Phys. Rev., **112**, No. 3, 739, 1958.
2. Ирхин Ю. П., Шавров В. Г. ЖЭТФ, **42**, 1233, 1962.
3. Черемушкина А. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., физ., астрон., химии, № 2, 1957; «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., физ., астрон., химии, № 4, 1958.
4. Kohn W., Luttinger J. M. Phys. Rev., **108**, No. 3, 590, 1957.
5. Karplus R., Luttinger J. M., Phys. Rev., **95**, 1154, 1954.
6. Кондорский Е. И. ЖЭТФ, **45**, 511, 1963.
7. Гуревич Л., Яссиевич И. «Физика твердого тела», **5**, 2620, 1963.

Поступила в редакцию
12. 11 1962 г.

Кафедра
магнетизма