Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1964

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

А. Б. ШВАРЦБУРГ

О КОЛЬЦЕВОМ ТОКЕ, ЭКРАНИРОВАННОМ ПРОВОДЯЩИМ ЦИЛИНДРОМ

Пусть внутри полого цилиндра, радиус которого a и высота $2l$, помещена кольцевая токовая нить j радиуса r_0, плоскость которой равно отстоит от торцов и параллельна им. Если положить стенки цилиндра сверхпроводящими, то для определения поля H внутри цилиндра следует решить уравнение Пуассона

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j\delta, \tag{1}$$

где функция δ равна 0 всюду внутри цилиндра кроме точек, окружности $|r-r_0|=0$, а интеграл от нее равен единице с граничным условием равенства нулю на поверхности цилиндра нормальной составляющей магнитного поля. Вектор-потенциал A имеет только компонент $A_\varphi = A(r, z)$ и подчиняется уравнению (1), которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = -\frac{4\pi}{e} j\delta. \tag{2}$$

Положим

$$A = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} I_1\left(\nu_{1m}\frac{r}{a}\right) e^{i\pi\omega_n}, \tag{3}$$

где $\omega_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{z}{l}$, где I_1 — функция Бесселя первого порядка, а ν_{1m} — ее m-й корень. Тогда компоненты поля H_z и H_r, определяемые по формулам

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}, \tag{4}$$

равны 0 на границах цилиндра.

Подставляя (3) в (2), умножая на одну из собственных функций и интегрируя по объему цилиндра обе части полученного уравнения, находим выражение для внутренней функции Грина [1]

$$G(r, z\,|\,r_0, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{16 r_0}{c\pi a^2 l I_2^2(\nu_{1m})} \frac{I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right) I_1\left(\nu_{1m}\frac{r}{a}\right) e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{z-z_0}{l}}}{\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\right)^2 + \left(\frac{\nu_{1m}}{\pi a}\right)^2}. \tag{5}$$

Устремим расстояние между торцами к бесконечности. Тогда в пределе сумма по n в (5) перейдет в интеграл

$$G(r, z\,|\,r_0, z_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{16\pi r_0}{ca^2 I_2^2(\nu_{1m})}\,\frac{I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right)I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right)e^{ik|z-z_0|}\,dk}{k^2+\left(\frac{\nu_{1m}}{a}\right)^2}. \qquad (6)$$

Учитывая, что интегрируемая функция имеет простые полюсы в точках $k=\pm\frac{i\nu_{1m}}{a}$, и вычисляя интеграл в (6) с учетом четности функции Грина по k, находим

$$G(r, z\,|\,r_0, z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{64\pi^2 r_0}{ac\nu_{1m}I_2^2(\nu_{1m})}\,I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right)I_1\left(\nu_{1m}\frac{r}{a}\right)l^{-\frac{\nu_{1m}}{a}|z-z_0|}. \qquad (7)$$

Найдем распределение A_φ для случая, когда контур, обтекаемый током, имеет конечные размеры по радиусу (от $\rho_1=r_0-b$ до $\rho_2=r_0+b$) и по z (от z_0-d до z_0+d). Для этого интегрируем (7) по объему этого контура и найдем выражение для вектор-потенциала единичного тока

$$G(r, z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{64\pi^2 a}{c\nu_{1m}^3 I_2^2(\nu_{1m})}\,f_m(r_0)\,\varphi_m I\left(\nu_{1m}\frac{r}{a}\right),$$

где

$$f_m(r_0)=\left[2\sum_{k=0}^{\infty}I_{2k+1}(r)-rI_0(r)\right]_{\nu_{1m}\frac{\rho_2}{a}}^{\nu_{1m}\frac{\rho_2}{a}}, \qquad (8)$$

$$\varphi_m(z)=\begin{cases}\dfrac{2a}{\nu_{1m}}\,e^{\frac{\nu_{1m}|z|}{a}}\,\mathrm{sh}\,\nu_{1m}\dfrac{d}{a} & \text{для } z\geqslant d \text{ и } z\leqslant -d\\[2ex] \dfrac{2a}{\nu_{1m}}\left(1-e^{-\nu_{1m}\frac{d}{a}}\,\mathrm{ch}\,\nu_{1m}\dfrac{z}{a}\right) & \text{для } -d\leqslant z\leqslant d\end{cases}$$

Если кольцо тонкое, т. е. $b\ll a$ и $d\ll a$, то, используя формулу Лагранжа для конечных приращений, можно найти из (8)

$$G(r, z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{256\pi^2 br_0 d}{c\nu_{1m}aI_2^2(\nu_{1m})}\,I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right)\varphi_m^1\left(\nu_{1m}\frac{r}{a}\right),$$

где

$$\varphi_m^1(z)=2d\begin{Bmatrix}1 & -d<z<d\\ e^{-\nu_{1m}\frac{|z|}{a}} & z>d \text{ и } z<-d.\end{Bmatrix} \qquad (9)$$

Подставляя (8) в (4), можно найти распределение H. В частности, для тонкого кольца с учетом (9) найдем значение H в плоскости $z=0$ на радиусе r_0

$$H_z=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{256\pi^2 b\,dr_0}{ca^2 I_2^2(\nu_{1m})}\,I_0\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right)I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right). \qquad (10)$$

Тогда радикальная амперова сила, сжимающая кольцо радиуса r_0 с током J, будет

$$F_R=\frac{J^2}{c^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{512\pi^3 r_0^2}{a^2 I_2^2(\nu_{1m})}\,I_0\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right)I_1\left(\nu_{1m}\frac{r_0}{a}\right). \qquad (11)$$

Радиус устойчивого кольца получается из уравнения $F_R - F_{r_0} = 0$, где F_{r_0} — сила расталкивания кольца собственным полем

$$F_{r_0} = \frac{1}{2}\frac{J^2}{c^2}\frac{dL}{dr_0}, \quad L = 4\pi r_0 \left(\ln\frac{8r_0}{b} - \frac{3}{4}\right), \tag{12}$$

где L — самоиндукция кольца [3].

Из (11) и (12) можно найти потенциальную функцию кольцевого тока U:

$$U = \frac{J^2}{c^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{256\pi^3 r_0^2}{a\nu_{1m} I_2^2(\nu_{1m})} I_0^2\left(\nu_{1m}\frac{r}{a}\right) - \frac{LJ^2}{2}. \tag{13}$$

Аналогично можно решить задачу о поле заряженного кольца внутри проводящего цилиндра.

Автор выражает благодарность академику В. И. Векслеру за постоянный интерес к работе и Ю. Н. Лобанову, В. Г. Маханькову и О. И. Ярковому за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, М., 1960.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Физматгиз, М., 1956.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1957.

Поступила в редакцию
15. 4 1963 г.

НИИЯФ