Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1964

В. М. БЕРЕЗИН

КРАЕВАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ПРОГНОЗА ПОЛЯ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

В задачах прогноза погоды, как правило, центральной проблемой является проблема предвычисления поля атмосферного давления, хотя, разумеется, задача прогноза погоды отнюдь не исчерпывается только предсказанием поля давления. В задачах прогноза поля давления используют обычно два подхода: либо фактически решают задачу Коши для неограниченного пространства, либо решают краевую задачу. Будем решать краевую задачу для прогноза поля атмосферного давления, используя полную систему уравнений гидродинамики в виде, предложенном А. Ф. Дюбюком [1],

$$\begin{gathered} u_t - lv + Q_x = -(\vartheta Q_x + uu_x + vu_y + wu_z) \equiv F_1, \\ v_t + lu + Q_y = -(\vartheta Q_y + uv_x + vv_y + wv_z) \equiv F_2, \\ w_t + Q_z = -[\vartheta (Q_z - g) - uw_x + vw_y + ww_z) \equiv F_3, \\ \frac{1}{c^2} Q_t + u_x + v_y + w_z = -\frac{1}{c^2}[uQ_x + vQ_y + w(Q_z - g)] \equiv F_4, \\ \vartheta_t + \frac{AR}{c_v}(u_x + v_y + w_z) = \frac{AR}{c_v}\vartheta(u_x + v_y + w_z) - (u\vartheta_x + v\vartheta_y + w\vartheta_z) \equiv F_5, \end{gathered} \tag{1}$$

где u, v, w — компоненты скорости ветра, g — ускорение силы тяжести, $l=2\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места. В локальной задаче будем считать $l=\text{const}$. Кроме того, полагаем, что температура $T=T'+T_0$, где T_0 — постоянная величина (например, 273°), $\vartheta\frac{T'}{T_0}$, $Q=RT_0\ln\frac{p}{p_0}+gz$, где p — давление, $p_0=1000$ *мб*, R — газовая постоянная, A — термический эквивалент работы, $c^2=\frac{c_p}{c_v}$.

Обозначим начальные значения при $t=0$:

$$u=\overset{\circ}{u},\ v=\overset{\circ}{v},\ w=\overset{\circ}{w},\ Q=\overset{\circ}{Q},\ \vartheta=\overset{\circ}{\vartheta}.$$

Систему (1) можем привести к интегро-дифференциальной путем решения ее относительно u, v, w, Q, выражая их через F_i. Нетрудно показать, что система (1) может быть сведена к уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) + l^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\right] Q = \Phi, \tag{2}$$

где Φ — нелинейные члены.

Уравнение (2) есть уравнение типа С. Л. Соболева [2].

Если предположить, что $\frac{1}{c^2} \approx 0$, то тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta Q + l^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \Phi_1. \tag{3}$$

Полученное уравнение предлагается использовать в прогностических целях.

Задача прогноза поля Q по уравнению (3) для неограниченного полупространства была решена [1, 4]. Однако, как показали расчеты, условие неограниченности области прогноза приводит к значительным сложностям при реализации полученного решения на электронных вычислительных машинах. Поэтому мы предлагаем использовать уравнение (3) для прогноза поля Q при наличии граничных условий. Ввиду нелинейности правой части уравнения (3) предлагается решать задачу численно шагами по времени, причем используются исходные данные поля Q за два срока. Считаем, что решение, полученное аналитическим путем, справедливо для каждого шага по веремени. Решение на каждом шаге ищем приемами решения линеаризированной задачи, используя метод разделения переменных.

Решение (3) будем искать в виде

$$Q = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \sum_k^\infty T(t) \cos \frac{m\pi x}{L_1} \cos \frac{n\pi y}{L_2} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2H}.$$

Граничные и начальные условия выберем в виде $Q_x \big|_{\substack{x=0\\x=L_1}} = 0$, $Q_y \big|_{\substack{y=0\\y=L_2}} = 0$,

$$Q_z \big|_{z=0} = g\vartheta \big|_{z=0},\ Q_{zz} \big|_{z=H} = 0, \text{ при } t=0,\ \vartheta = \mathring{\vartheta} \text{ и } Q = \mathring{Q} \text{ при } t = t_1,\ Q = Q',$$

t_1 — момент времени, предшествующий начальному моменту времени ($t=0$), L_1, L_2, H — длина, ширина и высота рассматриваемой области, для которой дается прогноз. Представим

$$\Phi = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \sum_k^\infty f'_{mnk} \cos \frac{m\pi x}{L_1} \cos \frac{n\pi y}{L_2} \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2H}.$$

Воспользовавшись методом разделения переменных (Фурье), получим

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega^2_{mnk} T = - g_{mnk}, \tag{4}$$

где

$$\Omega^2_{mnk} = l^2 \sigma^2_{mnk},$$

$$\sigma^2_{mnk} = - \frac{\left(\frac{2k+1}{2H}\right) l^2}{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{2H}\right)^2},\quad g_{mnk} = \frac{f_{mnk}}{\mu_{mnk}},$$

$$\mu_{mnk} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{2H}\right)^2\right].$$

Решение (4) будет

$$T = C_1 \sin(\sigma_{mnk} t) + C_2 \cos(\sigma_{mnk} t).$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, получим

$$T = \gamma_1 \sin(\sigma_{mnk} t) + \gamma_2 \cos(\sigma_{mnk} t) - \frac{g_{mnk}}{\Omega^2_{mnk}}.$$

При $t=0$

$$Q=\overset{\circ}{Q}=\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\left(\gamma^2-\frac{g_{mnk}}{\Omega^2_{mnk}}\right)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi z}{2H}\right),$$

откуда

$$\gamma_2=\frac{g_{mnk}}{\Omega^2_{mnk}}+\frac{8}{L_1L_2H}\int\limits_0^{L_1}\int\limits_0^{L_2}\int\limits_0^{H}\overset{\circ}{Q}\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi x}{L_2}\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2H}\,dx\,dy\,dz.$$

При $t=t_1$

$$Q=Q^{-1}=\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\left(\gamma_1\sin(\sigma_{mnk}t)+\gamma_2\cos(\sigma_{mnk}t)-\right.$$

$$\left.-\frac{g_{mnk}}{\Omega^2_{mnk}}\right)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2}\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2H}.$$

Откуда имеем

$$\gamma_1=\gamma_2\operatorname{ctg}(\sigma_{mnk}t_1)+\frac{g_{mnk}}{\Omega^2_{mnk}}\frac{1}{\sin(\sigma_{mnk}t_1)}+$$

$$+\frac{8}{L_1L_2H}\int\limits_0^{L_1}\int\limits_0^{L_2}\int\limits_0^{H}\frac{Q^{-1}}{\sin(\sigma_{mnk}t_1)}\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2}\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2H},$$

причем

$$f_{mnk}=\frac{8}{L_1L_2H}\int\limits_0^{L_1}\int\limits_0^{L_2}\int^{H}\Phi\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2}\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2H}\,dx\,dy\,dz,$$

где

$$\Phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+l^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}F_4-F_{3z}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F_{1x}+F_{2y})+\frac{\partial}{\partial t}l(F_{1y}-F_{2x}).$$

Функции F_{ij} выражены через начальные данные в геострофическом приближении, те же, что и в (1). Таким образом, общее решение можно записать в виде

$$Q=\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\left[\gamma_1\sin(\sigma_{mnk}t)+\gamma_2\cos(\sigma_{mnk}t)-\right.$$

$$\left.-\frac{g_{mnk}}{\Omega^2_{mnk}}\right]\cos\frac{m\pi x}{L_1}\cos\frac{n\pi y}{L_2}\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2H}.$$

Решение получается в виде спектра гармоник, причем нелинейные члены приводят к тому, что задачу надо решать численно шагами во времени. Как нам представляется, полученное решение имеет определенное значение и, вероятно, перспективно с точки зрения учета влияния краевых условий в задаче прогноза погоды по полной системе уравнений гидродинамики в виде (1).

В заключение автор выражает горячую признательность профессору А. Ф. Дюбюку за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбюк А. Ф. ДАН СССР, **123**, № 2, 1958.
2. Соболев С. Л. «Изв. АН СССР», сер. математическая, **18**, № 1, 1954.
3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов Н. Н. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, М., 1962.
4. Березин В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 4, 1960.
5. Дюбюк А. Ф., Березин В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 2, 1962.

Поступила в редакцию
22. 1 1963 г.

Кафедра
физики и атмосферы