Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

Ю. А. РЫЛОВ

ЧАСТИЦЫ ПОЛУЦЕЛОГО СПИНА В УНИВЕРСАЛЬНОМ ШЕСТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается спинорное поле в универсальном шестимерном пространстве [1]. Показано, что все элементарные частицы могут рассматриваться как различные состояния этого поля. Рассмотрены преобразования шестимерного зарядового сопряжения и преобразования частица — античастица.

В работе [1] нами было введено универсальное шестимерное пространство (6-пространство) и показано, что предположение о шестимерности реального пространства событий дает ряд преимуществ. В частности, движение заряженной частицы в электромагнитном и гравитационном полях может рассматриваться как движение свободной частицы в искривленном 6-пространстве. Наличие элементарного электрического и барионного зарядов и кратность всех зарядов элементарному легко объясняются как свойства 6-пространства. Наконец, «голые» нейтрино, электрон, мюон и барионы могут рассматриваться как разные состояния одной частицы спина $^1/_2$ (6-фермиона), различающиеся электрическими и барионными зарядами.

В настоящей работе мы рассмотрим спинорное уравнение в 6-пространстве и изучим некоторые его свойства. Спиноры в шестимерном пространстве рассматривались в [2—3].

Мы предполагаем, что пространство событий имеет 6 измерений и описывается 6 координатами $x^A (A=0, 1, 2, 3, 5, 6)$ *, причем x^0 времениподобна, а остальные координаты пространственноподобны. Смысл координат x^5 и x^6 устанавливается тем, что соответствующие им импульсы представляют собой соответственно электрический и барионный заряды, выраженные в единицах импульса. Все координаты x^A имеют размерность длины, скорость света $c=1$. Координаты x^5 и x^6 топологически замкнуты на себя. В остальном они совершенно аналогичны обычным пространственным координатам. Метрический тензор 6-пространства γ_{AB} имеет вид [1]

$$\begin{gathered}\gamma_{ik} = g_{ik} - \{a_i a_k - b_i b_k - u(a_i b_k + a_k b_i)\}(1-u^2)^{-1},\\ \gamma_{i5} = -a_i,\ \gamma_{55} = -1,\ \gamma_{i6} = -b_i,\ \gamma_{66} = -1,\\ \gamma_{56} = -u \equiv -b_5 \equiv -a_6,\end{gathered} \tag{1}$$

* Вообще прописные латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, 5, 6, а строчные латинские индексы — 0, 1, 2, 3.

причем g_{ik} представляет собой метрический тензор обычного 4-пространства, a_i — вектор-потенциал электромагнитного поля, b_i — вектор-потенциал вектонного поля [1], выраженные в соответствующих единицах, а u есть косинус угла между координатными линиями x^5 и x^6. Все физические величины $A(x)$, в том числе и метрика γ_{AB}, зависят, вообще говоря, от всех координат x^A и являются периодическими функциями x^5 и x^6.

$$A(x^i, x^5, x^6) = A(x^i, x^5 + nl_5, x^6 + ml_6),$$

где n и m — целые числа, а l_5 и l_6 — универсальные постоянные $l_5 \simeq 10^{-11}$ *см*, $l_6 \simeq 10^{-13}$ *см*. Система координат определена с точностью до группы преобразований

$$x'^i = f^i(x^k), \qquad x'^5 = \pm x^5 + \varphi(x^k), \qquad x'^6 = \pm x^6 + \chi(x^k). \tag{2}$$

Мы предполагаем, что все фермионы (нейтрино, электрон, мюон, барионы) суть различные состояния одного 6-фермиона с 6-массой, равной нулю. Этот 6-фермион описывается волновой функцией W, удовлетворяющей спинорному уравнению в 6-пространстве. Последнее имеет вид [4, 5]

$$\Gamma^A(\partial_A - B_A) W = 0. \tag{3}$$

Здесь ∂_A означает дифференцирование по x^A, Γ^A суть матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma^A\Gamma^B + \Gamma^B\Gamma^A = 2\gamma^{AB},$$

где γ^{AB} — контравариантный метрический тензор 6-пространства. Матрицы B_A определяются соотношениями

$$B_A\Gamma^B + \Gamma^B B_A + \nabla_A\Gamma^B = 0,$$

где ∇_A означает ковариантную производную в 6-пространстве.

Уравнение (3) инвариантно относительно преобразований (2), так как при этом

$$\Gamma^A \to \Gamma'^A = \frac{\partial x'^A}{\partial x^B}\Gamma^B, \quad W \to W' = W,$$

$$\partial_A W \to \partial'_A W' = \frac{\partial x^B}{\partial x'^A}\partial_B W, \quad B_A \to B'_A = \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} B_B.$$

Мы не будем рассматривать уравнение (3) в общем виде, а ограничимся частным случаем, когда можно пренебречь гравитацией и когда оси x^5 и x^6 ортогональны. Математически это означает, что можно выбрать такую систему координат, где

$$g_{ik} = \eta_{ik} = e_i\delta_{ik}, \; e_0 = 1, \; e_1 = e_2 = e_3 = -1,$$
$$u = 0. \tag{4}$$

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться только такими системами координат. Система координат (4) определена с точностью до преобразований

$$x'^i = a^i + a^i_{\cdot k} x^k, \qquad x'^5 = \pm x^5 + \varphi(x^k), \qquad x'^6 = \pm x^6 + \chi(x^k),$$
$$\eta_{ij} a^i_{\cdot k} a^j_{\cdot l} = \eta_{kl}, \tag{5}$$

причем преобразования (5) легко разбить на три группы преобразований: группу Лоренца, группу калибровочных преобразований вектор-потенциала электромагнитного поля a_i и группу преобразований калибровки вектонного поля b_i. Будем называть системы координат (4) галилеевыми. В такой системе координат γ_{AB} имеет вид

$$\gamma_{ik} = \eta_{ik} - a_i a_k - b_i b_k, \ \gamma_{i5} = -a_i,$$
$$\gamma_{55} = -1, \ \gamma_{i6} = -b_i, \ \gamma_{56} = 0, \ \gamma_{66} = -1. \tag{6}$$

Используем для матриц Γ^A представление*

$$\Gamma^A = \Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha}\mu^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 5, 6,$$

где величины $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha}$ определяются соотношениями

$$\sum_\alpha e_\alpha \Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha} \Omega^{B\cdot}_{\cdot\alpha} = \gamma^{AB}, \tag{7}$$

$$\Omega_{A\alpha} = \gamma_{AB}\Omega^{B\cdot}_{\cdot\alpha}, \ \Omega^{A\alpha}_{\cdot\cdot} = \eta^{\alpha\beta}\Omega^{A\cdot}_{\cdot\beta} = e_\alpha \Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha},$$
$$e_\alpha = \begin{cases} 1, \ \alpha = 0 & \eta^{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \\ -1, \ \alpha = 1, 2, 3, 5, 6 & \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 5, 6, \end{cases} \tag{8}$$

а матрицы μ^α — соотношениями

$$\mu^\alpha \mu^\beta + \mu^\beta \mu^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}, \ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 5, 6. \tag{9}$$

При этом μ^α инвариантны относительно преобразований координат, а величины $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha}$ преобразуются по закону

$$\Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha} \to \Omega'^{A\cdot}_{\cdot\alpha} = \frac{\partial x'^A}{\partial x^B}\Omega^{B\cdot}_{\cdot\alpha}. \tag{10}$$

Наконец, мы предположим, что поля a_i и b_i таковы, что матрицы B_A в галилеевой системе координат равны нулю. Для этого достаточно выполнения условия

$$\partial_A (\Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha}\mu^\alpha) = 0 \ (\text{суммирования по } A \text{ нет}) \tag{11}$$
$$\alpha = 0, 1, 2, 3, 5, 6.$$

Возьмем для величин $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\alpha}$ в некоторой галилеевой системе координат выражения

$$\Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 1 & 0 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{12}$$

* Такое представление было использовано для 5-пространства Румером [6].

$$\Omega_{A\cdot}^{\cdot\mu_i} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_0 & b_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (13)$$

В (12) и (13) первый (латинский) индекс нумерует строку, второй (греческий) — столбец.

Легко проверить, что (12) и (13) удовлетворяют соотношениям (7), (8) с γ_{AB} из (6). Выбирая далее в качестве матриц μ^A не зависящие от координат x^A матрицы, получим, что для выполнения (11) достаточно выполнения условий

$$\partial_5 a_i = 0, \quad \partial_6 b_i = 0. \qquad (14)$$

Мы будем считать их выполненными.

В системе координат, где $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu}$ имеют вид (12), лагранжиан 6-фермионного поля может быть записан в виде

$$L = \frac{i}{2}\overline{W}\{\mu^i(\partial_i - a_i\partial_5 - b_i\partial_6) + \mu^5\partial_5 + \mu^6\partial_6\}W -$$

$$-\frac{i}{2}\{\partial_i\overline{W}\mu^i - (\partial_5\overline{W})\mu^i a_i - (\partial_6\overline{W})\mu^i b_i + \partial_5\overline{W}\mu^5 + \partial_6\overline{W}\mu^6\}W, \qquad (15)$$

где $\overline{W} = W^+\mu^0$, а $(^+)$ означает эрмитово сопряжение. Лагранжиан имеет вид (15) только в одной галилеевой системе координат. При преобразованиях (5) величины $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu}$ из (12) преобразуются согласно (10) и изменяют при этом свой вид. Если мы желаем, чтобы величины $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu}$ и $\Omega^{\cdot\mu}_{A\cdot}$ сохраняли свой вид, то следует использовать так называемое S-преобразование *. Иными словами, всякое преобразование (5) мы будем сопровождать некоторым преобразованием величин W и матриц μ^A:

$$W \to W' = SW, \quad \overline{W} \to \overline{W}' = \overline{W}S^{-1},$$
$$\mu^A \to \mu'^A = S^{-1}\mu^A S, \qquad (16)$$

где S — матрица, зависящая от матрицы $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ из (5). При этом, если величины $\Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu}$ сохраняют свой вид, т. е. (10) заменяется на

$$\Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu}(a_i, b_i) \to \Omega'^{A\cdot}_{\cdot\mu}(a_i', b_i') = \Omega^{A\cdot}_{\cdot\mu}(a_i', b_i'),$$

где $a_i' = (a^{-1})^{k\cdot}_{\cdot i}(a_k - \partial_k\varphi)$, $b_i' = (a^{-1})^{k\cdot}_{\cdot i}(b_k - \partial_k\chi)$, а $(a^{-1})^{k\cdot}_{\cdot i}$ есть матрица, обратная матрице $a^{i\cdot}_{\cdot k}$

$$a^{i\cdot}_{\cdot k}(a^{-1})^{k\cdot}_{\cdot j} = \delta^i_j,$$

то матрицу S следует определить условиями

$$S^{-1}\mu^i S = a^{i\cdot}_{\cdot k}\mu^k, \quad S^{-1}\mu^\alpha S = \mu^\alpha, \quad \alpha = 5, 6.$$

Тогда лагранжиан (15) будет инвариантен относительно всех ортохронных преобразований ** (5) и (16). Таким образом, при преобразованиях

* См., например, [7].

** Ортохронными называются преобразования, не изменяющие направления времени, при этом матрица $a^{i\cdot}_{\cdot k}$ из (5) ограничена условием $a^{0\cdot}_{\cdot 0} > 0$.

(5), (16) лагранжиан (15) будет сохранять свой вид и будет инвариантен.

Итак, лагранжиан (15) описывает 6-фермионное поле в 6-пространстве. Уравнения поля при этом имеют вид

$$\begin{aligned} &\{\mu^i(\partial_i - a_i\partial_5 - b_i\partial_6) + \mu^5\partial_5 + \mu^6\partial_6\} W = 0, \\ &\overline{W}\{\mu^i(\overleftarrow{\partial_i} - a_i\overleftarrow{\partial_5} - b_i\overleftarrow{\partial_6}) + \mu^5\overleftarrow{\partial_5} + \mu^6\overleftarrow{\partial_6}\} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Стрелки над символом ∂ в последнем уравнении указывают на то, что операторы дифференцирования действуют налево.

В 6-пространстве, как и в обычном пространстве, можно ввести понятие античастицы как дырки в фоне частиц отрицательной энергии. Для этого мы введем, как обычно ([8], стр. 171), понятие сопряжения, или зарядового сопряжения *

$$W^c = C\overline{W}^T, \tag{18}$$

где T означает транспонирование, а матрица C определяется соотношениями

$$C^{-1}\mu^A C = -\mu^{AT}, \quad C^+C = 1. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что из (19) следует

$$C^T = C, \tag{20}$$

тогда как в случае 4-пространства из (19) следовало ([8], стр. 171)

$$C^T = -C.$$

Различие свойств матрицы С для 6-пространства и 4-пространства объясняется разным числом измерений этих пространств и, в частности, тем, что матрица μ^7

$$\mu^7 = i\mu^0\mu^1\mu^2\mu^3\mu^5\mu^6, \quad \mu^7\mu^7 = -1$$

удовлетворяет первому соотношению (19)

$$C^{-1}\mu^7 C = -\mu^{7T}, \tag{21}$$

тогда как в случае обычных матриц Дирака γ^i матрица γ^5

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma^5\gamma^5 = -1$$

удовлетворяет соотношению, аналогичному (21), но с другим знаком правой части. Следствием (20) является то, что

$$\overline{W}^c = -W^T C^{-1} = -W^T(C^T)^{-1}. \tag{22}$$

В результате этого операция сопряжения C не совпадает с обратной, как в случае 4-пространства, а отличается от нее знаком. Однако это не является дефектом, поскольку спиноры W и $-W$ описывают одно и то же состояние **. С помощью сопряженного спинора W^c лагранжиан (15) можно переписать в виде ***

* Мы будем называть преобразование (18) просто сопряжением, потому что, как мы увидим, (18) не означает обязательно перехода от частицы к античастице в обычном смысле слова.

** Отметим, что с точно такой же ситуацией мы сталкиваемся при рассмотрении преобразований спиноров при вращениях. Например, вращению на угол 2π соответствует преобразование $W \to -W$.

*** При переходе от (15) к (23) мы считали величины W операторами, связанными соотношениями антикоммутации, а не c-числами. Это обусловило изменение знака у второго члена в (23).

$$L = \frac{i}{2}\overline{W}\{\mu^i(\partial_i - a_i\partial_5 + b_i\partial_6) + \mu^5\partial_5 + \mu^6\partial_6\} W +$$
$$+ \frac{i}{2}\overline{W^c}\{\mu^i(\partial_i - a_i\partial_5 - b_i\partial_6) + \mu^5\partial_5 + \mu^6\partial_6\} W^c. \tag{23}$$

Здесь W^c и $\overline{W^c}$ даются соотношениями (18) и (22). Лагранжиан (23) инвариантен относительно преобразования сопряжения

$$\begin{aligned} &W \to W^c, \quad W^c \to -W, \\ &\overline{W} \to \overline{W^c}, \quad \overline{W^c} \to -\overline{W}, \end{aligned} \tag{24}$$

при этом преобразование (24) не сопровождается преобразованием величин a_i и b_i, как это имеет место в случае 4-пространства ([9], стр. 218). Кроме того, сопряженный спинор W^c удовлетворяет тому же уравнению (17), что и W. Это означает, что множество всех решений W совпадает с множеством всех решений W^c. Мы будем толковать это в том смысле, что 6-фермион есть нейтральная частица, т. е. частица совпадает с античастицей. Здесь слова частица и античастица употребляются в смысле преобразования (18), а не в обычном смысле слова. Например, электрон и позитрон суть частица и античастица в обычном смысле слова, но с точки зрения 6-пространства это два разных состояния 6-фермиона, отличающиеся знаками импульсов p_5 (электрических зарядов), но оба эти состояния описываются спинором W и не являются частицей и античастицей в смысле (18). Скорее их можно назвать «состоянием» и «антисостоянием» 6-фермиона.

С физической точки зрения нейтральность 6-фермиона представляется вполне естественной, поскольку электрический и барионный заряды уже учтены введением 6-пространства. Заметим, что специфика 6-пространства проявляется в том, что мы не можем учесть нейтральность 6-фермиона, положив

$$W^c = W, \tag{25}$$

как это делается в 4-пространстве [10], поскольку в случае 6-пространства из (25) следует, как легко проверить, $W = 0$ *. С помощью операции сопряжения (18) мы обойдем трудности, связанные с состояниями, обладающими отрицательной энергией. Действительно, легко проверить, что если W есть собственная функция с собственным значением λ любого из операторов

$$P_A = -i\hbar\partial_A, \quad \sigma^{\alpha\beta} = \hbar\frac{\mu^\alpha\mu^\beta - \mu^\beta\mu^\alpha}{2i}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 5, 6, 7,$$

то W^c из (18) есть собственная функция того же оператора с собственным значением $-\lambda$. В частности, если W имеет отрицательную энергию, то W^c — положительную. W^c описывает, таким образом, дырку в фоне частиц W, но с другой стороны эта дырка совпадает с одной из частиц.

Попытаемся отразить в нашем формализме различие между состояниями и антисостояниями, т. е. частицами и античастицами в смысле 4-пространства. Будем называть их 4-частицами и 4-античастицами. Как известно, 4-частица отличается от 4-античастицы знаками электрического и барионного зарядов p_5, p_6, однако различие этим не исчерпы-

---

* Формально это обстоятельство проявляется в том, что в 6-пространстве не существует представления Майорана [10] для 8-рядных матриц и только 5 из 6 матриц (9) могут быть сделаны мнимыми.

вается, например, позитрон не является античастицей к отрицательному мюону, хотя знаки электрического и барионного зарядов ($p_6 = 0$) у них разные. Должна существовать еще какая-то лоренц-инвариантная характеристика 4-частицы *. Мы в качестве такой характеристики выберем величину $\tau = i\mu^7$, имеющую собственные значения ± 1. Легко видеть, что лагранжиан (23) инвариантен относительно преобразования

$$W \to W' = e^{i\alpha\tau} W, \tag{26}$$

где α — произвольная вещественная постоянная, откуда следует, что τ есть сохраняющаяся величина. Больше того, собственные значения τ разделяют все состояния 6-фермиона на два класса, причем переход из одного класса в другой невозможен в рамках лагранжиана (23) **. Итак, для a_i и b_i, не зависящих от x^5, x^6, мы можем характеризовать состояние (4-частицу) тремя лоренц-инвариантными *** параметрами (p_5, p_6, τ). Для антисостояния (4-античастицы) есть две возможности: ($-p_5$, $-p_6$, τ) и ($-p_5$, $-p_6$, $-\tau$). Первой возможности соответствует преобразование

$$x^i \to x'^i = x^i, \qquad x^5 \to x'^5 = -x^5, \qquad x^6 \to x'^6 = -x^6, \tag{27}$$

$$W(x) \to W'(x') = W'(x'^i, x'^\alpha) = \mu^5\mu^6\mu^7 W(x^i, -x^\alpha), \quad \alpha = 5, 6,$$

$$a_i(x) \to a_i'(x') = -a_i(x), \qquad b_i(x) \to b_i'(x') = -b_i(x). \tag{28}$$

Второй возможности соответствует преобразование

$$x^0 \to x'^0 = x^0, \qquad x^\alpha \to x'^\alpha = -x^\alpha,$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 5, 6,$$

$$W(x) \to W'(x') = W'(x'^0, x'^\alpha) = \mu^0 W(x^0, -x^\alpha), \tag{29}$$

$$a_0(x) \to a_0'(x') = -a_0(x), \; b_0(x) \to b_0'(x') = -b_0(x), \tag{30}$$

$$a_\beta(x) \to a_\beta'(x') = a_\beta(x), \; b_\beta(x) \to b_\beta'(x') = b_\beta(x),$$

$$\beta = 1, 2, 3.$$

Преобразование (27), (28) представляет собой преобразование зарядового сопряжения (ср., например, [9], стр. 218). Оно получается отражением координат **** x^5, x^6. Легко видеть, что лагранжиан (23) инвариантен относительно преобразования (27), (28). Преобразование (28) означает, что при описании электромагнитного и вектонного полей мы также переходим от состояния к зарядово-сопряженному состоянию. Иными словами, лагранжиан (23) инвариантен только относительно преобразования зарядового сопряжения для всех частиц (полей) сразу. То же самое справедливо для зарядового сопряжения в обычной, четырехмерной формулировке квантовой теории поля (см., например, [9], стр. 218). При этом преобразование зарядового (27), (28) включает в себя изменение знака вектор-потенциала a_i. Однако при четырехмерной формулировке необходимость (28) следует только из требования инвари-

* 4-массы позитрона и мюона мы считаем одинаковыми в приближении «голых» частиц.

** Чтобы разрешить переход из одного класса в другой, можно добавить к лагранжиану (23) член, неинвариантный относительно (26), например, нелинейный член вида: $g\{(\overline{W}OW)(\overline{W}O'W) + \text{эрм. сопр.}\}$, где g — малая постоянная, а O, O' — матрицы, построенные из μ^A [3]. (Для случая 4-пространства см. [11, 12].)

*** Имеется в виду инвариантность относительно собственно лоренцовых преобразований.

**** Для случая 5-пространства это было показано Клейном [13].

антности лагранжиана и не имеет ясного смысла. В нашем случае необходимость (28) следует из того, что согласно [1] $-a_i$ и $-b_i$ суть соответственно компоненты γ_{i5} и γ_{i6} метрического тензора γ_{AB} и должны менять знак при отражении x^5 и x^6. Легко видеть, что преобразование (27), (28) меняет знак у электрического и барионного токов. Действительно, электрический и барионный токи согласно [1] суть соответственно компоненты $T^i{}_5$ и $T^i{}_6$ 6-тензора энергии-импульса-заряда, а эти компоненты меняют знак при отражении осей x^5, x^6. Наконец, из (27), (28) видно, что преобразование зарядового сопряжения совпадает с обратным.

Итак, с точки зрения 6-пространства преобразование зарядового сопряжения представляет собой отражение осей x^5, x^6. В этом смысле зарядовое сопряжение ничем не отличается от отражений других пространственных координат.

Если преобразование (27), (28) мы назвали зарядовым сопряжением, то преобразование (28), (30) следует назвать комбинированной инверсией, поскольку оно представляет собой отражение всех пространственноподобных координат x^α $(\alpha = 1, 2, 3, 5, 6)$, т. е. произведение зарядового сопряжения и пространственного отражения. Легко видеть, что лагранжиан (23) инвариантен относительно (29), (30). Что касается электрического и барионного 4-токов, то при комбинированной инверсии (29), (30) меняется знак плотности заряда, а пространственные компоненты 4-токов остаются неизменными.

Оказывается, что в качестве преобразования состояние — антисостояние (4-частица — 4-античастица) следует принять преобразование (29), (30), а не (27), (28). Это следует из таких соображений: во-первых, (29), (30) является симметричным относительно всех пространственноподобных координат, во-вторых, преобразование комбинированной инверсии является более фундаментальным, чем преобразование зарядового сопряжения, ввиду несохранения четности при слабых взаимодействиях [14, 15]. Наконец, и это является решающим, в случае нейтрино $(p_5 = p_6 = 0)$ комбинированная инверсия (29), (30) дает преобразование нейтрино-антинейтрино, а зарядовое сопряжение (27), (28) — нет. Таким образом, если $W(x)$ описывает некоторое состояние (4-частицу), то есть антисостоянием (4-античастицей) $W^a(x)$ будет состояние, получаемое из $W(x)$ преобразованием (29), (30).

Посмотрим теперь, какие 4-частицы описывает 6-фермион, удовлетворяющий уравнению (17). Для этого мы рассмотрим решения уравнения (17), причем нас будут интересовать только решения, описывающие разные 4-частицы, т. е. решения, имеющие разные значения лоренц-инвариантных параметров. Кроме того, мы ограничимся только решениями с положительной энергией, так как по предположению все уровни с отрицательной энергией заняты, а дырки в них описываются волновыми функциями, удовлетворяющими тому же уравнению (17).

Прежде всего рассмотрим вырожденный случай $p_5 = p_6 = 0$. В этом случае решение уравнения (17) имеет вид [16]

$$W = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu^0\mu^\alpha p_\alpha}{p_0}\right)W_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tau I_7 S\,|\vec{p}\,|}{p_0}\right)W_0,\ p_0^2 = p_\alpha^2,\ \alpha = 1, 2, 3,$$

где $I_7 = i\mu^5\mu^6$, S — спиральность.

$$S = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{i\mu^\beta\mu^\gamma p_\alpha}{|\vec{p}\,|},\quad |\vec{p}\,| = \sqrt{p_\alpha^2},\qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричная в α, β, γ величина, равная $+1$, если α, β, γ четная подстановка $1, 2, 3$, и -1, если — нечетная, W_0 определяется соотношением

$$W_0 = e^{ip_i x^i/\hbar}\psi,$$

где ψ — произвольный 8-компонентный спинор. Легко видеть, что операторы τ, I_7, S коммутируют между собой и имеют собственные значения ± 1. Ограничиваясь решениями с положительной энергией $p_0 = |\vec{p}| > 0$, получаем, что W_0 является собственной функцией оператора $\tau I_7 S$ с собственным значением $+1$. Следовательно, имеется всего четыре линейно независимых решения, соответствующих четырем возможным значениям $\tau = \pm 1$, $S = \pm 1$. При этом, поскольку 4-частицы являются незаряженными и имеют 4-массу, равную нулю, естественно отождествить их с двумя нейтрино и двумя антинейтрино [17, 18]. Если нейтрино характеризуется величинами (τ, S), то антинейтрино, получаемое преобразованием комбинированной инверсии (29), (30), характеризуется параметрами $(-\tau, -S)$ в согласии с экспериментом [19, 20]. По-видимому, одно из нейтрино является электронным, а другое — мюонным.

Рассмотрим теперь случай, когда или $p_5 \neq 0$, или $p_6 \neq 0$. Для большего удобства введем вместо p_5 и p_6 величины

$$q = \frac{p_5 l_5}{h}, \qquad n = \frac{p_6 l_6}{h},$$

где q и n представляют собой соответственно электрический и барионный заряды, выраженные в единицах элементарных зарядов. q и n принимают только целочисленные значения. Мы рассмотрим только те состояния, для которых $|q| \leqslant 1$, $|n| \leqslant 1$. Состояния с $|q|$ и $|n|$ большими единицы принципиально возможны, но они, видимо, по каким-то причинам являются короткоживущими и не наблюдаются. Причины этого должны объясняться квантовой теорией.

Для $n=0$ имеем 4 различных лоренц-инвариантных состояния (q, τ) с $q = \pm 1$, $\tau = \pm 1$. Естественно отождествить эти состояния с электроном, позитроном, положительным и отрицательным мюонами. Допустимым является, например, такое отождествление

$$e^- \to (-1, \tau),$$
$$e^+ \to (1, -\tau), \qquad \mu^- \to (-1, -\tau), \qquad \mu^+ \to (1, \tau),$$

где τ везде одно и то же и равно ± 1. Возможно, однако, что электрону соответствует линейная комбинация состояний $(-1, \tau)$, $(-1, -\tau)$. Вопрос о том, как именно следует произвести отождествление, требует детального рассмотрения. Существенным является то, что число возможных лоренц-инвариантных однозарядных состояний совпадает с числом заряженных лептонов *.

Рассмотрим теперь барионные состояния 6-фермиона. Это случай, когда $n = \pm 1$. Будем обозначать состояния с $n=1$ через B, а состояния с $n=-1$ через $\overline{B}$. Имеем 6 различных лоренц-инвариантных барионных состояния (n, q, τ), $n=1$, $q=0, \pm 1$, $\tau = \pm 1$. С другой стороны, в настоящее время известно по крайней мере 8 относительно устойчивых барионов (p, n, Λ, $\Sigma^{0,\pm}$, $\Xi^{0,-}$) и много различных резонансов. Кажется, что предлагаемая концепция не может объяснить все эти частицы. Однако это не так.

---

* Классификация лептонов очень близка к классификации элементарных частиц, предложенной Терлецким [21].

Следует иметь в виду, что барионные состояния отличаются от лептонных в том отношении, что барионы окружены вектонным полем и очень сильно взаимодействуют друг с другом. Например, барион с антибарионом могут образовать связанное состояние $B\bar{B}$ с большим дефектом массы [22, 23]*. Это состояние представляет собой 4-частицу целого спина с нулевым барионным зарядом, но, вообще говоря, ненулевым барионным моментом (дипольным, квадрупольным и т. д.). Во всяком случае эти моменты могут легко возникнуть под действием внешнего вектонного поля и такая частица будет взаимодействовать с барионами через вектонное поле, правда слабее, чем барион с барионом. По своим свойствам такая частица напоминает мезон, и ее естественно отождествить с мезоном (π, K). В зависимости от того, в каких состояниях находятся барион и антибарион, образующие мезон, мезоны могут получаться разные. При этом взаимодействие барион — антибарион следует рассматривать не в обычном 4-пространстве, а в 5-пространстве (x^i, x^5). Дело в том, что размер мезона меньше, чем l_5, и координата x^5 становится существенной. Электрический заряд бариона уже не будет сохраняться аналогично тому, как не сохраняется импульс электрона в атоме, а будет сохраняться только суммарный электрический заряд системы барион — антибарион.

Распад мезона осуществляется в результате переноса барионного заряда от бариона к антибариону, при этом и барион и антибарион превращаются в лептоны. Поскольку согласно (14) вектоны не могут иметь барионного заряда, такой перенос может быть осуществлен только фотоном, имеющим барионный заряд и, следовательно, массу порядка массы нуклона. Радиус действия такого фотонного поля очень мал, и распад довольно мало вероятен. Разумеется, все сказанное имеет очень приблизительный характер. Сколько-нибудь удовлетворительная картина может быть дана только квантовой теорией поля.

Кроме системы барион-антибарион возможны системы барион-антибарион-барион ($B\bar{B}B$). Аналогом такой системы для электромагнитного взаимодействия может служить ион $H^-(e^-p^+e^-)$. Система $B\bar{B}B$ имеет барионный заряд 1 и полуцелый спин. Масса такой системы должна быть порядка массы бариона. Существование такой системы возможно лишь благодаря обменным силам. Различные состояния такой системы могут быть отождествлены с гиперонами и резонансами.

Таким образом, состояния с $n=1$ B, $B\bar{B}B$ (а также $B\bar{B}B\bar{B}B$ и т. д., если они существуют) описывают барионы и барионные резонансы, а состояния $B\bar{B}$ описывают мезоны. Для детального описания всех этих состояний и вычисления их масс нужно пользоваться квантовой теорией поля, поскольку взаимодействие вектон — барион сильное и эффекты рождения пар играют существенную роль.

В заключение заметим, что состояния (4-частицы), различающиеся только величиной τ, имеют, вообще говоря, разную 6-массу μ. 6-масса вырождена по τ только для 6-частицы, не взаимодействующей с электромагнитным и вектонным полем. Включение взаимодействия снимает вырождение. Действительно, как легко вычислить, в состоянии W, удовлетворяющем уравнению (17), среднее значение квадрата 6-массы равно

$$(\overline{\mu^2}) \equiv (W,\ (\mu)^2 W) \equiv (W,\ p_A \gamma^{AB} p_B W) = -(W,\ VW),$$

* Получается нечто вроде модели Саката [24] с той разницей, что здесь возможность образования составных частиц следует из самой концепции 6-пространства.

где

$$V = -\frac{1}{2}\{\sigma^{AB} a_{AB} + \sigma^{ik}(b_k a_{6i} - b_i a_{6k})\} p_5 -$$

$$-\frac{1}{2}\{\sigma^{AB} b_{AB} + \sigma^{ik}(a_k b_{5i} - a_i b_{5k})\} p_6,$$

$$\sigma^{AB} = -i\hbar \frac{\mu^A \mu^B - \mu^B \mu^A}{2},$$

$$a_{AB} = \partial_A a_B - \partial_B a_A, \quad b_{AB} = \partial_A b_B - \partial_B b_A,$$

W нормировано на 1. $(W, W) = 1$.

По существу взаимодействие V описывает взаимодействие спина (шестимерного) с электромагнитным полем a_{AB} и вектонным полем b_{AB} аналогично тому, как это имеет место для обычного уравнения Дирака. Оценим среднее значение μ^2, предполагая, что поля a_{AB} и b_{AB} малые величины (малые в том смысле, что $V \ll p^2{}_0$). В этом случае для оценки с точностью до величин первого порядка малости достаточно взять в качестве W состояние свободной частицы, т. е. решение уравнения (17) с $a_i = b_i = 0$. Предположим, что W такое состояние и что или $p_5 \neq 0$, или $p_6 \neq 0$. Тогда можно выбрать такую систему координат, что $p_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$. Допустим далее, что в состоянии W проекция спина σ^{12} на ось x^3 и величина τ являются определенными и характеризуются соответственно собственными значениями $\sigma'_3 = \pm\hbar$ и $\tau' = \pm 1$. Несложный расчет с точностью до величин первого порядка малости дает в этом состоянии

$$(\overline{\mu^2}) \equiv (W)(\mu)^2 W) = \frac{1}{2}\Big\{\sigma'_3(\overline{a}_{12} p_5 + \overline{b}_{12} p_6) - \frac{\tau'\sigma'_3}{p_0}(\overline{a}_{36} p_5^2 - \overline{b}_{35} p_6^2) -$$

$$-\frac{i p_5 p_6}{p_0}(\overline{b'}_{05} + \overline{a}_{06}) + \sigma'_3(\overline{b_1 a_{62}} + \overline{b_2 a_{61}})\, p'_5 + \sigma'_3(\overline{a_1 b_{52}} - \overline{a_2 b_{51}})\, p_6\Big\},$$

где черта вверху означает усреднение по состоянию W.

Из этого выражения видно, что величина 6-массы и, следовательно, величина 4-массы зависят от знака τ', т. е. при наличии взаимодействия состояния с разными τ' будут иметь, вообще говоря, различные 4-массы. Иными словами, взаимодействие снимает вырождение по τ.

Таким образом, введение спиноров в 6-пространстве позволяет рассматривать все элементарные частицы как разные состояния одного шестимерного фермионного поля, а это очень удобно. Можно надеяться, что квантование этого поля позволит получить удовлетворительный спектр масс элементарных частиц и единую картину их взаимосвязи, аналогичную той, какую мы имеем для атомов.

Автор признателен проф. Я. П. Терлецкому за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов Ю. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 23, 1963.
2. Rayski J. Nucl. Phys., 7, 289, 1960.
3. Нгуен Хоанг Фыонг. Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции 1961 г. Изд-во МГУ, стр. 114.
4. Fock V., Iwanenko D. Zs. Phys., 54, 798, 1929.
5. Fock V., Iwanenko D. Zs. Phys., 30, 648, 1929.
6. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. ГИТТЛ, М., 1956.
7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 219.
8. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, т. 1. ИЛ, М., 1957.
9. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, М., 1959.

10. Majorana E. Nuovo Cimento, **14**, 171, 1937.
11. Iwanenko D. Zs. Phys. Sowjetunion, **13**, 141, 1938.
12. Heisenberg W., Kortel F., Mitter H. Zs. Naturforch., **10a**, 425, 1955.
13. Klein O. Nucl. Phys., **4**, 667, 1957.
14. Lee T. D., Jang C. N. Phys Rev., **104**, 256, 1956.
15. Landau L. D. Nucl. Phys., **3**, 127, 1957.
16. Sokolov A. A., Ternov I. M., Loskutov Yu. M. Ann. Phys. (Lpz.), **5**, 247, 1960.
17. Danby G., Gaillard J. M., Goulianos K., Lederman L. M., Mistry N., Schwartz M., Steinberger J. Phys. Rev. Letters., **9**, 36, 1962.
18. Sokolov A. A. Phys Letters, **3**, 211, 1963.
19. Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., Hudson R. P. Phys. Rev., **105**, 1413, 1957.
20. Garwin R. L., Lederman L. M., Weinrich M. Phys. Rev., **105**, 1415, 1957.
21. Терлецкий Я. П. ЖЭТФ, **44**, № 5, 1963.
22. Sakyrai J. J. Ann. Phys. (USA), **11**, 1, 1960.
23. Бродский А. М., Иваненко Д., Соколик Г. А. ЖЭТФ, **41**, 1307, 1961.
24. Sakata S. Progr. Theor. Phys., **16**, 686, 1956.

Поступила в редакцию
25.5 1963 г.

Кафедра
теоретической физики