Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

Х. Х. АХМАД

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

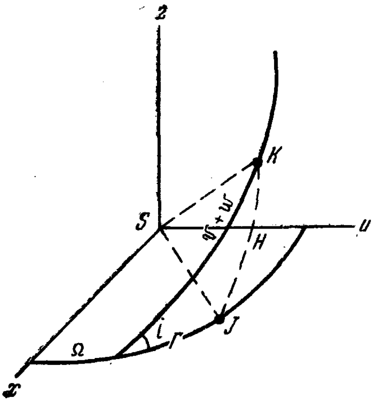
Вопрос о возмущениях элементов эллиптического движения в небесной механике изучен достаточно подробно, в то время как задаче о возмущенном гиперболическом движении уделялось мало внимания. Были известны только дифференциальные уравнения Ньютона для оскулирующих гиперболических элементов [1, 4], и сравнительно недавно в работе Н. Б. Еленевской [2] был рассмотрен вопрос о разложении пертурбационной функции гиперболического движения для внешнего варианта.

Настоящая работа посвящена построению аналитической теории возмущений гиперболических элементов. Для этого, прежде всего, нужно вывести дифференциальные уравнения Лагранжа для оскулирующих гиперболических элементов. Для аналитического интегрирования этих уравнений, содержащих частные производные от возмущающей функции по элементам, необходимо иметь разложение этой функции. Наиболее просто это разложение выводится для круговой ограниченной пространственной задачи трех тел. При этом нужно получить разложение возмущающей функции для двух вариантов: внутреннего, когда $r<a_j$, и внешнего, когда $r>a_j$, где r — расстояние возмущаемого тела до центрального, а a_j — расстояние возмущающего тела от центрального. Для внешнего варианта разложение получено Еленевской [2]. Оно представлено в виде ряда Фурье по всем угловым элементам, в частности по взаимной наклонности, а поэтому пригодно для всех значений этой величины, что представляет некоторое преимущество.

В данной работе получено разложение возмущающей функции для случая гиперболического движения по степеням отношений полуосей, которое применимо также при любых значениях взаимной наклонности. Метод, которым мы пользовались, был предложен Р. А. Ляхом [3] и применен им в разложении возмущающей функции для случая эллиптического движения. Следует сказать, что разложение Еленевской можно в конце концов также расположить по степеням отношения полуосей; это приведет к очень громоздкому выражению, неудобному для практических целей.

§ 1. Вывод дифференциальных уравнений для оскулирующих гиперболических элементов

Уравнения для оскулирующих эллиптических элементов были выведены Лагранжем методом, интересным своей общностью с [4]. Приведем основные результаты, полученные применением этого метода для вывода уравнений для оскулирующих элементов в гиперболическом случае.



Обозначим элементы орбиты через a, e, i, Ω, ω, N_0, где a — действительная полуось, e — эксцентриситет, i — взаимная наклонность, Ω — долгота восходящего узла, ω — угловое расстояние перецентра от узла, N_0 — аналог средней аномалии в эпоху, входящий в аналог уравнения Кеплера;

$$e \operatorname{sh} u - u = n'(t - t_0) + N_0,$$

где u — аналог эксцентрической аномалии, n'—аналог среднего движения.

Для составления уравнений указанных элементов методом скобок Лагранжа нужно (вследствие свойств этих скобок) вычислить только 15 скобок. В результате довольно длинного, но не сложного вычисления получим для скобок Лагранжа следующие значения:

$$\begin{gathered}
[\Omega, i] = -n'a^2\sqrt{e^2-1}\sin i,\quad [\omega, \Omega] = [\omega, i] = 0,\\
[a, i] = [e, i] = [N_0, \Omega] = [N_0, \omega] = [N_0, i] = 0,\\
[a, \Omega] = -\frac{1}{2}n'a\sqrt{e^2-1}\cos i,\quad [a, \omega] = -\frac{1}{2}n'a\sqrt{e^2-1},\\
[e, \Omega] = -n'a^2e\cos i / \sqrt{e^2-1},\quad [e, \omega] = n'a^2e / \sqrt{e^2-1},\\
[a, N_0] = \frac{1}{2}n'a,\quad [a, e] = [e, N_0] = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Подставив (1) в уравнения для оскулирующих элементов и разрешая последние относительно производных от элементов, получаем окончательные уравнения:

$$\begin{gathered}
\frac{da}{dt} = \frac{2}{n'a}\frac{\partial R}{\partial N_0},\\
\frac{de}{dt} = \frac{1}{n'a^2e}\left\{(e^2-1)\frac{\partial R}{\partial N^0} + \sqrt{e^2-1}\frac{\partial R}{\partial \omega}\right\},\\
\frac{dN_0}{dt} = -\frac{2}{n'a}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{e^2-1}{n'a^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n'a^2\sqrt{e^2-1}}\operatorname{cosec} i\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{n'a^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{n'a^2\sqrt{e^2-1}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{di}{dt} = \frac{1}{n'a^2\sqrt{e^2-1}}\left\{\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right\},
\end{gathered} \tag{2}$$

которые условимся называть уравнениями Лагранжа для движения гиперболического типа.

От системы уравнений (2) нетрудно перейти к уравнениям для какой-либо другой системы элементов, в частности к уравнениям следующего вида:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n'a}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\operatorname{th}\varphi(1+\operatorname{sh}\varphi)}{n'a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\operatorname{th}\varphi}{n'a^2}\frac{\partial R}{\partial \pi},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{n'a}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\operatorname{th}\varphi(1+\operatorname{sh}\varphi)}{n'a^2}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{n'a^2\operatorname{sh}\varphi}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n'a^2}\frac{\operatorname{cosec} i}{\operatorname{sh}\varphi}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\operatorname{th}\varphi}{n'a^2}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{n'a^2\operatorname{sh}\varphi}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{cosec} i}{n'a^2\operatorname{sh}\varphi}\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{n'a^2\operatorname{sh}\varphi}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),$$

где

$$e = \operatorname{ch}\varphi,\ \pi = \Omega + \omega,\ \varepsilon = \pi + N_0.$$

Заметим, что, следуя Лагранжу [5], мы можем получить из уравнений типа (2) уравнения для оскулирующих гиперболических элементов типа Ньютона в следующем виде:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2ae}{e^2-1}\sin v\widetilde{S} - \frac{2a^2}{r}\widetilde{T},$$

$$\frac{de}{dt} = \sin v\widetilde{S} + (\cos v + \sec F)\widetilde{T},$$

$$\frac{dN_0}{dt} = \left(\frac{2r}{a\sqrt{e^2-1}} - \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\cos v\right)\widetilde{S} + \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\widetilde{T},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\frac{\sin \nu}{\sin i}\widetilde{W},$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{e}\widetilde{S} + \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\widetilde{T} + \frac{r}{p}\sin\nu\operatorname{tg}\frac{i}{2}\widetilde{W},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\cos\nu\widetilde{W},$$

где r — радиус-вектор, возмущенной точки, v — истинная аномалия, ν — аргумент широты ($\nu = v + \omega$), F — вспомогательная переменная, связанная с v уравнением

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}\frac{F}{2},$$

p — параметр орбиты,

$$\tilde{S},\ \tilde{T},\ \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,S,\ \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,T,\ \sqrt{\frac{p}{\mu}}\,W,$$

где S, T, W — компоненты возмущающего ускорения по радиусу-вектору, по направлению, перпендикулярному к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты и нормали к плоскости орбиты.

Рассмотрим в качестве примера применения уравнений возмущенного гиперболического движения типа (2) задачу о возмущениях гиперболических элементов, обусловливаемых нецентральностью поля притяжения.

Возьмем вместо t в качестве новой независимой переменной аргумент широты $\nu = v + \omega$. Дифференцируя ν по t, находим

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{dv}{dt}\right)' + \frac{d\omega}{dt},$$

где $\left(\frac{dv}{dt}\right)'$ — производная, соответствующая зависимости v от времени, только через посредство оскулирующих элементов.

Далее, применяя основную операцию к формуле

$$x\cos\Omega + y\sin\Omega = r\cos\nu$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2},$$

окончательно получаем

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{n'(1+e\cos v)^2}{(e^2-1)^{3/2}}\,\theta,$$

где

$$\theta = 1 - \frac{e^2-1}{n'^2a^2}\,\frac{\operatorname{ctg} i}{(1+e\cos v)^2}\,\frac{\partial R}{\partial i}.$$

Следовательно, система уравнений Лагранжа (2) примет следующую форму:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\nu} &= -2K\frac{\partial R}{\partial N_0},\\
\frac{de}{d\nu} &= K\frac{e^2-1}{ae}\frac{\partial R}{\partial N_0} + K\frac{\sqrt{e^2-1}}{ae}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{dN_0}{d\nu} &= 2K\frac{\partial R}{\partial a} - K\frac{e^2-1}{ae}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\Omega}{d\nu} &= K\frac{\operatorname{cosec} i}{a\sqrt{e^2-1}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\omega}{d\nu} &= -K\frac{\sqrt{e^2-1}}{ae}\frac{\partial R}{\partial e} - K\frac{\operatorname{ctg} i}{a\sqrt{e^2-1}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{di}{d\nu} &= \frac{K}{a\sqrt{e^2-1}}\operatorname{ctg} i\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{K}{a\sqrt{e^2-1}}\operatorname{cosec} i\,\frac{\partial R}{\partial \Omega},
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$K = \frac{1}{\theta}\,\frac{(e^2-1)^{3/2}}{n'^2a(1+e\cos v)^2}.$$

Предположим, что эллипсоид инерции притягивающего тела является эллипсоидом вращения, мало отличающимся от сферы (Oz — ось вращения). Обозначая через A экваториальный, через C—полярный моменты инерции тела и ограничиваясь учетом первых степеней малых величин, запишем возмущающую функцию в виде

$$R=\frac{\varepsilon'}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{z^2}{r^2}\right)=\frac{\varepsilon'}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\sin^2 i\sin^2\nu\right), \tag{4}$$

где

$$\varepsilon'=\frac{3\mu(C-A)}{2m_0},\quad \mu=k^2(m_0+m),$$

причем m_0 — масса притягивающего тела, m — масса притягиваемой точки.

Для того чтобы вычислить производные R по элементам, нужно сначала вычислить производные r, ν по элементам, как следует из (4).

В результате дифференцирования получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a},\qquad \frac{\partial\nu}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial e}=a\cos v,\qquad \frac{\partial\nu}{\partial e}=-\frac{a\sin v}{r}\left(1+\frac{r}{p}\right),$$

$$\frac{\partial r}{\partial N_0}=\frac{ae}{\sqrt{e^2-1}}\sin v,\qquad \frac{\partial\nu}{\partial N_0}=\frac{a^2}{r^2}\sqrt{e^2-1},$$

$$\frac{\partial r}{\partial\Omega}=0,\qquad \frac{\partial\nu}{\partial\Omega}=1,$$

$$\frac{\partial r}{\partial\omega}=-\frac{ae}{\sqrt{e^2-1}}\sin v,\qquad \frac{d\nu}{\partial\omega}=-\frac{a^2}{r^2}\sqrt{e^2-1}+1,$$

$$\frac{\partial r}{\partial i}=0,\qquad \frac{\partial\nu}{\partial i}=0,$$

с помощью которых из (4) очень просто находятся производные R по элементам. Подставляя эти производные в (3) и ограничиваясь величинами первого порядка относительно ε' (тогда нужно принять $\theta=1$), получим уравнения для оскулирующих элементов в следующем виде:

$$\frac{da}{d\nu}=\frac{2\varepsilon'}{n'^2a^4(e^2-1)^3}\{e\sin v(1+e\cos v)^2(1-3\sin^2 i\sin^2\nu)+$$
$$+(1+\cos v)^3\sin^2 i\sin 2\nu\},$$

$$\frac{de}{d\nu}=\frac{\varepsilon'}{n'^2a^5(e^2-1)^2}\{\sin v(1+e\cos v)^2(1-3\sin^2 i\sin^2\nu)+$$
$$+(1+e\cos v)(e+2\cos v+e\cos^2 v)\sin^2 i\sin 2\nu\},$$

$$\frac{dN_0}{d\nu}=\frac{\varepsilon'}{n'a^5(e^2-1)^{3/2}}\{(1+e\cos v)(2e-\cos v-e\cos^2 v)(1-3\sin^2 i\sin^2\nu)+$$
$$+(1+e\cos v)(2+e\cos v)\sin^2 i\sin v\sin 2\nu\},$$

$$\frac{d\Omega}{d\nu}=-\frac{2\varepsilon'}{n'^2a^5(e^2-1)^2}(1+e\cos v)\sin^2\nu\cos i,$$

$$\frac{d\pi}{dv}=\frac{\varepsilon'}{n'^2a^5e(e^2-1)^2}\{\cos v(1+e\cos v)^2(1-3\sin^2 i\sin^2\nu)-$$

$$-e\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\sin 2i\sin^2\nu(1+e\cos v)-(1+e\cos v)(2+e\cos v)\sin^2 i\sin v\sin 2\nu\},$$

$$\frac{di}{du}=\frac{\varepsilon'}{2n'^2a^5(e^2-1)^2}(1+e\cos v)\sin 2i\sin 2\nu.$$

Для вычисления возмущений элементов первого порядка проинтегрируем последнюю систему, считая элементы постоянными.

Нами выведены выражения $\delta^{(1)}a$, $\delta^{(1)}e$, $\delta^{(1)}i$, $\delta^{(1)}\omega$, $\delta^{(1)}\Omega$, $\delta^{(1)}N_0$ для возмущений элементов первого порядка. Однако мы ограничимся только приведением формул для $\delta^{(1)}i$, $\delta^{(1)}e$, $\delta^{(1)}a$.

$$\delta^{(1)}i=\frac{\varepsilon'}{4n'^2a^5(e^2-1)^2}\cos 2u+\mathrm{const},$$

$$\delta^{(1)}e=\frac{\varepsilon'}{n'^2a^5(e^2-1)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\cos v+\frac{1}{2}e\cos 2v+\right.$$

$$\left.+\frac{e^2}{12}\cos 3v\right]-\frac{3\varepsilon'}{2n'^2a^5(e^2-1)^2}\sin^2 i\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\left[\cos(\nu+\omega)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\cos(3\nu-\omega)\right]-\frac{e}{8}\cos 2(2\nu-\omega)-\frac{\nu}{2}e\sin 2\omega+\frac{e^2}{8}\times$$

$$\left.\times\left[-\frac{1}{5}\cos(5\nu-3\omega)+\cos(\nu-3\omega)\right]\right\}-\frac{\sin^2 i}{n'^2a^5(e^2-1)^2}\left\{-\frac{5}{4}e\cos 2\nu-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\left(1+\frac{3e^2}{4}\right)\cos(3\nu-\omega)\right]-\left(1+\frac{3e^2}{4}\right)\cos(\nu+\omega)-$$

$$-\frac{3e}{16}\cos 2(2\nu-\omega)+\frac{3\nu}{4}e\sin 2\omega+\frac{e^2}{8}\left[-\frac{1}{5}\cos(5\nu-3\omega)+\right.$$

$$\left.\left.+\cos(\nu-3\omega)-\frac{1}{3}\cos(3\nu-\omega)-\cos(\nu+\omega)\right]\right\}+\mathrm{const}.$$

$$\delta^{(1)}a=\frac{2\varepsilon' e}{n'^2a^4(e^2-1)^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[-\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\cos v-\frac{1}{2}e\cos 2v-\right.$$

$$\left.-\frac{e^2}{12}\cos 3v\right]+\frac{3\varepsilon' e}{n'^2a^4(e^2-1)^3}\sin^2 i\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\left[\cos(\nu+\omega)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\cos(3\nu-\omega)\right]-\frac{e}{8}\cos 2(2\nu-\omega)-\frac{\nu}{2}e\sin 2\omega+$$

$$\left.+\frac{e^2}{8}\left[-\frac{1}{5}\cos(5\nu-3\omega)+\cos(\nu-3\omega)\right]\right\}+$$

$$+\frac{2\varepsilon'}{n'^2a^4(e^2-1)^3}\sin^2 i\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{3e^2}{2}\right)\cos 2\nu+\right.$$

$$+\frac{3e}{2}\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\left[-\sin(\nu+\omega)+\frac{1}{3}\sin(3\nu-\omega)\right]-$$

$$-\frac{3e^2}{16}\cos 2(2\nu-\omega)+\frac{3e^2}{4}\sin 2\omega+\frac{e^3}{8}\left[-\frac{1}{5}\cos(5\nu-3\omega)+\right.$$

$$\left.\left.+\cos(\nu-3\omega)\right]\right\}+\mathrm{const}.$$

Таким образом, если условиться называть вековыми те возмущения, которые пропорциональны ν, то действительная полуось a, эксцентриситет e и наклонность i не имеют вековых возмущений первого порядка.

§ 2. Разложение пертурбационной функции в ряд Внутренний вариант

Пусть тело K движется относительно некоторого центрального тела S по гиперболе (в каждый момент), а тело J в свою очередь по кругу. Тогда возмущение, вызываемое телом J в движении тела K, характеризуется следующей пертурбационной функцией:

$$R = k^2 m_j R_1,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{D} - \frac{r \cos H}{a_j^2}, \tag{5}$$

D — расстояние K от J, H — угол между SK, SJ, m_j — масса J, a_j — расстояние от S до J, r — радиус-вектор K.

Для определенности будем называть возмущаемое тело K — кометой, возмущающее тело J — Юпитером, а центральное тело S — Солнцем.

Прежде всего займемся разложением (5) для случая внутреннего варианта, т. е., когда $r < a_j$. В этом случае главная часть возмущающей функции $\frac{1}{D}$ записывается в виде

$$\frac{1}{D} = (a_j^2 - 2a_j r \cos H + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_j}(1 - 2h \cos H + h^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

где

$$h = \frac{r}{a_j} < 1.$$

Но $(1 - 2h \cos H + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ является, как известно, производящей функцией полиномов Лежандра. Поэтому можно написать

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{a_j}(1 - 2h \cos H + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_j}\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos H),$$

где через $P_n(\cos H)$ обозначен полином Лежандра n-го порядка.

Поскольку $P_0(\cos H) = 1$, $P_1(\cos H) = \cos H$, получаем

$$a_j R_1 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} h^n P_n(\cos H). \tag{7}$$

Формулы сферической тригонометрии дают

$$\cos H = \cos(v + \omega) \cos \Gamma + \sin(v + \omega) \sin \Gamma \cos i,$$

где

$$\Gamma = \sigma_j - \Omega, \quad \sigma_j = \widehat{XSY}.$$

Вводя обозначения $\theta = \sin^2 \frac{i}{2}$, $\varphi = \cos^2 \frac{i}{2}$, получим $\cos H = \theta \cos(v + \omega + \Gamma) + \varphi \cos(v + \omega - \Gamma)$.

Поэтому имеем

$$P_1(\cos H) = \theta \cos(v + \omega + \Gamma) + \varphi \cos(v + \omega - \Gamma),$$

$$P_2(\cos H) = \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}(\theta^2 + \varphi^2) - 1 + \frac{3}{2}\theta^2 \cos[2(v + \omega) + 2\Gamma] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\varphi^2 \cos\left[2(v + \omega) - 2\Gamma\right] + 3\theta\varphi\cos 2\Gamma + 3\theta\varphi \cos 2(v + \omega)\right\}.$$

Р. А. Лях [3] показал методом математической индукции, что полиномы Лежандра любого порядка могут быть представлены формулой

$$P_n(\cos H) = \sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi) \cos[(n - 2k')(v + \omega) + (n - 2k)\Gamma],$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ обозначает наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{n}{2}$. Коэффициенты $a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi)$ в общем виде имеют следующую форму:

$$a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi) = \gamma_{k'}^{(n)} \sum_{l=0}^{k'} \frac{(-1)^l (2n - l)!}{2^{2n-2l-1}(n - l)!} \sum_{s=0}^{k'-l} \frac{\theta^{n-2l-2s-k+k'} \varphi^{2s+k-k'}}{(s + k - k')!\,(n - k - l - s)!\,(k' - l - s)!}$$

где

$$\gamma_{k'}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k' \neq \frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{при } k' = \frac{n}{2} \end{cases}.$$

Следовательно (опуская член, не зависящий от координат кометы), формула (7) примет следующий вид:

$$a_j R_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a_j}\right)^n \sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi) \cos[(n - 2k')(v + \omega) + (n - 2k)\Gamma].$$

Учитывая, что для гиперболического движения $r = -a\,(1 - e\,\mathrm{ch}\,u)$, где u — аналог эксцентрической аналогии, и обозначая через $Q_{k',k}^{(n)}$ следующую величину: $Q_{k',k}^{(n)} = (n - 2k')\,\omega + (n - 2k)\,\Gamma$, получим

$$a_j R_1 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1) \left(\frac{a}{a_j}\right)^n \sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi)\,[\{(1 - e\,\mathrm{ch}\,u)^n \cos(n - 2k')\,v\} \times$$

$$\times \cos\theta_{k,k}^{(n)} - \{(1 - e\,\mathrm{ch}\,u)^n \sin(n - 2k')\,v\} \sin Q_{k',k}^{n}]. \qquad (8)$$

По известным формулам Эйлера имеем

$$\cos sv = \sum_{m=0}^{E\left(\frac{s}{2}\right)} f_m^{(1)}(s)\cos^{s-2m} v, \quad \sin sv = \sum_{m=0}^{E\left(\frac{s-1}{2}\right)} f_m^{(2)}(s)\cos^{s-2m-1} v \sin v, \tag{9}$$

где

$$f_m^{(1)}(s) = (-1)^m \frac{2^{s-2m-1} s(s-m-1)\ldots(s-2m+1)}{m!},$$

$$f_m^{(2)}(s) = (-1)^m \frac{2^{s-2m-1}(s-m-1)\ldots(s-2m)}{m!}.$$

Как известно, для движения гиперболического типа имеем

$$\cos v = \frac{\operatorname{ch} u - e}{1 - e\operatorname{ch} u}, \quad \sin v = -\sqrt{e^2-1}\,\frac{\operatorname{sh} u}{1 - e\operatorname{ch} u}. \tag{10}$$

Из (9) видно, что разложения $\frac{\sin}{\cos}(n-2k')v$ содержат члены вида $\cos^\nu v$ или $\sin v\cos^{\nu-1} v$ с соответствующими коэффициентами так, что $\nu \leqslant n-2k'$. Следовательно, $(1-e\operatorname{ch})^n \frac{\sin}{\cos}(n-2k')v$ не содержат $(1-e\operatorname{ch} u)$ в знаменателе, так как $n-\nu \geqslant 2k' \geqslant 0$.

Подставляя (10) в (9), получаем при $s = n-2k'$

$$(1-e\operatorname{ch} u)^n \cos(n-2k')v = \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'}{2}\right)} f_m^{(1)}(n-2k')\left(\frac{\operatorname{ch} u - e}{1-e\operatorname{ch} u}\right)^{n-2k'-2m} \times$$

$$\times (1-e\operatorname{ch} u)^n, \tag{11}$$

но

$$\frac{\operatorname{ch} u - e}{1-e\operatorname{ch} u} = -\frac{1}{e}\left(1 + \frac{e^2-1}{1-e\operatorname{ch} u}\right).$$

Тогда, воспользовавшись биномом Ньютона, приведем (11) к виду

$$(1-e\operatorname{ch} u)^n \cos(n-2k')v = \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'}{2}\right)} f_m^{(1)}(n-2k')(-1)^n \times$$

$$\times \left(\frac{1}{e}\right)^{n-2k'-2m} \sum_{\gamma=0}^{n-2k'-2m} C_{n-2k'-2m}^{\gamma}(e^2-1)^\gamma (1-e\operatorname{ch} u)^{n-\gamma}. \tag{12}$$

Аналогично получим

$$(1-e\operatorname{ch} u)^n \sin(n-2k')v = -\sqrt{e^2-1} \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'-1}{2}\right)} \times$$

$$\times f_m^{(2)}(n-2k')(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-2k'-2m-1} \sum_{\gamma=0}^{n-2k'-2m-1} \times$$

$$\times C_{n-2k'-2m-1}^{\gamma}(e^2-1)^\gamma (1-e\operatorname{ch} u)^{n-\gamma-1}\operatorname{sh} u. \tag{13}$$

Разложим $(1-e\operatorname{ch} u)^{\varkappa}$, где $\varkappa$ — целое положительное число, по гиперболическому косинусу кратных u. Для этого нужно определить коэффициенты $A_{\beta}^{(\varkappa)}$, где

$$(1-e\operatorname{ch} u)^{\varkappa}=\sum_{\beta=0}^{\varkappa} 2A_{\beta}^{(\varkappa)}\operatorname{ch}\beta u. \tag{14}$$

С этой целью положим $e=\sin\psi=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, где $\alpha=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ (ψ — комплексная величина). Положим также $z=E^u$, где E — основание натуральных логарифмов. Тогда (14) будет иметь следующую форму:

$$(-1)^{\varkappa}\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa}}\frac{(z-\alpha)^{\varkappa}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\varkappa}}{z^{\varkappa}}=\frac{A_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{z^{\varkappa}}+\frac{A_{0}^{(\varkappa)}}{z^{\varkappa-1}}+\ldots$$
$$\ldots+2A^{(\varkappa)}+\ldots+A_{\varkappa-1}^{(\varkappa)}z^{\varkappa-1}+A_{\varkappa}^{(\varkappa)}z^{\varkappa}.$$

По теореме о коэффициентах Лорана находим

$$A_{\beta}^{(\varkappa)}=(-1)^{\varkappa}\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{(z-\alpha)^{\varkappa}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\varkappa}}{z^{\varkappa+\beta+1}}dz, \qquad (\beta\neq 0),$$

$$A_{0}^{(\varkappa)}=\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{(z-\alpha)^{\varkappa}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\varkappa}}{z^{\varkappa+1}}dz,$$

где γ' — замкнутый контур, заключающий полюс $z=0$. Согласно теории вычетов

$$A_{\beta}^{(\varkappa)}=(-1)^{\varkappa}\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa}}\frac{1}{(\varkappa+\beta)!}\left\{\frac{d^{\varkappa+\beta}}{dz^{\varkappa+\beta}}\left[(z-\alpha)^{\varkappa}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\varkappa}\right]\right\}_{z=0},$$

$$A_{0}^{(\varkappa)}=\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa+1}}\frac{1}{\varkappa!}\frac{d^{\varkappa}}{dz^{\varkappa}}\left\{\left[(z-\alpha)^{\varkappa}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\varkappa}\right]\right\}_{z=0}.$$

В результате применения правила Лейбница о производной n-го порядка от произведения получим

$$\left\{\frac{d^{\varkappa+\beta}}{dz^{\varkappa+\beta}}\left[(z-\alpha)^{\varkappa}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^{\varkappa}\right]\right\}_{z=0}=\sum_{\nu=0}^{\varkappa+\beta}C_{\varkappa+\beta}^{\nu}\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\varkappa-\nu+1)\times$$
$$\times\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\nu-\beta+1)(-\alpha)^{\varkappa+\beta-2\nu}.$$

Следовательно,

$$A_{\beta}^{(\varkappa)}=(-1)^{\beta}\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa}}\frac{1}{(\varkappa+\beta)!}\sum_{\nu=0}^{\varkappa+\beta}C_{\varkappa+\beta}^{\nu}\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\varkappa-\nu+1)\times$$
$$\times\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\nu-\beta+1)\alpha^{\varkappa+\beta-2\nu},$$

$$A_{0}^{(\varkappa)}=\frac{e^{\varkappa}}{2^{\varkappa+1}}\frac{1}{\varkappa!}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}C_{\varkappa}^{\nu}\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\varkappa-\nu+1)\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\nu+1)\alpha^{\varkappa-2\nu}.$$

Подставляя (14) в (12), получим

$$(1 - e\operatorname{ch} u)^n \cos(n - 2k')v = (-1)^n \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'}{2}\right)} f_m^{(1)}(n-2k')\left(\frac{1}{e}\right)^{n-2k'-2m} \times$$

$$\times \sum_{\gamma=0}^{n-2k'-2m} C_{n-2k'-2m}^{\gamma}(e^2-1)^{\gamma} \sum_{\beta=0}^{n-\gamma} A_\beta^{n-\gamma} \operatorname{ch}\beta u. \qquad (15)$$

Теперь, дифференцируя (14) по u, предполагая, что $\varkappa = n - \gamma$, получим

$$(1 - e\operatorname{ch} u)^{n-\gamma-1} \operatorname{sh} u = -\frac{1}{e(n-\gamma)} \sum_{\beta=0}^{n-\gamma} 2\beta A_\beta^{(n-\gamma)} \operatorname{sh}\beta u. \qquad (16)$$

Подставив (16) в (13), получим

$$(1 - e\operatorname{ch} u)^n \sin(n-2k')v = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{e^2-1}}{e} \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'-1}{2}\right)} \times$$

$$\times f_m^{(2)}(n-2k')\left(\frac{1}{e}\right)^{n-2k'-2m-1} \sum_{\gamma=0}^{n-2k'-2m-1} C_{n-2k'-2m-1}^{\gamma}(e^2-1)^{\gamma}\frac{1}{n-\gamma} \times$$

$$\times \sum_{\beta=0}^{n-\gamma} 2\beta A_\beta^{(n-\gamma)} \operatorname{sh}\beta u. \qquad (17)$$

Подставляя (15), (17) в (8), получим для движения гиперболического типа внутреннего варианта разложение пертурбационной функции по степеням отношения полуосей в следующем виде:

$$a_j R_1 2 \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{a_j}\right)^n\left(\frac{1}{e}\right)^n \sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} e^{2k'} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi) \times$$

$$\times \left\{\left[\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'}{2}\right)} e^{2m} f_m^{(1)}(n-2k') \sum_{\gamma=0}^{n-2k'-2m} (e^2-1)^{\gamma} \times\right.\right.$$

$$\left.\times C_{n-2k'-2m}^{\gamma} \sum_{\beta=0}^{n-\gamma} A_\beta^{(n-\gamma)} \operatorname{ch}\beta u\right] \cos Q_{k',k}^{(n)} + \sqrt{e^2-1}\, \times$$

$$\times \left[\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'-1}{2}\right)} e^{2m} f_m^{(2)}(n-2k') \sum_{\gamma=0}^{n-2k'-2m-1} (e^2-1)^{\gamma}\frac{1}{n-\nu} \times\right.$$

$$\left.\left.\times C_{n-2k'-2m-1}^{\gamma} \sum_{\beta=0}^{n-\gamma} \beta A_\beta^{(n-\gamma)} \operatorname{ch}\beta u\right] \sin Q_{k',k}^{(n)}\right\}.$$

Внешний вариант

В случае внешнего варианта главная часть пертурбационной функции записывается в виде

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{r}\left(1-2h_1\cos H+h_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где в этом случае $h_1=\frac{a_j}{r}<1$. Тогда, следуя Лежандру, $\frac{1}{D}$ разлагается в следующий абсолютно сходящийся ряд:

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}h_1^nP_n(\cos H).$$

Повторив сказанное в первой части этого параграфа, напишем

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{a_j}{a}\right)^n\sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}a_{k',k}^{(n)}(\theta,\varphi)\left[\frac{\cos(n-2k')v}{(1-e\operatorname{ch}u)^{n+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\cos Q_{k',k}^{(n)}-\frac{\sin(n-2k')v}{(1-e\operatorname{ch}u)^{n+1}}\sin Q_{k',k}^{(n)}\right]. \qquad (18)$$

Нетрудно видеть, в отличие от случая внутреннего варианта, что величины $\frac{1}{(1-e\operatorname{ch}u)^{n+1}}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-2k')v$ содержат члены только с отрицательными степенями $(1-e\operatorname{ch}u)$. Мы не будем заниматься разложением двух последних выражений, поскольку это изложено в [2]. Окончательные результаты этих разложений имеют следующий вид:

$$\frac{\cos(n-2k')v}{(1-e\operatorname{ch}u)^{n+1}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_\nu^{(n,n-2k')}(e)E^{-\nu u}, \qquad (19)$$

$$\frac{\sin(n-2k')v}{(1-e\operatorname{ch}u)^{n+1}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu^{(n,n-2k')}(e)E^{-\nu u}, \qquad (20)$$

где

$$\Psi_\nu^{(n,n-2k')}(e)=\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'}{2}\right)}f_{(m-2k')}^{(1)}\sum_{j=0}^{n-2k'-2m}(-1)^j\times$$

$$\times\frac{(n-2k'-2m)\ldots(n-2k'-2m-j+1)}{j!\,e^{n-2k'-2m}}(1-e^2)^{n-2k'-2m-j}\times$$

$$\times\tilde{J}_\nu(2n-2k'-2m-j+1;\ e),$$

$$\Phi_\nu^{(n,n-2k')}(e)=\nu\sqrt{e^2-1}\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-2k'-1}{2}\right)}f_m^{(2)}(n-2k')\sum_{j=0}^{n-2k'-2m-1}(-1)^j\times$$

$$\times\frac{(n-2k'-2m-1)\ldots(n-2k'-2m-j)}{j!\,(2n-2k'-2m-j)_e^{n-2k'-2m}}(1-e^2)^{n-2k'-2m-j-1}\times$$

$$\times\tilde{J}_\nu(2n-2k'-2m-j;\ e).$$

Функция $\widetilde{J}_\nu(s, e)$, встречающаяся в последних формулах, определяется многочленом

$$\widetilde{J}_\nu(s, e) = \frac{(-1)^s 2^s}{e^\nu (v-s)!} \sum_{\sigma=0}^{E\left(\frac{\nu-s}{2}\right)} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma)(\nu-\sigma-1)\dots(\sigma+1)}{(\nu-s-2\sigma)} \times$$

$$\times s(s+1)\dots(\nu-\sigma-1)\frac{e^{2\sigma}}{2^{2\sigma}}.$$

Тогда, подставляя (19), (20) в (18), получим для $\frac{1}{D}$ следующее разложение:

$$\frac{a}{D} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{a_j}{a}\right) \sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)}(\theta, \varphi) \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[\Psi_\nu^{(n,n-2k')}(e)\times$$

$$\times \cos Q_{k',k} - \Phi_\nu^{(n,n-2k')}(e)\sin Q_{k',k}^{(n)}\Big]E^{-\nu u}. \qquad (21)$$

Дополнительная часть имеет следующую форму:

$$\frac{r\cos H}{a_j^2} = \frac{a}{a_j^2}\{[\cos\omega\cos\Gamma + \sin\omega\sin\Gamma\cos i](e-\operatorname{ch} u) - \sqrt{e^2-1}\times$$

$$\times[\sin\omega\cos\Gamma - \cos\omega\sin\Gamma\cos i]\operatorname{sh} u\}. \qquad (22)$$

Сложив (21) и (22), получим окончательное выражение для разложения пертурбационной функции по степеням отношения полуосей в случае гиперболического движения внешнего варианта. Оно имеет следующую форму:

$$aR_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{a_j}{a}\right)^n \sum_{k'=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)}(\theta\varphi) \sum_{\nu=0}^{\infty}[\Psi_\nu^{(n,n-2k')}(e)\cos Q_{k',k}^{(n)} -$$

$$-\Phi_\nu^{(n,n-2k')}(e)\sin Q_{k',k}^{(n)}]E^{-\nu u} - \left(\frac{a}{a_j}\right)^2\{[\cos\omega\cos\Gamma +$$

$$+\sin\omega\sin\Gamma\cos i](e-\operatorname{ch} u) - \sqrt{e^2-1}[\sin\omega\cos\Gamma -$$

$$-\cos\omega\sin\Gamma\cos i]shu\}. \qquad (23)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bauschinger. Die Bahnbestimung der Himmelskörper. Leipzig, 1906.
2. Еленевская Н. Б. «Бюл. ИТА», **VI**, № 7(80), 1957.
3. Лях Р. А. «Бюл. ИТА», **VII**, № 6(89), 1959.
4. Дубошин Г. Н. Основные задачи и методы. В кн.: «Небесная механика». Госиздат, М., 1963.
5. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика, т. 2. Гостехиздат, М., 1956.
6. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. Госиздат, М., 1961.
7. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. II. ОНТИ, 1937.
8. Smart W. M. Celestial Mechanics. Longmans, 1953.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. Госиздат, М., 1961.

Поступила в редакцию
16.7 1963 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии