Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

А. К. БАХТАДЗЕ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ КАСКАДНОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЕЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ И ВИДЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА

Получено решение уравнений одномерной каскадной теории ливней (в приближении A и B) при произвольных граничных условиях и виде функции источника. Использованный метод решения позволяет, не конкретизируя форму граничных условий и функций источников, найти общий вид функций распределения числа частиц. Рассмотрен новый вид функции источника, применимый при расчетах различных моделей широких атмосферных ливней.

Наиболее полное приближенное решение уравнений одномерной теории без функций источников дано в [1] для частных граничных условий. В работе [2] было дано точное решение этих уравнений для тех же граничных условий. В [3] показано, что приближенное решение [1] в пределах точности исходных положений теорий (порядка нескольких процентов) совпадает с точным [2]. В [3] было получено решение уравнений без функций источников уже для ряда частных граничных условий, а также решение наиболее общих уравнений каскадной теории с функциями источников

$$\frac{\partial P(E_0, E, t)}{\partial t} = -A'P(E_0, E, t) + B'\Gamma(E_0, E, t) + $$

$$+ \beta \frac{\partial P(E_0, E, t)}{\partial E} + S_p(E, t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \Gamma(E_0, E, t)}{\partial t} = C'P(E_0, E, t) - \sigma\Gamma(E_0, E, t) + S_\Gamma(E, t).$$

Однако и в [3] были рассмотрены только некоторые частные виды граничных условий и функций источников, причем использованный метод решения не позволял получить окончательные формулы, не конкретизируя форму граничных условий и функций источника, что затрудняло использование формул теории при анализе экспериментов. Поэтому крайне важно получить общее решение уравнений при произвольных граничных условиях и виде функций источника. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Введем операторы преобразований Меллина и Лапласа M_s и L_λ [1, 4] и, применив их к (1), получим при $\beta=0$

$$\lambda P(E_0, s, \lambda) = -A_s P(E_0, s, \lambda) + B_s \Gamma(E_0, s, \lambda) + P_s + S_p(s, \lambda),$$
$$\lambda \Gamma(E_0, s, \lambda) = C_s P(E_0, s, \lambda) - \sigma_0 \Gamma(E_0, s, \lambda) + \Gamma_s + S_p(s, \lambda), \tag{2}$$

где $P_s = M_s P(E_0, E, 0)$, $\Gamma_s = M_s \Gamma(E_0, E, 0)$, функции A_s, B_s, C_s определены из (1). Решая систему (2) для $P(E_0, s, \lambda)$ и $\Gamma(E_0, s, \lambda)$, получим

$$P(E_0, s, \lambda) = \left(P_s + S_p(s, \lambda) + B_s \frac{\Gamma_s + S_\Gamma(s, \lambda)}{\lambda + \sigma_0}\right) \frac{1}{\psi(s, \lambda)}, \tag{3}$$

$$\Gamma(E_0, s, \lambda) = \left(\Gamma_s + S_\Gamma(s, \lambda) + C_s \frac{P_s + S_p(s, \lambda)}{\lambda + \sigma_0} + \right.$$
$$\left. + (A_s - \sigma) \frac{\Gamma_s + S_\Gamma(s, \lambda)}{\lambda + \sigma_0}\right) \frac{1}{\psi(s, \lambda)},$$

где функции $\psi(s, \lambda)$, $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ определены в [1].

Применяя к [3] преобразование L_λ^{-1} и воспользовавшись теоремой о свертке [4], получим

$$P(E_0, s, t) = \sum_{i=1}^{2} \left[P_s + \frac{B_s \Gamma_s}{\lambda_i(s) + \sigma_0} + \int_0^t dt \left(S_p(s, \tau) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{B_s S_\Gamma(s, \tau)}{\lambda_i(s) + \sigma_0}\right) e^{-\lambda_i(s)\tau}\right] H_i(s)\, e^{\lambda_i(s) t},$$

$$\Gamma(E_0, s, t) = \sum_{i=1}^{2} \left[\Gamma_s + \frac{C_s P_s + (A_s - \sigma_0)\Gamma_s}{\lambda_i(s) + \sigma_0} + \int_0^t d\tau \left(S_\Gamma(s, \tau) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{C_s S_p(s, \tau) + (A_s - \sigma_0) S_\Gamma(s, \tau)'}{\lambda_i(s) + \sigma_0}\right) e^{-\lambda_i(s)\tau}\right] H_i(s)\, e^{\lambda_i(s) t}. \tag{4}$$

Получим интегральные и дифференциальные распределения по энергии, применив оператор M_s^{-1} к $P(E_0, s, t)|_s$, $\Gamma(E_0, s, t)|s$ и $P(E_0, s, t)$, $\Gamma(E_0, s, t)$. Получившийся интеграл по E вычисляется, как обычно, методом перевала [1,4].

Чтобы найти решение уравнений (1) при $\beta \neq 0$, введем двойное преобразование Меллина по переменным x, y: $M_{s, q-1} = M_s M_{q-1}$. В работах многих авторов показано (см. [3]), что P и Γ зависят от переменных E_0 и E в комбинации $x = E | E_0$ и $y = E | \beta$. Будем искать решение уравнений (1) в виде

$$P(E_0, E, t) = M_{s, q-1}^{-1} \Gamma(-q)\, \mathfrak{M}(q, s, t),$$
$$\Gamma(E_0, E, t) = M_{s, q-1}^{-1} \Gamma(-q)\, \mathfrak{M}'(q, s, t). \tag{5}$$

Поскольку функции источников S_P и S_Γ не зависят от β, их можно записать в виде

$$S_p(E, t) = M_{s, q-1}^{-1} \delta(q)\, S_p(s, t),$$
$$S_\Gamma(E, t) = M_{s, q-1}^{-1} \delta(q)\, S_\Gamma(s, t),$$

где δ — дельта-функция. Подставив (5) и S_p, S_Γ в (1), получим следующие уравнения для функций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{M}(q, s, t) = A_{s+q}\mathfrak{M}(q, s, t) + B_{s+q}\mathfrak{M}'(q, s, t) + q(s+q)\mathfrak{M}(q-1, s, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{M}'(q, s, t) = C_{s+q}\mathfrak{M}(q, s, t) - \sigma_0\mathfrak{M}'(q, s, t). \tag{6}$$

При решении уравнений (6) необходимо знать граничные значения функций при $t=0$, $q \neq 0$ и при $q=0$, $t \neq 0$. При $t=0$ решения удовлетворяют одним и тем же граничным условиям при $\beta=0$ и $\beta \neq 0$. При $\beta \to 0$ решения с учетом ионизационных потерь должны переходить в решения при $\beta=0$.

Таким образом:

$$M_{s,q-1}^{-1}\Gamma(-q)\mathfrak{M}(q, s, 0) = M_s^{-1}P(E_0, s, 0)_{\beta=0},$$

$$M_{s,q-1}^{-1}\Gamma(-q)\mathfrak{M}'(q, s, 0) = M_s^{-1}\Gamma(E_0, s, 0)_{\beta=0}, \tag{6'}$$

$$\lim_{\beta\to 0} M_{s,q-1}^{-1}\Gamma(-q)\mathfrak{M}(q, s, t) = M_s^{-1}P(E_0, s, t)_{\beta=0},$$

$$\lim_{\beta\to 0} M_{s,q-1}^{-1}\Gamma(-q)\mathfrak{M}'(q, s, t) = M_s^{-1}\Gamma(E_0, s, t)_{\beta=0}.$$

В [1] показано, что $P(E_0, E, t)_{\beta\neq 0}$ и $P(E_0, E, t)_{\beta\neq 0}$ можно представить в виде ряда по y. Из (5) следует, что это разложение можно получить, вычисляя интеграл по q, через сумму вычетов в точках $q=0, 1\ldots$

$$M_{s,q-1}^{-1}\Gamma(-q)\mathfrak{M}(q, s, t) = M_s^{-1}\mathfrak{M}(0, s, t) + yM_s^{-1}\mathfrak{M}(1, s, t) + \ldots$$

Откуда с учетом (6′) получим

$$\mathfrak{M}(n, s, 0) = \mathfrak{M}'(n, s, 0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\mathfrak{M}(0, s, t) = P(E_0, s, t)_{\beta=0}, \quad \mathfrak{M}'(0, s, t) = \Gamma(E_0, s, t)_{\beta=0}. \tag{7}$$

Применяя к (6) преобразование L_λ, получим уравнения для функций $\mathfrak{M}(q, s, \lambda)$ и $\mathfrak{M}'(q, s, \lambda)$:

$$\psi(s+q, \lambda)\mathfrak{M}(q, s, \lambda) = q(s+q)\mathfrak{M}(q-1, s, \lambda),$$

$$\psi(s+q, \lambda)\mathfrak{M}'(q, s, \lambda) = q(s+q)\mathfrak{M}'(q-1, s, \lambda). \tag{8}$$

Уравнения (8) для целых положительных $q=n$ легко решаются

$$\mathfrak{M}(n, s, \lambda) = \frac{n!\,\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)}\mathfrak{M}(0, s, \lambda)\prod \frac{1}{\psi(s+\nu, \lambda)}, \tag{9}$$

для $\mathfrak{M}'(n, s, \lambda)$ получаем аналогичное выражение. Для любых q уравнение можно записать в форме [5]

$$\mathfrak{M}(q, s, \lambda) = \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)}P(E_0, s, \lambda)_{\beta=0}\frac{1}{h(q, s, \lambda)}. \tag{9'}$$

Выражение для $\mathfrak{M}'$ дается (9′), если $P(E_0, s, \lambda)_{\beta=0}$ заменить $\Gamma(E_0, s, \lambda)_{\beta=0}$.

Здесь

$$h(q, s, \lambda) = \lim_{n\to\infty}[\psi(s+n+1, \lambda)]^{q+1}\prod_{\nu=0,n}\frac{\psi(s+\nu, \lambda)}{\psi(s+q+\nu+1, \lambda)}$$

при $q=n$, $h(n, s, \lambda) = \prod_{\nu=0,n}\psi(s+\nu, \lambda)$.

Для применения оператора L_λ^{-1} к выражению (9′) последнее удобно представить в виде ряда по полюсам функции в точках $\lambda = \lambda_i(s+m)$. Это можно сделать, используя установленное нами тождество,

$$\prod_{\nu=k,n} \frac{1}{\psi(s+\nu,\lambda)} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=k}^{n} \frac{H_i(s+m)}{\lambda-\lambda_i(s+m)} \prod_{\substack{\nu=k,n\\ \neq m}} \frac{1}{\psi(s+\nu,\lambda_i(s+m))}. \tag{10}$$

Из (10) вытекает существование равенств:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{m=k}^{n} H_i(s+m) \prod_{\substack{\nu=k,n\\ \neq m}} \frac{1}{\psi(s+\nu,\lambda_i(s+m))} = \begin{cases} 0 & n-k \geqslant 1 \\ 1 & n=k \end{cases},$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{m=k}^{n} \frac{H_i(s+m)\lambda_i(s+m)}{\lambda_i(s+m)+\sigma_0} \prod_{\substack{\nu=k,n\\ \neq m}} \frac{1}{\psi(s+\nu,\lambda_i(s+m))} = \begin{cases} 0 & n-k \geqslant 1 \\ 1 & n=k \end{cases}, \tag{10′}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{m=k}^{n} H_i(s+m)\lambda_i(s+m) \prod_{\substack{\nu=k,n\\ \neq m}} \frac{1}{\psi(s+\nu,\lambda_i(s+m))} = \begin{cases} 0 & n-k \geqslant 2 \\ 1 & n=k+1 \end{cases}.$$

Используя (10), можно переписать выражение для $\frac{1}{h(q,s,\lambda)}$ в виде

$$\frac{1}{h(q,s,\lambda)} = \lim_{n\to\infty} [\lambda-\lambda_2(s+n+1)]^{-q-1} n(n, s+q+1,\lambda) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=0}^{n} \frac{H_i(s+m)}{\lambda-\lambda_i(s+m)} \left[\frac{\psi(s+m,\lambda)}{h(n,s,\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_i(s+m)}.$$

Применяя к нему оператор L_λ^{-1}, находим решение уравнений (6)

$$\mathfrak{M}(q,s,t) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)} \left[\frac{\psi(s+m,\lambda)}{h(q,s,\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_i(s+m)} \times$$

$$\times P_{im}(E_0,s,t) = \mathfrak{M}'(q,s,t) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)} \left[\frac{\psi(s+m,\lambda)}{h(q,s,\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_i(s+m)} \Gamma_{im}(E_0,s,t). \tag{11}$$

Используя равенства (10), можно установить, что функции и $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ удовлетворяют начальным условиям (7), а также что уравнения (6) справедливы при $t=0$. Используя (11), равенства (5) можно переписать в виде

$$P(E_0,E,t) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty} P_{im}(E_0,E,t),\quad \Gamma(E_0,E,t) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{im}(E_0,E,t), \tag{5′}$$

где

$$P_{im}(E_0,E,t) = M_{s,q-1}^{-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)} G_{im}(s,q) P_{im}(E_0,s,t),$$

$$\Gamma_{im}(E_0,E,t) = M_{s,q-1}^{-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)} G_{im}(s,q) \Gamma_{im}(E_0,s,t).$$

Функции $P_{im}(E_0, s, t)$ и $\Gamma_{im}(E_0, s, t)$ совпадают с $P_i(E_0, s, t)$ и $\Gamma_i(E_0, s, t)$, если в последних $\lambda_i(s)$ заменить $\lambda_i(s+m)$ и $H_i(s)$ заменить $H_i(s+m)$.

Функция $G_{im}(s, q)$ аналогична вводимой в [5]

$$G_{im}(s, q) = \Gamma(q+1) \lim_{n\to\infty} [\psi(s+n+1, \lambda_i(s+m)]^{-q-1} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{\nu=0,n} \psi(s+q+0+1, \lambda_i(s+m))}{\prod\limits_{\nu=0,n} \psi(s+\nu, \lambda_i(s+m))}$$

для целых положительных $q = 0$

$$G_{im}(s, n) = \begin{cases} 0 & m > n \\ n! \Big/ \prod\limits_{\substack{\nu=0,n \\ \neq m}} \psi(s+\nu, \lambda_i(s+m)) & m \leqslant n. \end{cases}$$

Принимая для $\psi(x, \lambda)$ аппроксимацию $\psi_0(x, \lambda)$ [1], где

$$\psi_0(x, \lambda_i s) = f_i(s) \frac{x-s}{x}, \quad f_i(s) = \left(-s \frac{\lambda_i'(s)}{H_i(s)}\right),$$

получим следующее приближенное выражение для $G_{im}(s, q)$:

$$G_{im}(s, q) = \frac{\Gamma(s+q+1)(-1)^m}{\Gamma(s)(s+m)\, m!} f_i(s+m)^{-q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)}.$$

Для области $-s-1 < q < 0$ это приближенное выражение для G_{im} отличается от точного менее чем на 2%. Интегральные функции распределения имеют вид

$$N_{imp}(E_0, E, t) = E_0 M_{s-1,q-1}^{-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)(s+m)} G_{im}(s, q) P_{im}(E_0, s, t), \quad (12)$$

$$N_{im\Gamma}(E_0, E, t) = E_0 M_{s-1,q-1}^{-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)(s+m)} G_{im}(s, q) \Gamma_{im}(E_0, s, t).$$

Используя приближенное выражение для $G_{i0}(s, q)$, нетрудно вычислить интегралы по q в выражениях (5) и (12)

$$J_1(s, z) = M_{q-1}^{-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)} G_{i0}(s, q) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} dq \Gamma(-q) \times$$

$$\times \left(\frac{\Gamma(s+q+1)}{\Gamma(s+1)}\right)^2 z_{i0}^{-q} = \frac{z_{i0}^{s+1}}{\Gamma(s+1)} f(s, s, z_{i0}),$$

$$J_2(s, z) = M_{q-1}^{-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(s+q)}{\Gamma(s+1)} G_{i0}(s, q) = \frac{z_{i0}^{s}}{\Gamma(s+1)} f(s, s-1, z_{i0}), \quad (13)$$

где

$$f(\alpha, \beta, z) = \int\limits_0^\infty dt e^{-t} t^\alpha (t+z)^{-\beta-1}, \quad z_{im} = f_i(s+m) \frac{E}{\beta}. \quad (14)$$

В предельных случаях больших или малых по сравнению с единицей значений z из (13) и (14) следует

$$z \gg 1,\ J_1(s, z) = 1 - \frac{(s+1)^2}{z} + 0\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$J_2(s, z) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{z} + 0\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$z \ll 1,\ J_1(s, z) = \frac{z^{s+1}}{\Gamma(s+1)} e^z(-0{,}577 - \ln z + z - se^{-z} - - sz(0{,}577 + \ln z) + 0(z)), \tag{13'}$$

$$J_2(s, z) = \left(\frac{E}{\beta}\right)^s D(s)(1 + sze^z(0{,}577 + \ln z) + 0(z)),$$

где $D(s)$ — функция, протабулированная в [1]

$$D(s) = \left(-s\frac{\lambda_1'(s)}{H_1(s)}\right)^s \frac{1}{\Gamma(s+1)}.$$

При вычислении интегралов по s вынесем за знак оператора M_s^{-1} функции, слабо зависящие от s.

$$P(E_0, E, t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{H_1(s+m) M_s^{-1} e^{\lambda_1(s+m)t} \frac{z_m^{s+1}(-1)^m}{(s+m)\Gamma(s)} f(s, s, z_m) \times \right.$$

$$\times [P_s + \varphi_p(s+m, t)] + M_m(s) M_s^{-1} e^{\lambda_1(s+m)t} s^{\frac{1}{2}} \frac{z_m^{s+1}(-1)^m}{(s+m)\Gamma(s)} \times$$

$$\left. \times f(s, s, z_m)[\Gamma_s + \varphi_\Gamma(s+m, t)]\right\}, \tag{15}$$

$$\Gamma(E_0, E, t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{H_2(s+m) M_s^{-1} e^{\lambda_1(s+m)t} \frac{z_m^{s+1}(-1)^m}{(s+m)\Gamma(s)} f(s, s, z_m) \times \right.$$

$$\times [\Gamma_s + \varphi_\Gamma(s+m, t)] + L_m(s) M_s^{-1} e^{\lambda_1(s+m)t} s^{-\frac{1}{2}} \frac{z_m^{s+1}(-1)^m}{(s+m)\Gamma(s)} \times$$

$$\left. \times f(s, s, z_m)[P_s + \varphi_\Gamma(s+m, t)]\right\},$$

где

$$\varphi_{p,\Gamma}(s, t) = \int_0^t d\tau S_{p,\Gamma}(s, \tau) e^{-\lambda_1(s)\tau},$$

$$L_m(s) = \frac{s^{1/2} C_s}{\lambda_1(s+m) - \lambda_2(s+m)},$$

$$M_m(s) = -\frac{(\sigma_0 + \lambda_1(s))(\sigma_0 + \lambda_2(s))}{s^{1/2} C(\lambda_1(s+m) - \lambda_2(s+m))}. \tag{15'}$$

Функции $M_m(s)$ и $L_m(s)$ при $m = 0$ совпадают с вводимыми в [6]

Интегральные спектры получим заменой в (16) $f(s, s, z)z^{s+1}$ на $f(s, s-1, z)z^s$ и M_s^{-1} на $E_0 M_{s-1}^{-1}$, где оператор M_s^{-1} равен

$$M_s^{-1} f(s) = \frac{1}{2\pi_i E_0} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds x^{-s-1} f(s).$$

Как показано в [3], в (16) с точностью до нескольких процентов достаточно ограничиваться рассмотрением только первого члена с $m=0$. В данном случае это необходимо сделать еще и потому, что при вычислении (13) мы использовали приближенное выражение для $\psi(x, \lambda)$, что уже внесло ошибку порядка отбрасываемых членов с $m>0$.

Развитый выше метод позволяет получить окончательный вид решения основных уравнений каскадной теории, уже не содержащий интегралов при произвольном виде граничных условий и функций источника. Приведем окончательные выражения для дифференциальных и интегральных по энергии функций распределения электронов и фотонов полученные вычислением интегралов по s в формулах (4) и (15) методом перевала

$$F_1(E_0, E, t) = \frac{H_1(s_1) f(s_1, z) \exp(\lambda_1(s_1) t + y_0 s_1 + n_1 \ln s_1 + (s_1+1)\ln z_1)}{\Gamma(s_1+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_1) t - \psi'(s_1) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_1, z) - \frac{n_1}{s_1^2}\right)\right]^{1/2}} P_s +$$

$$+ \frac{M(s_2) f(s_2, z) \exp(\lambda_1(s_2) t + y_0 s_2 + m_1 \ln s_2 + (s_2+1)\ln z_2)}{\Gamma(s_2+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_2) t - \psi'(s_2) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_2, z) - \frac{m_1}{s_2^2}\right)\right]^{1/2}} \Gamma_s +$$

$$+ \frac{H_1(s_3) f(s_3, z) \exp(\lambda_1(s_3) t + y_0 s_3 + n_1 \ln s_3 + (s_3+1)\ln z_3 + \ln \varphi_p(s_3, t))}{\Gamma(s_3+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_3) t - \psi'(s_3) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_3, z) - \frac{n_1}{s_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi_P(s_3, t)\right)\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{M(s_4) f(s_4, z) \exp(\lambda_1(s_4) t + y_0 s_4 + m, \ln r_4 + (s_4+1)\ln s_4 + (s_4+1)\ln z_4 + \ln L_\Gamma(s_4, t))}{\Gamma(s_4+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_4) t - \psi'(s_4) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_4, z) - \frac{m_1}{s_4^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \varphi_\Gamma(s_4, t)\right)\right]^{1/2}}. \quad (16)$$

$$F_2(E_0, E, t) = \frac{H_2(s_1) f(s_1, z) \exp(\lambda_1(s_1) t + y_0 s_1 + n_2 \ln s_1 + (s_1+1)\ln z_1)}{\Gamma(s_1+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_1) t - \psi'(s_1) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_1, z_1) - \frac{n_2}{s_1^2}\right)\right]^{1/2}} \Gamma_s +$$

$$+ \frac{L(s_2) f(s_2, z_2) \exp(\lambda_1(s_2) t + y_0 s_2 + m_2 \ln s_2 + (s_2+1)\ln z_2)}{\Gamma(s_2+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_2) t - \psi'(s_2) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_2, t_2) - \frac{m_2}{s_2^2}\right)\right]^{1/2}} P_s +$$

$$+ \frac{H_2(s_3) f(s_3, z_3) \exp(\lambda_1(s_3) t + y_0 s_3 + n_2 \ln s_3 + (s_3+1)\ln z_3 + \ln \varphi_\Gamma(s_3, t)}{\Gamma(s_3+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_3) t - \psi'(s_3) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_3, z_3) - \frac{n_2}{s_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln \varphi_\Gamma(s_3, t)\right)\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{L(s_4) f(s_4, z_4) \exp(\lambda_1(s_4) t + y_0 s_4 + m_2 \ln s_4 + (s_4+1)\ln z_4 + \ln(\varphi) P(s_4, t))}{\Gamma(s_4+1)\left[2\pi\left(\lambda_1''(s_4) t - \psi'(s_4) + \frac{d^2}{ds^2}\ln f(s_4, z_4) - \frac{m_2}{s_4^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln \varphi_P(s_4, t)\right)\right]^{1/2}}. \quad (16')$$

Здесь $y_0 = \ln\frac{E_0}{E}$ и s и t связаны условиями перевала

$$\lambda_1(s_1) t + y_0 + \frac{n_{1,2}}{s_1} - \psi(s_1) + \frac{d}{ds}\ln f(s_1, z_1) = 0,$$

$$\lambda_1(s_2)t + y_0 + \frac{m_{1,2}}{s_2} - \psi(s_2) + \frac{d}{ds}\ln f(s_2, z_2) = 0,$$

$$\lambda_1(s_3)t + y_0 + \frac{n_{1,2}}{s_3} - \psi(s_3)\ln f(s_3, z_3) + \frac{\partial}{\partial s}\ln\varphi_P(s_3, t) = 0, \tag{17}$$

$$\lambda_1(s_4)t + y_0 + \frac{m_{1,2}}{s_4} - \psi(s_4) + \frac{d}{ds}\ln(s_4, z_4) + \frac{\partial}{\partial s}\ln\varphi_\Gamma(s_4, t) = 0.$$

Здесь $y_0 = \ln\frac{E_0}{\beta}$.

Для дифференциальных функций распределения

$$F_1(E_0, E, t) = EP(E_0, E, t),$$

$$F_2(E_0, E, t) = E\Gamma(E_0, E, t).$$

Для интегральных функций

$$F_1(E_0, E, t) = N_p(E_0, E, t),$$

$$F_2(E_0, E, t) = N_\Gamma(E_0, E, t): \tag{18}$$

1. В случае $\beta = 0\frac{2^{s+1}}{\Gamma(s+1)}f(s, z) = 1$ для дифференциальных функций $n_{1,2} = 0$, $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{1}{2}$, для интегральных $n_{1,2} = -1$, $m_2 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$.

2. В случае $\beta \neq 0$ для дифференциальных функций

$$f(s, z) = f(s, s, z),\ n_{1,2} = 0,\ m_1 = \frac{1}{2},\ m_2 = -\frac{1}{2}, \tag{18'}$$

для интегральных $f(s, z) = f(s, s-1, z)\frac{1}{z}$, $n_{1,2} = 0$, $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{1}{2}$.

Для иллюстрации возможностей метода вычислим каскадные кривые для случая источников электронов или фотонов с интенсивностью и начальной энергией генерируемых частиц, убывающими с ростом глубины поглотителя. Источник такого типа в принципе удобно использовать при расчетах различных моделей широкого атмосферного ливня. Функции источников имеют вид

$$S_p(E, t) = S_\Gamma(E, t) = e^{-at}\delta(E - E_0e^{-bt}). \tag{19}$$

Применив к этому выражению оператор M_s^{-1}, находим

$$S_p(s, t) = S_\Gamma(s, t) = e^{-(a+bs)t}. \tag{19'}$$

Подставляя S_p и S_Γ в (16) и полагая в (14') $E = 0$, находим в случае источника электронов

$$\{N_p(E_0, 0, t)\}^{S_p} = \frac{H_1(s)Ds}{s}e^{\lambda_1(s)t + y_0 s}[2\pi(\lambda_1''(s)t(\lambda_1(s) + a + bs)^2 -$$

$$-\lambda_1''(s)(\lambda_1)(s) + a + bs) + (\lambda_1'(s) + b)^2)]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{H_1(s)D(s)}{-s\lambda_1'(s)}e^{\lambda_1(s)t + y_0 s}\right]_{s=s^*}, \tag{20}$$

где s и t связаны условием

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)}\left(y_0 + \frac{d}{ds}\ln\frac{H_1(s)\,D(s)}{s} - \frac{\lambda_1'(s)+b}{\lambda_1(s)+a+bs}\right); \qquad (20')$$

$$y_0 = \ln\frac{E_0}{\beta}.$$

s^* определяется уравнением

$$\lambda_1(s^*) + a + bs^* = 0, \qquad (21)$$

если это уравнение не имеет корней в действительной области, то второй член в выражении для $N(E_0, 0, t)$ отсутствует

$$\{N_\gamma(E_0, 0, t)\}^{S_p} = \frac{L(s)\,D(s)}{s^{3/2}}\,e^{\lambda_1(s)t+y_0 s}\,[2\pi(\lambda_1''(s)\,t\,(\lambda_1(s)+a+bs)^2 -$$

$$-\lambda_1''(s)(\lambda_1(s)+a+bs) + (\lambda_1'(s)+b)^2)]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{L(s)\,D(s)}{-s^{3/2}\lambda_1'(s)}\,e^{\lambda_1(s)t+y_0 s}\right]_{s=s^*}, \qquad (22)$$

где

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)}\left(y_0 + \frac{d}{ds}\ln\frac{L(s)\,D(s)}{s^{3/2}} - \frac{\lambda_1'(s)+b}{\lambda_1(s)+a+bs}\right). \qquad (22')$$

В случае источника фотонов находим

$$\{N_p(E_0, 0, t)\}^{S_\gamma} = \frac{M(s)\,D(s)}{s^{1/2}}\,e^{\lambda_1(s)t+y_0 s}\,[2\pi(\lambda_1''(s)\,t\,(\lambda_1(s)+a+bs)^2 -$$

$$-\lambda_1''(s)(\lambda_1(s)+a+bs) + (\lambda_1'(s)+b)^2)]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{M(s)\,D(s)}{-s^{1/2}\lambda_1'(s)}\,e^{\lambda_1(s)t+y_0 s}\right]_{s=s^*}. \qquad (23)$$

Здесь

$$t = \frac{1}{\lambda_1'(s)}\left(y_0 + \frac{d}{ds}\ln\frac{M(s)\,D(s)}{s^{1/2}} - \frac{\lambda_1'(s)+b}{\lambda_1(s)+a+bs}\right). \qquad (23')$$

$$\{N_\gamma(E_0, 0, t)\}^{S_p} = \frac{H_2(s)\,D(s)}{s}\,e^{\lambda_1(s)t+y_0 s}\,[2\pi(\lambda_1''(s)\,t\,(\lambda_1(s)+a+bs)^2 -$$

$$-\lambda_1''(s)(\lambda_1(s)+a+bs) + (\lambda_1'(s)+b)^2)]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{H_2(s)\,D(s)}{-s\lambda_1'(s)}\,e^{\lambda_1(s)t+y_0 s}\right]_{s=s^*}, \qquad (24)$$

$$y_0 = \ln\frac{E_0}{\beta}.$$

Здесь

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)}\left(y_0 + \frac{d}{ds}\ln\frac{H_2(s)\,D(s)}{s} - \frac{\lambda_1'(s)-b}{\lambda_1(s)+a+bs}\right); \qquad (24')$$

s^* определяется условием (21).

На рис. 1, 2 даны графики функций $\ln f(s, s, z)$ и $\ln f(s, s-1, z)$ в зависимости от изменения аргумента $\ln\frac{E}{\beta}$ в интервале от -2 до $+2$ и для значений параметра s, равных 0,5, 1,0, 1,5, 2,0. На рисунках 3, 4 представлены каскадные кривые для случаев, рассчитанных по формулам (21—24). Для значений параметра $\frac{E_0}{\beta}$, равных 10^2, 10^3, 10^4, и значений коэффициентов поглощения, равных $a=0$, $b=0{,}5$. На тех же графиках пунктирными линиями нанесены каскадные кривые для начальных

ных условий в виде одиночного электрона для тех же энергий. Точность полученных кривых в пределах 10—15%.

В заключение автор выражает благодарность И. П. Иваненко за ценные советы, без которых данная работа была бы невозможна.

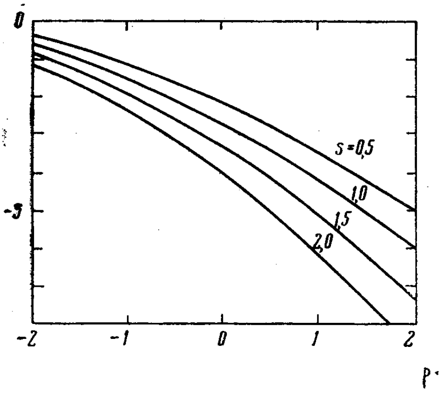

Рис. 1. Функция $\ln f(s, s, z)$ от аргумента $\ln \dfrac{E}{\beta}$ для s, равных 0,5, 1,0, 1,5, 2,0

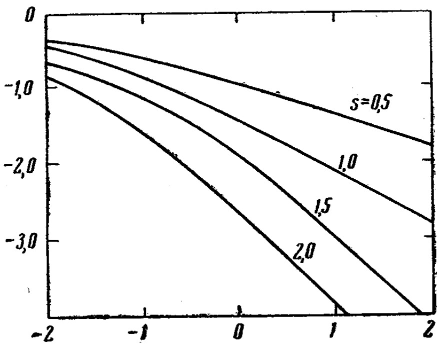

Рис. 2. Функция $\ln f(s, s-1, z)$ от тех же аргументов, что и на рис. 1

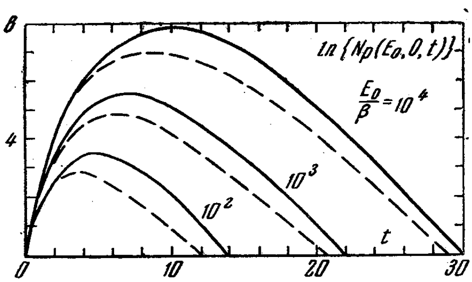

Рис. 3. Каскадные кривые для электронов от источника электронов и от одиночного электрона (пунктирные линии) для $\dfrac{E_0}{\beta}=10^2$, 10^3, 10^4, и $a=0$, $b=0{,}5$, рассчитанные по формулам (21—24)

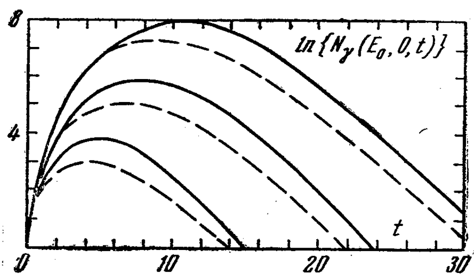

Рис. 4. Каскадные кривые для фотонов от источника электронов и от одиночного электрона (пуктирные линии) для $\dfrac{E_0}{\beta}=10^2$, 10^3, 10^4 и $a=0$, $b=0{,}5$, рассчитанные по формулам (20—25)

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. Гостехиздат, 1948.
2. Chakrabarty S. K., Gupta M. R. Phys. Rev., **101**, No. 2, 813, 1956.
3. Беленький С. З., Иваненко И. П. «Успехи физических наук», **69**, 591, 1959.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
5. Snyder S. Phys. Rev., **76**, No. 11, 1563, 1949.
6. Росси и Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, М., 1948.

Поступила в редакцию
11.6 1963 г.

НИИЯФ