

Б. М. С М И Р Н О В

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕМЕ НЕЙМАНА — ВИГНЕРА

Проведен анализ теоремы Неймана—Вигнера о невозможности пересечения уровней энергии одинаковой симметрии. Показано, что она нарушается в случае разделения переменных в уравнении Шредингера. Сделаны общие заключения о невозможности совпадения двух термов разной симметрии; в частности, уровень энергии основного состояния не может пересечься с другими уровнями.

1. Теорема Неймана—Вигнера применяется к системе, гамильтониан которой зависит от параметра. Она утверждает, что уровни энергии состояний одинаковой симметрии не пересекаются ни при каком значении параметра [1]. К состояниям одинаковой симметрии относят состояния с одинаковыми квантовыми числами, собственные функции которых с изменением параметра сохраняются.

Наиболее распространенным случаем теоремы Неймана—Вигнера является система двух атомов, расстояние между ядрами которых (R) меняется. При этом состояния одинаковой симметрии характеризуются одним и тем же азимутальным квантовым числом, одинаковой четностью при отражении относительно плоскости симметрии, одинаковой мультиплетностью.

Теорема Неймана—Вигнера была поставлена под сомнение с появлением работы Герштейна и Кривченко [2]. Авторы ее утверждают, что термы одинаковой симметрии электрона, находящегося в поле двух кулоновских центров, пересекаются. В нашей работе дан анализ теоремы Неймана—Вигнера и выяснены условия, при которых она нарушается. В частности, показано, что она нарушается в случае разделения переменных в уравнении Шредингера. Этот случай можно учесть, переопределив группу состояний одинаковой симметрии и оставив формулировку теоремы в старом виде. Именно к группе состояний одинаковой симметрии относим состояния, у которых совпадают все, кроме одного числа, сохраняющиеся при изменении внешнего параметра.

2. Классическое доказательство теоремы Неймана—Вигнера [1] основано на сравнении числа внутренних параметров, от которых зависит матрица энергии $H_{\nu\mu}$, при наличии и отсутствии вырождения.

Пусть мы имеем квантовую систему, гамильтониан которой зависит от параметра. Разобьем состояния системы на группы и к каждой отнесем состояния одинаковой симметрии, характеризующиеся своими квантовыми числами. Выясним возможность совпадения собственных

значений энергии для состояний, принадлежащих одной группе. Рассмотрим случай, когда матрица энергии $H_{\nu\mu}$ является действительной. Для простоты будем считать ее n -мерной, а потом перейдем к пределу $n \rightarrow \infty$. Матрица $H_{\nu\mu}$ может быть приведена к диагональному виду с помощью унитарной матрицы $U_{\rho\mu}$

$$H_{\nu\mu} = \sum_{\rho} E_{\rho} U_{\nu\rho} U_{\rho\mu}.$$

Число внутренних параметров, от которых зависит матрица $H_{\nu\mu}$ в отсутствие вырождения, определяется числом собственных значений $H_{\nu\mu}$ (которых n) и числом свободных параметров унитарной матрицы $\frac{1}{2}n(n-1)$. (Число свободных параметров унитарной матрицы представляет собой число условий, с помощью которых из произвольной ортонормированной системы функций можно составить систему собственных функций гамильтониана H .)

В отсутствие вырождения действительная матрица $H_{\nu\mu}$ зависит от $\frac{1}{2}n(n+1)$ внутренних параметров. Мы рассматриваем общий случай, когда между элементами матрицы $H_{\nu\mu}$ нет связей, кроме тех, которые следуют из эрмитовского характера матрицы.

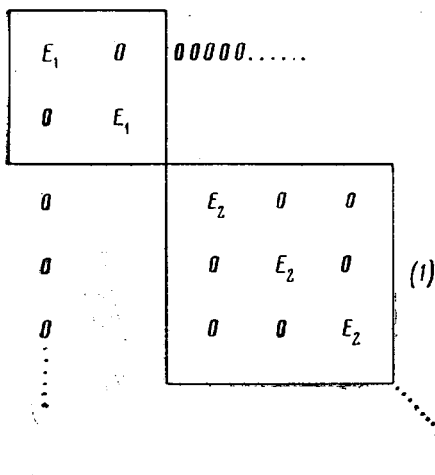


Рис. 1

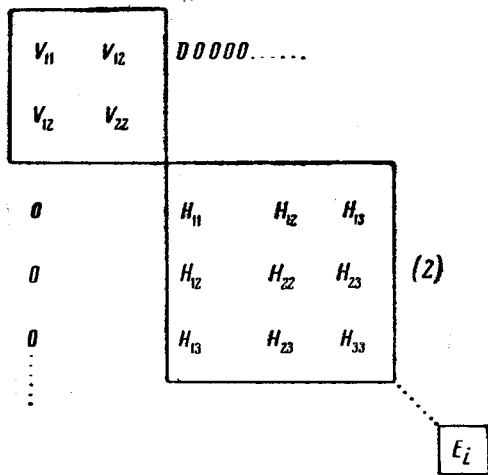


Рис. 2

В случае, если некоторые собственные значения H совпадают, матрицу E_{ρ} запишем в виде (1).

Матрицу (1) можно получить, преобразовав $H_{\nu\mu}$ (2).

Если каждому квадрату соответствует одно собственное значение, матрица (2) автоматически переходит в (1).

Найдем число свободных параметров унитарной матрицы, с помощью которой матрицу $H_{\nu\mu}$ можно обратить в (2) (или число условий, которые нужно выполнить, чтобы из произвольной ортонормированной системы функций получить систему функций, ортогональных H). Оно равно

$$\{n\} - \{g_1\} - \{g_2\} \dots \{g_i\},$$

где g_i — сторона i -го квадрата, а $\{k\} = \frac{k(k-1)}{2}$.

Число внутренних параметров, от которых зависит матрица $H_{\nu\mu}$, переходящая в (1), равно

$$\{n\} + f - \{g_1\} - \{g_2\} \dots \{g_i\}, \quad (3)$$

где f — число отличных друг от друга собственных значений E_1, E_2, \dots —

Если два собственных значения матрицы $H_{\nu\mu}$ совпали, число внутренних параметров, от которых она зависит, вместо

$$\frac{1}{2} n(n+1) \text{ станет } \frac{1}{2} n(n-1) + n - 1 - 1 = \frac{1}{2} n(n+1) - 2.$$

Таким образом, чтобы два собственных значения совпали в общем случае, на элементы $H_{\nu\mu}$ необходимо наложить два дополнительных условия, которые можно выполнить, изменяя два внешних параметра.

Аналогично теорема Неймана—Вигнера доказывается и в случае, когда $H_{\nu\mu}$ не является действительной матрицей. При этом величину $\{n\}$ в (3) следует заменить величиной $n(n-1)$, так что число дополнительных условий, которое необходимо для совпадения двух собственных значений, равно 3.

3. Теорема Неймана—Вигнера доказывается особенно просто, если система обладает только двумя собственными состояниями. Пусть при каком-то значении параметра χ_0 гамильтониану $H_0 = H(\chi_0)$ отвечают собственные волновые функции ψ_1, ψ_2 и собственные значения E_1, E_2 . Соответствующие гамильтониану $H = H_0 + V$ собственные функции при новом значении параметра $[V = H(\chi) - H_0]$ ищем в виде $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$.

Умножив уравнение Шредингера $H\psi = E\psi$ на ψ_1, ψ_2 и воспользовавшись ортонормированностью функций ψ_1, ψ_2 , получим систему уравнений для коэффициентов C_1, C_2

$$\begin{aligned} c_1(E - V_{11} - E_1) - c_2V_{12} &= 0, \\ -c_1V_{12} + c_2(E - V_{22} - E_2) &= 0. \end{aligned}$$

Система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Используя это, получим выражение для собственных значений

$$E = \frac{1}{2} [(E_1 + V_{11}) + (E_2 + V_{22})] \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(E_1 + V_{11}) - (E_2 + V_{22})]^2 + 4V_{12}^2}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что совпадения собственных значений можно добиться только изменением двух параметров*.

4. Таким образом, показано, что совпадение уровней одинаковой симметрии невозможно осуществить изменением одного внешнего параметра. При этом к группе состояний одинаковой симметрии относим состояния, между элементами эрмитовской матрицы $H_{\nu\mu}$ которых нет дополнительных связей. (Группа состояний одинаковой симметрии осуществляет общий случай.) Выясним, какие состояния являются состояниями одинаковой симметрии.

Рассмотрим случай, когда имеется оператор \hat{a} , коммутирующий с гамильтонианом $H(\chi)$, причем число собственных значений этого

* Можно подобрать класс гамильтонианов, у которых оба квадрата под корнем в (4) одновременно обращаются в нуль. Таким способом мы ввели бы дополнительное условие, связывающее элементы матрицы $H_{\nu\mu}$. Выполнение такого условия маловероятно в реальном случае. Поэтому теореме Неймана—Вигнера правильнее было бы сформулировать: пересечение возможно, но маловероятно или пересечение невозможно в общем случае.

оператора меньше числа собственных значений гамильтониана. Собственные функции оператора являются собственными функциями гамильтониана и наоборот*. Собственных значений гамильтониана больше; этому требованию можно удовлетворить, если в какой-то системе координат представить ψ -функцию в виде

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_k) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m) \chi(y_1, y_2, \dots, y_k),$$

причем оператор \hat{a} не действует на переменные y_1, y_2, \dots, y_k .

Пусть в уравнении $\hat{a}\psi = a\psi$ переменные не разделяются. Тогда на основании теоремы Неймана—Вигнера совпадение двух собственных значений оператора \hat{a} маловероятно, так что эти собственные значения удобно расположить в порядке возрастания. Собственные состояния будем характеризовать номером собственного значения n_a , при этом числа n_a сохраняются с изменением внешнего параметра. Воспользовавшись тем, что можно составить системы собственных функций гамильтониана H , зависящих только от (x_1, x_2, \dots, x_m) или (y_1, y_2, \dots, y_k) , покажем, что рассматриваемый случай не относится к общему. Пусть матрица энергии имеет вид куба в n -мерном пространстве со стороной n (по квадрату со стороной n за счет переменных x_1, \dots, x_m и за счет переменных y_1, \dots, y_k). Выбрав систему ортогональных функций по каждой из переменных отдельно, приведем матрицу энергии к диагональному виду за $2 \{n\}$ операций, а не за $\{n^2\}$, как это было бы в общем случае $\left[\begin{matrix} n \\ \end{matrix} \right] = \frac{n(n-1)}{2}$.

В данном случае возможно пересечение уровней энергии. Пусть матрица энергии приведена к виду (2), причем все недиагональные элементы, кроме $H_{aa'}$, равны нулю. Это значит, что при данном значении параметра мы подобрали такую систему ортонормированных ψ -функций, что все они, кроме ψ_a и $\psi_{a'}$, являются собственными функциями гамильтониана. Собственную функцию гамильтониана ψ можно представить в виде произведения двух собственных функций ϕ и χ . Тогда, подбирая в произведении собственные функции ϕ , диагонализуем матрицу энергии $H_{\nu\mu}$, подбирая собственные функции χ , связываем лишним условием собственные значения E_a и $E_{a'}$. Поэтому в данном случае для совпадения двух собственных значений необходимо выполнение одного условия; его можно осуществить изменением внешнего параметра. Важно, чтобы ни одна из функций ϕ и χ не оказалась автоматически ортогональной гамильтониану, при этом уровни энергий соответствуют разным собственным значениям оператора \hat{a} и берутся по разным собственным функциям χ .

5. Пусть переменные в уравнении Шредингера разделяются, так что ψ -функцию можно представить в виде

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m) \chi(y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Это наиболее общий случай, когда возможно пересечение уровней энергии. Гамильтониан можно представить в виде

$$\hat{H}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = \frac{\hat{h}(x_1, \dots, x_m) + \hat{g}(y_1, \dots, y_k)}{f_1(x_1, \dots, x_m) + f_2(y_1, \dots, y_k)},$$

* Из условий коммутации для собственных функций оператора \hat{a} имеем: $\hat{a}\hat{H}\psi = \hat{H}\hat{a}\psi = a\hat{H}\psi$ т. е. $\hat{H}\psi$, как и ψ , является собственной функцией оператора \hat{a} с собственным значением a . Эти функции могут отличаться лишь на постоянный множитель, так что $\hat{H}\psi = \epsilon\psi$.

так что

$$\hat{h}\varphi(Ef_1 + A)\varphi, \hat{g}\chi = (Ef_2 + B)\chi, \quad (5)$$

причем будем считать, что переменные в каждом из уравнений (5) не разделяются.

Собственное значение энергии E определяется из условия

$$A(E, \kappa) + B(E, \kappa) = 0. \quad (6)$$

Собственные значения $A_i(B_i)$, являющиеся функциями параметров E, κ , не могут пересекаться [$E = E(\kappa)$], так что их удобно характеризовать числами $n_i(k_i)$, каждое из которых представляет собой номер состояния при данном E и κ . По определению $n_i(k_i)$

$$A(n_i, E, \kappa) < A(n_j, E, \kappa), \text{ если } n_i < n_j, \quad (7)$$

$$B(k_i, E, \kappa) < B(k_j, E, \kappa), \text{ если } k_i < k_j.$$

Поэтому два собственных значения $E_{n_i k_i}$ и $E_{n_j k_j}$ могут совпасть, если

$$n_i < n_j \text{ или } n_i > n_j, \quad (8)$$

$$k_i > k_j \text{ или } k_i < k_j.$$

Только при этих условиях возможно одновременное выполнение равенств

$$A(n_i, E_0, \kappa_0) + B(k_i, E_0, \kappa_0) = 0,$$

$$A(n_j, E_0, \kappa_0) + B(k_j, E_0, \kappa_0) = 0.$$

Отсюда заключаем, в частности, что уровень энергии основного состояния ни при каких условиях не может пересечься с уровнями энергии других состояний.

Покажем возможность совпадения собственных значений энергии в случае разделения переменных в уравнении Шредингера. Оно следует из соотношений (6), (7) при условии (8) и не противоречит доказательству теоремы Неймана—Вигнера. Действительно, пусть матрица энергии приведена к виду (2), когда все недиагональные члены, кроме $H_{n_i k_i n_j k_j}$, равны нулю. Окончательную диагонализацию $H_{\nu\mu}$ проведем, подобрав соответствующие собственные функции сначала операторов $\hat{h} - E_{k_i n_i} f_1$ и $\hat{h} - E_{k_j n_j} f_1$, а затем операторов $\hat{g} - E_{k_i n_i} f_2$ и $\hat{g} - E_{k_j n_j} f_2$. В связи с тем что имеется возможность провести эти операции отдельно, появляется лишнее условие (по сравнению с общим случаем), связывающее $E_{k_i n_i}$ и $E_{k_j n_j}$. Поэтому для совпадения собственных значений $E_{k_i n_i}$ и $E_{k_j n_j}$ необходимо выполнение лишь одного условия, что достигается изменением внешнего параметра. Таким образом, в случае разделения переменных при выполнении дополнительного условия (8) возможно пересечение уровней энергии. Полученные соотношения распространяются на случай, когда переменные в уравнениях (5) разделяются. При этом запрещено совпадение собственных значений энергии двух состояний, все номера собственных значений $A, B \dots$ одного из которых не меньше соответствующих номеров другого.

Теперь определим группу состояний одинаковой симметрии как состояния, между элементами матрицы $H_{\nu\mu}$ которых не существует, кроме эрмитовости $H_{\nu\mu}$, никаких соотношений. Заметим, что числа n_i, k_i , введенные в случае разделения переменных для характеристики собственных значений A и B уравнений (5), сохраняются при изменении κ . Наличие таких чисел дает возможность при любом значении

параметра κ разделить квантовую систему на две подсистемы, каждая из которых характеризуется своим числом и ведет себя независимо по отношению к другой. Такая независимость поведения приводит к дополнительным условиям, связывающим любые два собственных значения гамильтониана, которым соответствуют оба разных числа n_i, k_i . Совпадение одного из чисел ($n_i = n_j$ или $k_i = k_j$) приводит к тому, что соотношение между собственными значениями такое же, как и в общем случае, когда каждое собственное значение можно характеризовать одним числом. К группе состояний одинаковой симметрии следует отнести состояния, в которых совпадают все, кроме одного, числа, сохраняющиеся при изменении внешнего параметра. При таком определении группы состояний одинаковой симметрии формулировка теоремы Неймана—Вигнера остается прежней.

6. Выведенные соотношения можно получить в частном случае гамильтониана, описывающего движение частиц в полях. Если переменные разделяются, уравнение (5) от одной координаты имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_i(x_i) + [f(x_i, E, \kappa) + A] \psi_i(x_i) = 0,$$

причем $p(x_i) \geq 0$ в области изменения x_i . На основании теоремы Штурма—Лиувилля [3] получаем совпадающее с (7) соотношение

$$A(1) < A(2) < \dots < A(n) < A(n+1) < \dots,$$

где n — число нулей ψ_i -функции. В данном случае число нулей ψ_i -функции совпадает с номером собственного состояния и характеризует состояние при изменении внешнего параметра. Знание этого числа дает возможность сопоставить термы электрона в поле двух кулоновских W центров при больших и малых расстояниях (R) между ядрами [2, 4], т. е. содержит в себе некоторую информацию о молекуле.

Возможность пересечения термов в случае разделения переменных можно было бы проверить на примере электрона, находящегося в поле двух кулоновских центров, расстояние между которыми (R) меняется. Хотя в этом случае переменные разделяются*, выражения для ψ -функций при произвольных R слишком сложные, чтобы можно было пока-

* Возможность пересечения термов электрона, находящегося в поле двух кулоновских центров [2], связана с разделением переменных. Утверждение авторов, что пересечение определяется специфическими свойствами эллиптических координат, несостоятельно. Соотношение $\left(\frac{\partial H}{\partial R}\right)_{12} \sim (E_1 - E_2)$, которое авторы приводят в подтверждение этого, выполняется для любого гамильтониана

$$\left[\left(\frac{\partial H}{\partial R}\right)_{12} = (E_1 - E_2) \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)_{12}\right].$$

На основании этого соотношения Фирсов показал, что распространенное доказательство теоремы Неймана—Вигнера для системы с бесконечным числом состояний [5] некорректно. Действительно, разложение гамильтониана вблизи точки R_0 дает

$$V = \frac{\partial H}{\partial R} \delta R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} \delta R^2 + \dots,$$

и, так как $\left(\frac{\partial H}{\partial R}\right)_{12} \sim \Delta E$, первым членом можно ограничиться при $\delta R \ll \Delta E$ (пользуемся системой атомных единиц $\hbar = m_{э.д} = e^2 = 1$). Такой же критерий дает возможность пренебречь вкладом остальных состояний. Пересечение же, если оно имеется, может произойти на расстоянии $\delta R \sim \Delta E$, на котором все производимые операции незаконны.

зять, что пересечение точное. Для наглядности рассмотрим движение частицы в поле $U = Ax^2 + By^2 + Cxy$ с изменяющимся параметром C . Эта задача, простая в математическом отношении, является более общей, потому что система координат, в которой переменные разделяются, меняется с изменением параметра*.

Произведем замену переменных:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, & \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{aligned}$$

Выбираем α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль и переменные в уравнении Шредингера $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \psi + (E - U) \psi = 0$ разделились.

Получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{A - B}, \quad U = \frac{1}{2} \omega_x^2 x'^2 + \frac{1}{2} \omega_y^2 y'^2,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_x^2 &= A + B + \sqrt{(A - B)^2 + C^2}, \\ \omega_y^2 &= A + B - \sqrt{(A - B)^2 + C^2}. \end{aligned}$$

Выбираем коэффициенты A , B и область изменения параметра такими, чтобы спектр оставался дискретным

$$A > 0, B > 0, |C| < 2\sqrt{AB}.$$

Решаем задачу гармонического осциллятора $E_{nm} = n\omega_x + m\omega_y$ (n, m — номера состояний соответствующего одномерного уравнения). Выясним возможность пересечения двух термов

$$E_{nm} = E_{n'm'}, (n - n')\omega_x + (m - m')\omega_y = 0.$$

Пересечение возможно, если для квантовых чисел n, n', m, m' выполняется соотношение $n > n', m < m'$ или $n < n', m > m'$. Если параметры A и B удовлетворяют неравенству $\frac{A+B}{A-B} > \frac{(n-n')^2 + (m-m')^2}{(n-n')^2 - (m-m')^2}$, то пересечение обязательно в области изменения параметра $|C| < 2\sqrt{AB}$. При этом точки пересечения определяются выражением

$$C^2 = \frac{(n - n' - m + m')^2 (A + B)^2 - (m - m' - n + n')^2 (A - B)^2}{(n - n' + m - m')^2}.$$

Таким образом, эта задача, как и ряд других (например, [6]), показывает, что, если переменные в уравнении Шредингера разделяются, возможно пересечение уровней энергии.

7. Пусть переменные в уравнении Шредингера $H\psi = E\psi$ не разделяются. Тогда задачу решаем приближенно: заменяем оператор H оператором H_0 , в котором переменные разделяются. Для гамильтониана H_0 находим систему собственных функций и собственных состояний. Пусть при определенном значении параметра собственные значения двух состояний гамильтониана H_0 оказались близкими. Определим разность энергий соответствующих состояний. Ограничимся приближе-

* Если система координат, в которой переменные разделяются, меняется с изменением внешнего параметра, обязательно выполняется соотношение $\hat{H} = \hat{h}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \hat{g}(y_1, y_2, \dots, y_k)$.

нием двух уровней. Разлагая H по собственным функциям гамильтониана H_0 , на основании (4) имеем

$$\Delta E = [(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2]^{1/2}.$$

Минимальное расстояние между уровнями $\Delta E = 2H_{12}$ определяется «степенью неразделимости» переменных в уравнении Шредингера. Если величина H_{12} порядка расстояния между уровнями, происходит корреляция нескольких состояний.

8. Рассмотрим систему, состоящую из протона и атома гелия. Проведем сопоставление для низших термов этой системы при больших и малых расстояниях между ядрами. Гамильтониан системы

$$H = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_1|} - \frac{2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_2|} - \frac{2}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

где r_1, r_2 — координаты электронов, R_1, R_2 — координаты протона и α частицы; пользуемся системой атомных единиц $\hbar = m_{эп} = e^2 = 1$. Это простейший гамильтониан, у которого переменные не разделяются. Для низших термов один электрон находится в основном состоянии. Будем считать, что действие этого электрона сводится к экранировке α частицы. Поэтому член $\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ в гамильтониане для возбужденных состояний заменим

$$\frac{z_{эф}}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_2|}, \text{ где } \frac{5}{16} < z_{эф} < 1.$$

Теперь переменные разделяются, а задача сводится к решению уравнения Шредингера для электрона в поле двух кулоновских центров. Выполнение соотношений

$$\frac{1}{46} \left| \frac{\langle k | \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} | m \rangle}{E_k - E_m} \right| \ll 1$$

в данной задаче (например, для иона лития) обеспечивает близость собственных состояний модельного и точного гамильтониана. На основе результатов работы [2] проведем сопоставление термов для больших и малых расстояний (R) между ядрами. Один электрон находится в основном состоянии атома гелия при $R \rightarrow \infty$ и основном состоянии иона лития при $R \rightarrow 0$. Состояние второго электрона будем характеризовать параболическими квантовыми числами nn_1n_2m при $R \rightarrow \infty$ и квантовыми числами nlm при $R \rightarrow 0$. Установленное соответствие приведено в таблице.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность О. Б. Фирсову за ценные замечания и интерес к работе и С. С. Герштейну за обсуждение работы.

$R \rightarrow 0$ Li $_{nlm}$	$R \rightarrow \infty$
100	He1000+p
200	He2010+p
210	He ⁺ +H1000
211	He2001+p
300	He3020+p
310	He ⁺ +H2010
311	He3011+p
320	He2100+p
321	He ⁺ +H2001
322	He3002+p

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuman J., Wigner E. Phys. Zs., 30, 467, 1929.
2. Герштейн С. С., Кривченков В. Д. ЖЭТФ, 40, 1491, 1961.
3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. ИЛ, М., 1958, стр. 670.
4. Бете Г. Квантовая механика простейших систем. ОНТИ, 1935, стр. 373.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. ГТТИ, М., 1948.
6. Фок В. Zs. f. Phys., 47, 446, 1928.

Поступила в редакцию
18.6 1963 г.

НИИЯФ