Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

М. К. ЖЕКАМУХОВ

НЕКОТОРЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Изучение стационарных движений гравитирующей газовой массы в магнитном поле представляет интерес в астрофизике. Многие звезды обладают сильными магнитными полями. С другой стороны, среда, из которой состоят звезды, является отличным электропроводником. Поэтому магнитное поле звезды, естественно, оказывает влияние на перемещение газовых масс как внутри, так и на ее поверхности. В дальнейшем будем пренебрегать вязкостью, теплопроводностью и излучением. Проводимость с большой точностью можно считать равной бесконечности.

Рассмотрим некоторые течения газа под действием сил гравитации и магнитных сил.

Вращение проводящего газового шара в магнитном поле

Пусть магнитное поле звезды или газовой туманности имеет вид концентрических окружностей с центрами на оси вращения.

При отсутствии магнитного поля вращающаяся газовая масса будет вытянутой вдоль экватора, имея приблизительно форму эллипсоида вращения. Наличие магнитного поля приведет к тому, что на вращающиеся вокруг оси симметрии частицы газа будет действовать помимо центробежной силы и лоренцова сила, направленная к оси вращения. В рассматриваемой конфигурации газовая масса имеет форму шара, что возможно лишь тогда, когда центробежная сила уравновешивается лоренцовой силой.

Магнитное поле не создает никакой силы вдоль оси вращения. Поэтому распределение плотностей по оси будет такое, как в статическом случае. Но в силу центральной симметрии такое же распределение плотностей будет во всех направлениях. Таким образом, если будет известно распределение плотностей газовой массы в статическом случае без магнитного поля, то такая же плотность будет и в рассматриваемом случае.

Запишем условие равенства центробежной и магнитной сил в сферической системе координат:

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{H_\varphi}{4\pi\rho r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r}, \tag{1}$$

$$\frac{v_\varphi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta = \frac{H_\varphi}{4\pi\rho r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta H_\varphi). \tag{2}$$

Исключая v_φ из (1) и (2), получим следующее уравнение для определения H_φ:

$$r \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} = \operatorname{tg}\theta \frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta}. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет общее решение

$$H_\varphi = f(r\sin\theta),$$

где f — произвольная функция. H_φ является функцией одного лишь расстояния от оси вращения до рассматриваемой частицы газа.

Для определения вида функции f нужно задавать конкретные граничные условия.

Пусть при $r = r_0$, $H_\varphi = H_0 \sin\theta$, где $H_0 = \mathrm{const}$. Тогда $H_\varphi = H_0 \frac{r}{r_0} \sin\theta$.

Для v_φ получим

$$v_\varphi = \pm \frac{rH_0 \sin\theta}{r_0 \sqrt{2\pi\rho}}, \tag{4}$$

где ρ является функцией только от r.

Если задано политропное уравнение состояния газа $p = D\rho^\gamma$, где D и γ — постоянные, то уравнение равновесия газовой массы (см. [6]) при $\gamma = 2$ и $\gamma = \frac{6}{5}$ допускает аналитическое решение, удовлетворяющее условию конечности плотности в центре. При этих значениях γ плотность выражается формулами

$$\rho = A \frac{\sin ar}{ar} \quad \text{и} \quad \rho = \left(\frac{\sqrt{3}}{aB} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \right)^{\frac{5}{6}},$$

где A и B — постоянные, которые определяются из граничных условий, $a^2 = \frac{2\pi G}{D}$, G — постоянная тяготения.

Подставляя значения H_φ в формулу (4), легко получить скорость. При этом различные слои газа будут вращаться с различными угловыми скоростями, причем угловая скорость вращения будет зависеть от широты. Беря другие граничные значения для H_φ, получим другие картины течения. Движение рассматриваемого типа невозможно в том случае, когда магнитное поле направлено вдоль оси вращения.

Частный случай бессилового поля

Как известно, бессиловые поля определяются равенством

$$[\vec{H} \, rot \, \vec{H}] = 0. \tag{5}$$

Частные решения этого уравнения, представляющие винтовые линии, были получены в работе [5]. При этом предполагалось, что $rot\vec{H} \neq 0$.

Рассмотрим магнитное поле в неподвижной среде, которое удовлетворяет уравнению

$$rot\,\vec{H}=0, \tag{6}$$

когда силовые линии лежат в меридиональных плоскостях. Равенство (6) означает, что через среду не протекают никакие токи. Из уравнения $div\vec{H}=0$ следует, что $H=grad\varphi$, где φ — скалярный потенциал магнитного поля.

В силу равенства (6) φ будет удовлетворять уравнению Лапласса, которое в сферических координатах имеет вид

$$r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+2r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) представляет ряды

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n-1}P_n(\cos\theta)\quad \text{для}\ r>r_0,$$

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n}P_n(\cos\theta)\quad \text{для}\quad r<r_0.$$

Зная потенциал φ, определим другое семейство линий ψ, которое является аналогом функции тока в гидродинамике.

В сферической системе координаты φ и ψ связаны соотношениями

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=r^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \tag{8}$$

С помощью равенств (8) получим значение ψ:

$$\psi=r_0\sin^2\theta\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n}P_n'(\cos\theta)\quad \text{при}\ r>r_0,$$

$$\psi=r_0\sin^2\theta\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+1}P_n'(\cos\theta)\ \text{при}\ r<r_0.$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, C_n — постоянные, связанные с постоянными A_n и B_n равенствами:

$$A_n=-nC_n\quad \text{и}\quad B_n=(n+1)C_n.$$

При этом учтено условие $\psi|_{r=r_0+0}=\psi|_{r=r_0-0}$.

Значения C_n должны определяться из граничных условий. Поставим в качестве граничного условия требование, чтобы магнитное поле было приблизительно полем диполя. Такие поля представляют наибольший интерес, так как магнитные поля Солнца и Земли являются близкими к полю диполя. Для этого определим значения C_n таким образом, чтобы имело место равенство

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=r_0+0}-\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=r_0-0}=Q\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

где $\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ — δ — функция Дирака, Q — некоторый постоянный множитель.

Интегрируя обе части равенства (6) по Q, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)C_nP_n(\cos\theta)=\begin{cases}Q & \text{при } \frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\\ 0 & \text{при } 0<\theta<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Разложив правую часть последнего равенства по полиномам Лежандра и приравнивая коэффициенты при одинаковых P_n, определим значения C_n

$$C_n=Q\frac{P_{n+1}(0)-P_{n-1}(0)}{2(2n+1)}.$$

Выражение для потенциала примет вид

$$\varphi=Q\left[-\frac{1}{2}P_1\frac{r}{r_0}+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3P_3-\frac{3}{16}\left(\frac{r}{r_0}\right)^5+\ldots\right] \tag{9}$$

при $r<r_0$,

$$\varphi=Q\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2P_1-\frac{3}{16}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3P_3+\frac{5}{32}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5P_5+\ldots\right] \tag{10}$$

при $r>r_0$.

При возрастании n P_n стремится к нулю как $\frac{1}{\sqrt{n}}$. При $r_0\ll r$ ряд (10) быстро сходится. Поэтому в первом приближении достаточно ограничиться первым членом ряда (10), считая $r_0\ll r$

$$\varphi=\frac{Q}{4}\frac{r_0^2}{r^2}P_1=\frac{Q}{4}\frac{r_0^2}{r^2}\cos\theta.$$

Выберем постоянную Q таким образом, чтобы $\frac{1}{4}Qr_0^2=P_m$, где P_m — магнитный момент звезды. Тогда для H_r и H_θ получим значения

$$H_r=-\frac{2P_m}{r^3}\cos\theta,\quad H_\theta=-\frac{P_m}{r^3}\sin\theta.$$

Таким образом, в первом приближении мы получим магнитное поле диполя.

Движение заряженной частицы у поверхности Солнца

Согласно Альфвену [1], магнитное поле Солнца является полем диполя, ось которого почти совпадает с осью вращения Солнца. Пусть с поверхности Солнца выбрасывается частица с начальной скоростью v_0. Определим движение этой частицы в магнитном и гравитационном полях. Поскольку Земля расположена около плоскости солнечного магнитного экватора, атмосферы Земли будут достигать в основном те частицы, которые вылетают с экваториального участка поверхности Солнца. Поэтому для простоты ограничимся этим частным случаем, хотя задачу можно было решать и в общем случае. Запишем уравнения движения в полярных координатах:

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=-\frac{e}{mc}\dot{\varphi}\frac{P_m}{r^2}-G\frac{M}{r^2}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{l}{mc}\dot{r}\frac{P_m}{r^2}, \tag{12}$$

где e и m — заряд и масса частицы, c — скорость света, M — масса звезды (Солнца).

Интегрируя уравнение (10) по t, получим

$$r^2\dot{\varphi} = a\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \tag{13}$$

где $a = \frac{eP_m}{mc}$, R — радиус звезды. Подставляя значение из (13) в (10) и интегрируя обе части по t, получим

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 - \frac{a}{r^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)^2 - 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}. \tag{14}$$

Равенство (14) определяет скорость частицы.

Исключив t из (14) и (13), можно определить траекторию

$$\varphi = a\int \frac{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)dr}{r^2\sqrt{v_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)^2 - 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}}. \tag{15}$$

Для Солнца $R = 7\cdot 10^{10}$ *см*, $P_m = 2{,}4\cdot 10^{33}$ *г·см*^{3}, $M = 2\cdot 10^{33}$ *г*.

Если рассматривается движение электрона, то $l = 4{,}77\cdot 10^{-10}$ *см*$^3/2$ *сек*$^{-1}$, $m = 10^{-27}$ *гц*. Подставляя эти данные в (14), получим второй член подкоренного выражения, обусловленный магнитным полем, который на 12—13 порядков больше, чем другие два члена. v_0 имеет порядок 10^8—10^9 *см/сек*. Подкоренное выражение при любой начальной скорости $v<c$ получается отрицательным. Отсюда следует, что если магнитное поле Солнца близко к полю диполя с магнитным моментом $2{,}4\cdot 10^{33}$ *гс·см*^{3}, то ни при какой начальной энергии единичные заряженные частицы не могут вылетать с поверхности Солнца. Отсюда следует, что или магнитное поле Солнца не является полем диполя, или выброс частиц происходит в виде квазинейтральных ионных облаков, на которые магнитное поле оказывает незначительное воздействие.

Достигая поверхности земной атмосферы, эти облака должны оставаться квазинейтральными, в противном случае на расстоянии, равном радиусу земной орбиты, они еще будут удерживаться магнитным полем Солнца.

Автор выражает благодарность проф. Станюковичу К. П., Пикельнеру С. Б. и канд. физ.-мат. наук Киселеву М. И. за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфвен Х. Космическая электродинамика. ИЛ, М., 1952.
2. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. Физматгиз, М., 1958.
3. Богуславский С. А. Избранные труды по физике. Физматгиз, М., 1961.
4. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. ГТТИЛ, М., 1955.
5. Сыроватский С. И. «Успехи физических наук», 62, вып. 3, 247, 1957.
6. Babcoc H. Pube. A. S. Pac., 59, 112, 1947. Перевод: «Космическая электродинамика». ИЛ, М., 1949.
7. Lüst R., Schlüter A. Astrohys Z., 34, 263, 1954.
8. Schlüter A. Zeitschrift fur Naturforschung, 12a, 855, 1957.

Поступила в редакцию
22.6 1963 г.

Кафедра
теоретической физики