Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

М. А. ВАШКОВЬЯК

ПОЧТИ КРУГОВЫЕ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Введение

Изучение теории движения искусственных спутников с очень малыми эксцентриситетами имеет большое практическое значение.

В работе Изака [1] получена формула, дающая зависимость радиуса-вектора спутника от истинной аномалии с точностью до второй степени эксцентриситета включительно. В [2] изложен метод вычисления возмущений элементов орбиты искусственного спутника в случае малых эксцентриситетов и получены формулы для вычисления возмущений первого порядка с точностью до первой степени эксцентриситета включительно.

Настоящая работа основана на результатах работ [3—4], в которых развивается теория движения искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. В работе получены аналитические разложения для координат спутника с точностью до четвертой степени квазиэксцентриситета e включительно. В этих разложениях, сходящихся для всех промежутков времени, сохранены все члены, имеющие первый и второй порядок относительно сжатия Земли. Для иллюстрации приведены численные результаты, показывающие, что найденные формулы вполне удобны для практических вычислений. Особо рассмотрен случай $e=0$.

§ 1. Постановка задачи

Воспользуемся прямоугольной системой координат $0xyz$ с началом в центре масс Земли, причем пусть плоскость xy совпадает с плоскостью земного экватора, а ось z направлена вдоль оси вращения Земли. Рассмотрим функцию

$$U=\frac{fm}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-ci)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+ci)^2}}\right], \qquad (1)$$

где f — постоянная тяготения, m — масса Земли, $i=\sqrt{-1}$ $c=209{,}828$ *км*. Согласно работе [3], эта функция достаточно хорошо аппроксимирует потенциал притяжения реальной Земли. Силовое поле, определяемое потенциалом (1), называется нормальным полем притяжения Земли. Уравнения движения спутника в этом поле запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2}$$

Интегрирование системы (2) было выполнено в работе [3]. Кроме того, в работе [4] получены разложения для конических координат спутника r, z, w в тригонометрические ряды. Эти ряды сходятся при любых значениях e, лежащих в промежутке между нулем и единицей. В полученных выражениях отброшены члены, имеющие порядок ε^6 и выше ввиду их малости (т. е. члены порядка 10^{-9}), поскольку $\varepsilon=\frac{c}{a(1-e^2)}$ не превосходит $\frac{1}{30}$ (см. [4]). Однако недостатком указанных формул является то, что они дают зависимость координат не непосредственно от времени t, а от некоторой вспомогательной величины v, связанной со временем следующим соотношением:

$$v=M+\sum_{j,k} h_{j,k}\sin(jM+k\theta), \tag{3}$$

где $M=n(t-t_0)$, $\theta=\nu M+\omega$.

Было бы полезным получить зависимость координат r, z, w непосредственно от M. Это дало бы возможность вычислять координаты для любого момента времени t более коротким путем. Очевидно, подобного типа формулы целесообразно получить лишь для небольших значений e. Это и будет целью настоящей работы.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением орбит, для которых величина e приблизительно не более $\frac{1}{30}$. Так как ε также не превосходит $\frac{1}{30}$, то во всех разложениях для координат и для величины v мы сохраним лишь члены до четвертого порядка включительно относительно e и ε. Тогда согласно [4] эти разложения примут вид

$$\begin{aligned} r=\frac{\bar{p}}{1+\bar{e}\cos v}\{&a_{0,0}+a_{0,1}\cos v+a_{0,2}\cos 2v+a_{2,0}\cos 2u+\\ &+a_{2,-1}\cos(2u-v)+a_{2,1}\cos(2u+v)+a_{2,-2}\cos(2u-2v)+\\ &+a_{2,2}\cos(2u+2v)\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$a_{0,0}=1+\frac{\varepsilon^2}{8}[4-2s^2+e^2(2-s^2)]-\frac{\varepsilon^4}{8}\left(1-s^2+\frac{5}{8}s^4\right),$$

$$a_{0,1}=\varepsilon^2 e\left(2-\frac{5}{2}s^2\right),\quad a_{0,2}=\frac{\varepsilon^2e^2}{8}(2-s^2),$$

$$a_{2,0}=s^2\left[\frac{\varepsilon^2}{8}(2+e^2)-\frac{\varepsilon^4}{8}\left(1-\frac{1}{2}s^2\right)\right],$$

$$a_{2,-1}=\frac{\varepsilon^2 e}{4}s^2,\quad a_{2,1}=\frac{\varepsilon^2 e}{4}s^2, \tag{5}$$

$$a_{2,-2}=\frac{\varepsilon^2e^2}{16}s^2,\quad a_{2,2}=\frac{\varepsilon^2e^2}{16}s^2,$$

$$z = \frac{\overline{p} \cdot s}{1 + \overline{e} \cos v} \{ b_{1,0} \sin u + b_{3,0} \sin 3u + b_{1,-1} \sin (u - v) +$$

$$+ b_{1,1} \sin (u + v) + b_{1,-2} \sin (u - 2v) + b_{1,2} \sin (u + 2v) \}, \tag{6}$$

где

$$b_{1,0} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{16} s^2 (1 - e^2) - \frac{\varepsilon^4}{256} s^2 (64 - 71 s^2),$$

$$b_{3,0} = s^2 \left[\frac{\varepsilon^2}{16} (1 - e^2) - \frac{\varepsilon^4}{32} (8 - 9s^2) \right],$$

$$b_{1,-1} = \frac{\varepsilon^2 e}{2} (1 - 2s^2), \quad b_{1,1} = \frac{\varepsilon^2 e}{2} (1 - 2s^2). \tag{7}$$

$$b_{1,-2} = \frac{\varepsilon^2 e^2}{16} s^2, \quad b_{1,2} = -\frac{\varepsilon^2 e^2}{16} s^2,$$

$$w = \Omega + A \operatorname{rctg} \{ \sqrt{1 - s^2} \operatorname{tg} \varphi \} + \mu u + c_{0,1} \sin v + c_{0,2} \sin 2v +$$

$$+ c_{2,0} \sin 2u, \tag{8}$$

где

$$\mu = -\sqrt{1 - s^2} \left\{ \frac{3}{2} \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{16} [(54 - 39s^2) + 72e^2 s^2] \right\},$$

$$\varphi = u + A_{0,2} \sin 2v + A_{2,0} \sin 2u + A_{4,0} \sin 4u,$$

$$c_{0,1} = -2 \sqrt{1 - s^2}\, \varepsilon^2 e, \quad c_{0,2} = -\frac{1}{4} \sqrt{1 - s^2}\, \varepsilon^2 e^2, \tag{9}$$

$$c_{2,0} = \frac{1}{32} \sqrt{1 - s^2}\, \varepsilon^4 s^2, \quad A_{0,2} = -\frac{\varepsilon^2 e^2}{8} s^2,$$

$$A_{2,0} = \frac{\varepsilon^2}{8} s^2 (1 - e^2) - \frac{\varepsilon^4}{16} s^2 (8 - 9s^2), \quad A_{4,0} = \frac{\varepsilon^4}{256} s^4,$$

$$v = M + h_{1,0} \sin M + h_{2,0} \sin 2M + h_{3,0} \sin 3M + h_{4,0} \sin 4M +$$

$$+ h_{1,2} \sin (M + 2\theta) + h_{2,2} \sin (2M + 2\theta) + h_{3,2} \sin (3M + 2\theta) +$$

$$+ h_{4,2} \sin (4M + 2\theta) + h_{4,4} \sin (4M + 4\theta), \tag{10}$$

где

$$h_{1,0} = 2e - \frac{1}{4} e^3 - \varepsilon^2 e s^2,$$

$$h_{2,0} = \frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 - \frac{\varepsilon^2 e^2}{2} (1 + s^2),$$

$$h_{3,0} = \frac{13}{12} e^3, \quad h_{4,0} = \frac{103}{96} e^4,$$

$$h_{2,2} = \frac{\varepsilon^2}{4} s^2 \left(1 - \frac{11}{2} e^2 \right) - \frac{\varepsilon^4}{4} s^2 \left(3 - \frac{13}{4} s^2 \right), \tag{11}$$

$$h_{1,2} = -\frac{\varepsilon^2 e}{4} s^2, \quad h_{3,2} = \frac{3\varepsilon^2 e}{4} s^2,$$

$$h_{4,2} = \frac{13\varepsilon^2 e^2}{8} s^2, \quad h_{4,4} = \frac{5\varepsilon^4}{64} s^4.$$

Кроме того,

$$\bar{e}=e[1+\varepsilon^2(1-2s^2)],\quad \bar{p}=a(1-e\bar{e}),$$

$$\nu=\frac{\varepsilon^2}{4}(12-15s^2)+\frac{\varepsilon^4}{64}[(288-1296s^2+1035s^4)-$$

$$-e^2(144+288s^2-510s^4)],\quad u=(1+\nu)v+\omega, \tag{12}$$

$$n=\sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)+\frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)\times\right.$$

$$\left.\times[(1+11s^2)-(1-5s^2)e^2]-\frac{\varepsilon^4}{16}(1-e^2)^{3/2}(24-96s^2+75s^4)\right\}.$$

Во всех приведенных формулах величины a, e, s, ω, Ω и t_0 означают произвольные постоянные, которые должны определяться из наблюдений. Если положить $c=0$, то рассматриваемая задача совпадает с классической задачей двух тел, где a — большая полуось, e — эксцентриситет, s — синус угла наклона, ω — угловое расстояние перигея от узла, Ω — долгота восходящего узла, t_0 — момент прохождения через перигей кеплеровской орбиты. Действительные величины a, e, s, ω, Ω, t_0 отличаются от соответствующих кеплеровских элементов на величину порядка сжатия Земли.

§ 2. Разложение для координат r, z, w

Для получения искомых разложений необходимо разложить функции $\cos(ju+kv)$ и $\sin(ju+kv)$ в ряды по степеням e. Путем несложных преобразований получим

$$\cos(ju+kv)=\cos[(j+k)M+j\theta]\left\{1-\frac{1}{2}[j(1+\nu)+k]^2\times\right.$$

$$\left.\times(v-M)^2+\ldots\right\}-\sin[(j+k)M+j\theta]\left\{[j(1+\nu)+k](v-M)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}[j(1+\nu)+k]^3(v-M)^3+\ldots\right\}. \tag{13}$$

Аналогично имеем

$$\sin(ju+kv)=\sin[(j+k)M+j\theta]\left\{1-\frac{1}{2}[j(1+\nu)+k]^2\times\right.$$

$$\left.\times(v-M)^2+\ldots\right\}+\cos[(j+k)M+j\theta]\left\{[j(1+\nu)+k](v-M)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}[j(1+\nu)+k]^3(v-M)^3+\ldots\right\}. \tag{14}$$

Подставляя в эти выражения $v-M$ из (10), получим разложения для функций $\cos(ju+kv)$ и $\sin(ju+kv)$. Наконец, подставляя их в (4), (6), (8), получим окончательные выражения для координат r, z, w:

$$\frac{r}{a}=C_{0,0}+C_{0,2}\cos 2\theta+C_{1,0}\cos M+C_{1,2}\cos(M+2\theta)+$$

$$+C_{2,0}\cos 2M+C_{2,2}\cos(2M+2\theta)+C_{3,0}\cos 3M+C_{3,2}\cos(3M+2\theta)+$$

$$+C_{4,0}\cos 4M+C_{4,2}\cos(4M+2\theta)+C_{4,4}\cos(4M+4\theta), \tag{15}$$

где

$$C_{0,0} = 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4}(2 - s^2) - \frac{\varepsilon^4}{8}\left(1 - s^2 + \frac{9}{8}s^4\right) - \varepsilon^2 e^2\left(\frac{3}{2} - s^2\right),$$

$$C_{0,2} = -\frac{1}{16}\varepsilon^2 e^2 s^2, \quad C_{1,2} = -\frac{\varepsilon^2 e}{4}s^2,$$

$$C_{1,0} = -e + \frac{3}{8}e^3 - \frac{\varepsilon^2 e}{2}\left(1 - \frac{1}{2}s^2\right),$$

$$C_{2,0} = -\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{3} + \varepsilon^2 e^2\left(1 - \frac{3}{4}s^2\right), \tag{16}$$

$$C_{2,2} = \frac{\varepsilon^2}{4}s^2 - \frac{\varepsilon^4}{8}s^2\left(1 - \frac{1}{2}s^2\right) - \frac{7}{4}\varepsilon^2 e^2 s^2,$$

$$C_{3,0} = -\frac{3}{8}e^3, \quad C_{3,2} = \frac{\varepsilon^2 e}{2}s^2, \quad C_{4,0} = -\frac{e^4}{3},$$

$$C_{4,2} = \frac{3}{4}\varepsilon^2 e^2 s^2, \quad C_{4,4} = \frac{\varepsilon^4}{16}s^4.$$

$$\begin{aligned}\frac{z}{a} = s\{&D_{0,1}\sin\theta + D_{1,-1}\sin(M-\theta) + D_{1,1}\sin(M+\theta) + \\ &+ D_{1,3}\sin(M+3\theta) + D_{2,-1}\sin(2M-\theta) + D_{2,1}\sin(2M+\theta) + \\ &+ D_{2,3}\sin(2M+3\theta) + D_{3,-1}\sin(3M-\theta) + D_{3,1}\sin(3M+\theta) + \\ &+ D_{3,3}\sin(3M+3\theta) + D_{4,1}\sin(4M+\theta) + D_{4,3}\sin(4M+3\theta) + \\ &+ D_{5,1}\sin(5M+\theta) + D_{5,3}\sin(5M+3\theta) + D_{5,5}\sin(5M+5\theta)\},\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$D_{0,1} = -\frac{3}{2}e - \varepsilon^2 e\left(3 - \frac{129}{32}s^2\right),$$

$$D_{1,-1} = -\frac{e^2}{8} - \frac{e^4}{24} - \frac{\varepsilon^2 e^2}{8}\left(25 - \frac{509}{16}s^2\right),$$

$$\begin{aligned}D_{1,1} = 1 - \frac{e^2}{2} + \frac{3}{16}\varepsilon^2 s^2 - \frac{e^4}{64} - \frac{\varepsilon^4}{4}s^2\left(1 - \frac{47}{64}s^2\right) - \\ - \frac{\varepsilon^2 e^2}{2}\left(13 - \frac{269}{16}s^2\right),\end{aligned} \tag{18}$$

$$D_{1,3} = \frac{41}{128}\varepsilon^2 e^2 s^2, \quad D_{2,-1} = -\frac{e^3}{24},$$

$$D_{2,1} = \frac{e}{2} - \frac{3}{8}e^3 + \frac{\varepsilon^2 e}{2}\left(6 - \frac{127}{16}s^2\right),$$

$$D_{2,3} = -\frac{15}{32}\varepsilon^2 e s^2, \quad D_{3,-1} = -\frac{3}{128}e^4,$$

$$D_{3,1} = \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e^4 + \frac{\varepsilon^2 e^2}{8}\left(27 - \frac{559}{16}s^2\right),$$

$$D_{3,3} = \frac{3}{16}\varepsilon^2 s^2 - \frac{\varepsilon^4}{4}s^2\left(1 - \frac{33}{32}s^2\right) - \frac{51}{32}\varepsilon^2 e^2 s^2,$$

$$D_{4,1} = \frac{e^3}{3}, \quad D_{4,3} = \frac{17}{32}\varepsilon^2 e s^2, \quad D_{5,1} = \frac{125}{384}e^4,$$

$$D_{5,3}=\frac{139}{128}\varepsilon^2e^2s^2,\quad D_{5,5}=\frac{9}{128}\varepsilon^4s^4.$$

$$\begin{aligned}w=\Omega+\operatorname{arctg}\{\sqrt{1-s^2}\,\operatorname{tg}[M+\theta+m_{0,2}\sin 2\theta+m_{1,0}\sin M+\\+m_{1,2}\sin(M+2\theta)+m_{2,0}\sin 2M+m_{2,2}\sin(2M+2\theta)+\\+m_{3,0}\sin 3M+m_{3,2}\sin(3M+2\theta)+m_{4,0}\sin 4M+\\+m_{4,2}\sin(4M+2\theta)+m_{4,4}\sin(4M+4\theta)]\}+\mu(M+\theta)+\\+\sqrt{1-s^2}\,\{l_{1,0}\sin M+l_{2,0}\sin 2M+l_{2,2}\sin(2M+2\theta)\},\end{aligned}\tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}&m_{0,2}=-\frac{\varepsilon^2e^2}{32}s^2,\quad m_{1,2}=-\frac{\varepsilon^2e}{2}s^2,\\&m_{1,0}=2e-\frac{e^3}{4}+\varepsilon^2e\left(6-\frac{17}{2}s^2\right),\\&m_{2,0}=\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4+\frac{\varepsilon^2e^2}{4}\left(13-\frac{85}{4}s^2\right),\\&m_{2,2}=\frac{\varepsilon^2}{4}s^2\left(\frac{3}{2}-7e^2\right)-\frac{\varepsilon^4}{4}s^2\left(2-\frac{7}{4}s^2\right),\\&m_{3,0}=\frac{13}{12}e^3,\quad m_{3,2}=\varepsilon^2es^2,\quad m_{4,0}=\frac{103}{96}e^4,\\&m_{4,2}=\frac{61}{32}\varepsilon^2e^2s^2,\quad m_{4,4}=\frac{29}{256}\varepsilon^4s^4,\\&l_{1,0}=-5\varepsilon^2e,\quad l_{2,0}=-\frac{33}{8}\varepsilon^2e^2,\quad l_{2,2}=-\frac{11}{32}\varepsilon^4s^2.\end{aligned}\tag{20}$$

Напомним, что все полученные формулы справедливы для орбит с эксцентриситетами порядка не более $\frac{1}{30}$.

§ 3. Случай орбит с небольшими наклонностями

Если наклонность орбиты не превосходит 30°, то для координаты w можно получить разложение, аналогичное разложениям для r и z. Так как

$$\operatorname{tg}\{\operatorname{arctg}[\sqrt{1-s^2}\,\operatorname{tg}\varphi]\}=\sqrt{1-s^2}\,\operatorname{tg}\varphi,$$

то получим (см. [5])

$$\operatorname{arctg}[\sqrt{1-s^2}\,\operatorname{tg}\varphi]=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\beta^k\sin 2k\varphi,\tag{21}$$

где

$$\beta=\frac{\sqrt{1-s^2}-1}{\sqrt{1-s^2}+1}.$$

Если для простоты ограничиться рассмотрением орбит, для которых e порядка не более 10^{-3}, а наклонность не превышает 30°, то в сумме (21) можно сохранить лишь пять первых членов. После несложных преобразований найдем разложение для функции $\sin 2k\varphi$ в ряд по степеням e

$$\sin 2k\varphi = \sin 2k(M+\theta)\left\{1 - \frac{1}{2}[2k(\varphi - M - \theta)]^2 + \ldots\right\} +$$
$$+ \cos 2k(M+\theta)\left\{2k(\varphi - M - \theta) - \frac{1}{6}[2k(\varphi - M - \theta)]^3 + \ldots\right\}.$$

Подставляя в это выражение $\varphi - M - \theta$ из (19), получим искомое разложение для функции $\sin 2k\varphi$. Наконец, подставляя его в формулу (21), а затем (21) в (19), получим окончательную формулу для ϖ.

$$\begin{aligned} \varpi = \Omega &+ K(M+\theta) + K_{0,2}\sin 2\theta + K_{1,0}\sin M + \\ &+ K_{1,2}\sin(M+2\theta) + K_{2,0}\sin 2M + K_{2,2}\sin(2M+2\theta) + \\ &+ K_{2,4}\sin(2M+4\theta) + K_{3,2}\sin(3M+2\theta) + K_{3,4}\sin(3M+4\theta) + \\ &+ K_{4,2}\sin(4M+2\theta) + K_{4,4}\sin(4M+4\theta) + K_{5,4}\sin(5M+4\theta) + \\ &+ K_{5,6}\sin(5M+6\theta) + K_{6,4}\sin(6M+4\theta) + K_{6,6}\sin(6M+6\theta) + \\ &+ K_{7,6}\sin(7M+6\theta) + K_{7,8}\sin(7M+8\theta) + K_{8,8}\sin(8M+8\theta) + \\ &+ K_{9,8}\sin(9M+8\theta) + K_{10,10}\sin(10M+10\theta), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} K &= 1 + \mu, \quad K_{0,2} = \frac{3}{4}e^2\beta, \\ K_{1,0} &= 2e + \varepsilon^2 e\left(6 - \frac{17}{2}s^2\right) - 5\varepsilon^2 e\sqrt{1-s^2}, \\ K_{1,2} &= -2e\beta - \varepsilon^2 e\left[6\beta + \frac{s^2}{2}(1 - 17\beta - \beta^2)\right], \\ K_{2,0} &= \frac{5}{4}e^2, \\ K_{2,2} &= -\frac{11}{32}\varepsilon^4 s^2\sqrt{1-s^2} + (1-\beta^2)\left[\frac{3}{8}\varepsilon^2 s^2 - \frac{\varepsilon^4}{16}s^2(8-7s^2)\right] + \\ &+ \beta\left(1 - 4e^2 - \frac{25}{256}\varepsilon^4 s^4\right), \\ K_{2,4} &= \frac{11}{4}e^2\beta^2, \\ K_{3,2} &= \varepsilon^2 e s^2(1-\beta^2) + \beta\left[2e + \varepsilon^2 e\left(6 - \frac{17}{2}s^2\right)\right], \\ K_{3,4} &= -\frac{5}{4}\varepsilon^2 e\beta - \beta^2\left[2e + \varepsilon^2 e\left(6 - \frac{17}{2}s^2\right)\right], \\ K_{4,2} &= \frac{13}{4}e^2\beta, \\ K_{4,4} &= \frac{29}{256}\varepsilon^4 s^4 + \beta\left[\frac{3}{8}\varepsilon^2 s^2 - \frac{\varepsilon^4}{16}s^2(8-7s^2)\right] + \\ &+ \frac{\beta^2}{2}\left[1 - 16e^2 - \frac{9}{16}\varepsilon^4 s^4\right] - \frac{3}{8}\varepsilon^2\beta^3 s^2. \end{aligned} \tag{23}$$

$$K_{5,4} = \frac{7}{4}\varepsilon^2 e\beta s^2 + \beta^2\left[2e + \varepsilon^2 e\left(6 - \frac{17}{2}s^2\right)\right],$$

$$K_{5,6} = -2e\beta^2(\varepsilon^2 s^2 + \beta), \quad K_{6,4} = \frac{21}{4}e^2\beta^2,$$

$$K_{6,6} = \frac{47}{256}\varepsilon^4 s^4\beta + \beta^2\left[\frac{3}{8}\varepsilon^2 s^2 - \frac{\varepsilon^4}{16}s^2(8 - 7s^2)\right] + \\ + \frac{\beta^3}{3} - \frac{3}{8}\varepsilon^2\beta^4 s^2,$$

$$K_{7,6} = e\beta^2\left(2 + \frac{5}{2}\varepsilon^2 s^2\right),$$

$$K_{7,8} = -2e\beta^4,$$

$$K_{8,8} = \frac{65}{256}\beta^2 s^4 + \frac{3}{8}\varepsilon^2\beta^3 s^2 + \frac{\beta^4}{4},$$

$$K_{9,8} = 2e\beta^4,$$

$$K_{10,10} = \frac{3}{8}\varepsilon^2\beta^4 s^2 + \frac{\beta^5}{5}.$$

§ 4. Конкретные примеры

Рассмотрим несколько численных примеров. Примем для элементов следующие значения: $a = 8498$ *км*, $i = \arcsin s = 32°51'$, $\omega = 0°$, $45°$, $e = 0{,}0000$, $0{,}0001$, $0{,}0002$, $0{,}0005$, $0{,}001$.

Используя формулу (15), можно построить графическую зависимость r от M для различных значений e и ω. Из рис. 1 и 2 видно, как сильно изменяются возмущения радиуса-вектора при незначительном изменении эксцентриситета, если последний мал.

Пусть $a = 7099$ *км*, $e = 0{,}004$, $i = \arcsin s = 48°24'$, $\omega = 115°$. Эта группа элементов приближенно соответствует спутнику (Тирос I) США. Используя формулы (15), (16), (17), (18), (19), (20), получим

$$r = 7101{,}293 - 28{,}389\cos M + 0{,}866\cos(2M + 2\theta) - \\ - 0{,}057\cos 2M + 0{,}007\cos(3M + 2\theta),$$

$$z = 5309{,}446\sin(M + \theta) - 31{,}849\sin\theta + 10{,}623\sin(2M + \theta) + \\ + 0{,}488\sin(3M + 3\theta) + 0{,}032\sin(3M + \theta) - 0{,}011\sin(M - \theta) - \\ - 0{,}005\sin(2M + 3\theta) + 0{,}005\sin(4M + 3\theta),$$

$$w = \Omega + \operatorname{arctg}\{0{,}664\operatorname{tg}[M + \theta + (2083)''\sin M + \\ + (212)''\sin(2M + 2\theta) + (4)''\sin 2M]\}.$$

$$M = (69\,883\,629)''(t - t_0),$$

$$\theta = (54\,154)''(t - t_0) + (133\,400\,000)''.$$

Здесь амплитуды для r и z выражены в километрах, а время t в сутках. Как видим, все полученные формулы оказываются достаточно простыми для практических вычислений координат спутника.

§ 5. Случай e=0

Согласно работе [4], при $e=0$ движение происходит по поверхности эллипсоида вращения, определяемого уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

и вне однополостного гиперболоида вращения, определяемого уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{c^2(1-s^2)}-\frac{z^2}{c^2s^2}=1.$$

Таким образом, область возможности движения представляет собой эллипсоидальный пояс, ширина которого определяется величиной s. При $s=1$, очевидно, $w=\Omega=$ $=\text{const}$, и для удобства можно положить $w=\frac{\pi}{2}$. В этом случае, как следует из [4], движение спутника будет происходить в меридиональной плоскости по эллипсу с полуосями $a\sqrt{1+\varepsilon^2}$ и a.

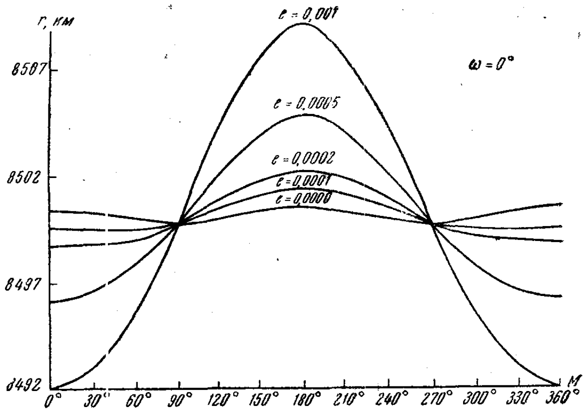

Рис. 1

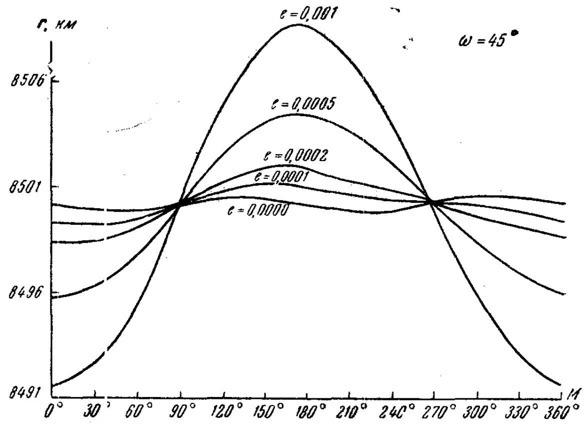

Рис. 2

Как известно, классическая задача двух неподвижных центров допускает, в частности, эллиптические траектории с фокусами в неподвижных массах. В рассматриваемом нами частном случае обобщенной задачи двух неподвижных центров траектория есть эллипс, большая полуось которого перпендикулярна оси z. Но ось z совпадает с линией, соединяющей неподвижные массы, которые тем самым не могут быть фокусами рассматриваемого эллипса. Это объясняется тем, что в качестве расстояния между неподвижными массами была принята мнимая величина, равная $2ic$ ($i=\sqrt{-1}$).

Можно показать, что фокусы рассматриваемого нами эллипса находятся на расстоянии c от начала координат. Обозначим искомое расстояние через c'. Из аналитической геометрии известна связь между полуосями эллипса и расстоянием между его фокусами.

Для нашего случая имеем

$$a = \sqrt{a^2 + c^2 - c'^2} \quad \text{или} \quad c'^2 = c^2.$$

При $e = 0$ формулы для координат r, z, w примут особенно простой вид:

$$\frac{r}{a} = C_{0,0} + C_{2,2} \cos(2M + 2\theta) + C_{4,4} \cos(4M + 4\theta),$$

$$\frac{z}{a} = s\{D_{1,1} \sin(M + \theta) + D_{3,3} \sin(3M + 3\theta) + D_{5,5} \sin(5M + 5\theta)\},$$

$$w = \Omega + K(M + \theta) + K_{2,2} \sin(2M + 2\theta) + K_{4,4} \sin(4M + 4\theta) +$$
$$+ K_{6,6} \sin(6M + 6\theta) + K_{8,8} \sin(8M + 8\theta) + \dots,$$

где коэффициенты $C_{j,j}$, $D_{j,j}$, K, $K_{j,j}$ определяются формулами (16), (18), (23), если положить $e = 0$. В работе [4] находим связь между прямоугольными координатами x, y, z и новыми координатами ξ, η, w.

$$x = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w,$$
$$y = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \tag{24}$$
$$z = \xi \cdot \eta,$$

где $\eta = s \cdot \sin \varphi$ и при $e = 0$, $\xi = a = \text{const}$. Далее из формулы (19) находим, что при $e = 0$

$$\varphi = M + \theta + m_{2,2} \sin(2M + 2\theta) + m_{4,4} \sin(4M + 4\theta),$$

где

$$M + \theta = n(1 + \nu)t - n(1 + \nu)t_0 + \omega.$$

Функции $\cos(M + \theta)$ и $\sin(M + \theta)$ будут периодическими по t с периодом $T = \dfrac{2\pi}{n(1 + \nu)}$.

Косинусы и синусы кратных аргументов $M + \theta$ будут иметь периоды $T_j = \dfrac{2\pi}{jn(1 + \nu)}$, что, очевидно, не изменит общего периода T. Следовательно, при подстановке φ в выражение для η и последующей подстановке η в формулы (24) выражение $\sqrt{(a^2 + c^2)(1 - \eta^2)}$ будет периодической относительно t функцией с периодом T. Функции $\cos w$ и $\sin w$ будут двоякопериодическими по t функциями с периодами

$$T' = \frac{2\pi}{Kn(1 + \nu)}, \quad T = \frac{2\pi}{n(1 + \nu)}.$$

Следовательно, имеем $\dfrac{T}{T'} = K$.

Отсюда получаем вывод: если K есть отношение целых чисел, то движение при $e=0$ будет периодическим, в противном случае движение будет периплегматическим.

Напомним, что $K = 1 + \mu$ и по своей величине близко к единице.

Работа выполнена под руководством Е. П. Аксенова, которому автор весьма благодарен за ценные советы и указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Izsak I. G. Astr. J., **66**, No. 3, 1961.
2. Чеботарев Г. А. «Бюл. ИТА», **9**, 1(104).
3. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. «Искусственные спутники Земли», вып. 8. Изд-во АН СССР, 1961, стр. 64—71.
4. Аксенов Е. П. «Космические лучи», **2**, вып. 1, 1964.
5. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. 2. ОНТИ, 1937, стр. 222—223.

Поступила в редакцию
25.6 1963 г.

Кафедра
небесной механики и
гравиметрии