Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

М. И. СТАКВИЛЕВИЧУС

ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ С УЧЕТОМ ГРАВИТАЦИИ

Исследуется гравитационное воздействие на частицеподобные решения для скалярного комплексного потенциала, если гравитационное поле создается лишь массой сферически симметричного скалярного потенциала. Показывается, что гравитационное воздействие несущественно, если отношение гравитационного радиуса к радиусу частицы намного меньше единицы. Так, для частицы с радиусом $r_0 \sim 10^{-13}$ *см* и массой $\mu \sim 10^{-27}$ *г* гравитационные поправки составляют примерно 10^{-40} %.

Частицеподобные решения в нелинейной классической теории поля удобны тем, что потенциал поля, тензор энергии-импульса не имеют сингулярностей, к тому же энергия поля сосредоточена в небольшой области пространства, в сфере, радиус которой может быть сопоставлен с радиусом элементарной частицы.

Для лагранжиана

$$L = -\frac{\partial\psi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - m_0^2\left[\psi^*\psi + F(\psi^*\psi)\right] \tag{1}$$

скалярного комплексного потенциала ψ (F — нелинейная часть лагранжиана) частицеподобные решения исследованы довольно подробно [1—7].

Если положить [1]

$$\psi = \varphi e^{i\varepsilon x_4}, \tag{2}$$

уравнение Лагранжа примет вид (в случае сферической симметрии)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - (m_0^2 - \varepsilon^2)\varphi - m_0^2\frac{\partial F}{\partial\varphi} = 0. \tag{3}$$

Наиболее полно исследованы частицеподобные решения со ступенчатой нелинейностью, заключающейся в том, что

$$F(\varphi) = \begin{matrix} 0 & \text{при } |\varphi| < A \\ -\lambda\varphi & \text{при } |\varphi| > A \end{matrix}$$

и кубической нелинейностью, где $F(\varphi) = -\frac{\lambda}{2}\varphi^4$.

В указанных случаях частицеподобные решения имеют характер, напоминающий ход волновой функции для частицы в потенциальной яме конечной глубины. Именно: $\varphi \sim \frac{1}{r} \sin \sqrt{(\varepsilon^2 - m_0^2 + \lambda m_0^2)}\, r$ в пределе радиуса частицы и $\varphi \sim \frac{1}{r} e^{-\sqrt{m_0^2 - \varepsilon^2}\, r}$ вне радиуса частицы.

В указанных выше исследованиях не учитывалось в явном виде искривление метрики в частице, обусловленное потенциалом полевой массы, и поэтому, строго говоря, уравнения поля следует записывать в общековариантной форме, тем более, что М. Ф. Широковым [9] было указано, что и в теории Борна—Инфельда, и в теории Боппа—Подольского искажением метрики пренебрегать нельзя, так как в представлении метрического тензора $g_{ii} = 1 + h_{ii}$ либо h_{11} (теория Борна—Инфельда), либо h_{44} (теория Боппа—Подольского) расходится в нуле из-за сингулярности поля в центре частицы.

Так как частицеподобные решения всюду регулярны, указания М. Ф. Широкова автоматически переносить на данный случай нельзя, и гравитационные поправки нужно исследовать особо.

Функцию Лагранжа, аналогичную (1), нетрудно привести к ковариантной форме. Именно

$$L = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^i} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - m_0^2 [\psi^* \psi + F(\psi^* \psi)]. \tag{4}$$

Тензор энергии-импульса, определяемый уравнением [10]

$$T_i^k = \frac{2 g^{km}}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^e} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L)}{\partial \left(\frac{\partial g^{im}}{\partial x^e} \right)} - \frac{\partial (\sqrt{-g}\, L)}{\partial g^{im}} \right],$$

координатах кривизны [11] с сферически симметричным потенциалом φ имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$T_1^1 = e^{-\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon^2 e^{-\nu} \varphi^2 - m_0^2 (\varphi^2 + F),$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon^2 e^{-\nu} \varphi^2 - m_0^2 (\varphi^2 + F),$$

$$T_4^4 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon^2 e^{-\nu} \varphi^2 - m_0^2 (\varphi^2 + F),$$

$$(e^{\lambda} = g_{11}(r);\ -e^{\nu} = g_{44}(r)).$$

Линейно независимые компоненты уравнения Эйнштейна $R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k$ имеют вид

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial r}}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi k}{r^4} \left[e^{-\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon^2 e^{-\nu} \varphi^2 + m_0^2 (\varphi^2 + F) \right],$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\frac{\partial \nu}{\partial r}}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{r^4} \left[e^{-\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon^2 e^{-\nu} \varphi^2 - m_0^2 (\varphi^2 + F) \right].$$

Чтобы система уравнений, определяющая три функции φ, λ, ν от аргумента r, была полной, присоединим к уравнениям Эйнштейна уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,L)}{\partial\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x^i}}\right]-\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\psi^*}=0,$$

приводящее после непосредственного вычисления к

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{\dfrac{\partial\nu}{\partial r}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial r}}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]+(\varepsilon^2e^{-\nu}-m_0^2)\,\varphi-m_0^2\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0.$$

В частности, для ступенчатой нелинейности получим систему уравнений:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=-\frac{8\pi k}{c^4}\,[e^{-\lambda}\varphi'^2+(\varepsilon^2e^{-\nu}+m_k^2)\,\varphi^2],\tag{5}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=\frac{8\pi k}{c^4}\,[e^{-\lambda}\varphi'^2+(\varepsilon^2e^{-\nu}-m_k^2)\,\varphi^2],\tag{6}$$

$$e^{-\lambda}\left[\varphi''+\left(\frac{2}{r}+\frac{\nu'-\lambda'}{2}\right)\varphi'\right]+(\varepsilon^2e^{-\nu}-m_k^2)\,\varphi=0.\tag{7}$$

Здесь $k=1$ внутри частицы и $k=0$ вне частицы.

Нетрудно убедиться, что система (5)—(7) несовместима с уравнением (3), ибо при $\lambda=0$ левая часть (5) равна нулю, а правая отрицательна в физически приемлемых пределах констант: $m_k{}^2>0$; $-m_0{}^2<\lambda<m_0^2$.

Приведем систему уравнений (5) — (7) к безразмерному виду подстановкой $u=\dfrac{\sqrt{8\pi k}}{c^2}\varphi$, $x=\varepsilon r$, $\eta_k=\dfrac{m_k^2}{\varepsilon^2}$.

Тогда

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\lambda'}{x}\right)-\frac{1}{x^2}=-e^{-\lambda}u'^2-(e^{-\nu}+\eta_k)\,u^2,\tag{8}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\nu'}{x}\right)-\frac{1}{x^2}=e^{-\lambda}u'^2+(e^{-\nu}-\eta_k)\,u^2,\tag{9}$$

$$e^{-\lambda}\left(u''+\frac{2}{x}u'+\frac{\nu'-\lambda'}{2}u'\right)+(e^{-\nu}-\eta_k)\,u=0.\tag{10}$$

Решение системы (8)—(10) в окрестности нуля можно исследовать, представив искомые функции в виде степенных рядов. Непосредственное вычисление дает

$$u=a\left\{1+\frac{\eta_1-\beta}{6}x^2+\left[\frac{(\eta_1-\beta)^2}{120}+\frac{a^2(5\eta_1^2-6\eta_1\beta+4\beta^2)}{180}\right]x^4+\ldots\right\},\tag{11}$$

$$e^{-\lambda}=1-\frac{a^2(\eta_1+\beta)}{3}x^2-\left[\frac{2a^2(\eta_1-\beta)(2\eta_1+\beta)}{45}+\frac{a^4(\eta_1-2\beta)\beta}{15}\right]x^4+\ldots,\tag{12}$$

$$e^{-\nu}=\beta\left\{\left[1+\frac{a^2(\eta_1-2\beta)}{3}x^2+(\eta_1-2\beta)\,a^2\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\eta_1-\beta}{30}+\frac{a^2(5\eta_1-7\beta)}{45}\right]x^4+\ldots\right\}.\tag{13}$$

Итак, имеются решения, ограниченные в нуле, причем (11) можно представить в виде

$$u = a\left[\frac{\sin(\sqrt{\beta - \eta_1}\, x)}{x} + a^2 f(x)\right], \tag{14}$$

где $f(0) = 0$.

Очевидно [10], как и следовало ожидать, $\lambda(0) = 0$; $\nu(0) < 1$, и в окрестности нуля потенциал φ убывает быстрее, чем в отсутствие гравитации, так как $\beta - \eta_1 > 1 - \eta_1$.

На больших расстояниях от центра симметрии λ и ν должны асимптотически приближаться к решению Шварцшильда

$e^{-\lambda} \approx 1 - \frac{2\mu\varepsilon k}{c^2 x} \approx e^{-\nu}$. С другой стороны, уравнение (8) можно переписать в виде

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x x^2 (e^{-\lambda} u'^2 + e^{-\nu} u^2 + \eta_k u^2)\, dx.$$

Отсюда получаем выражение для массы

$$\mu = \frac{c^2}{2\varepsilon k}\int_0^\infty x^2 (e^{-\lambda} u'^2 + e^{-\nu} u^2 + \eta_k u^2)\, dx. \tag{15}$$

Заметим, что ввиду быстрого убывания функции u с возрастанием расстояния от центра, верхний предел интеграла можно оставить конечным.

Зависимость определяемых функций $e^{-\lambda}$, $e^{-\nu}$ и φ качественно изображена на рис. 1, где радиусу частицы соответствует точка перегиба потенциала φ (масштаб не сохранен).

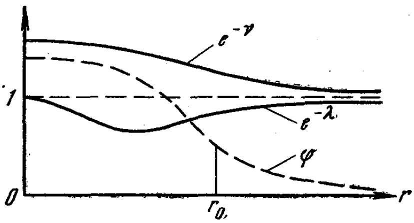

Рис. 1

Аналогичная зависимость метрики от расстояния имеет место и в случае кубической нелинейности, так как и в этом случае ограниченность и четность потенциала φ обусловливает ограниченность метрики.

Оценим поправки, обусловленные гравитацией, для конкретной величины радиуса частицы r_0 и массы μ.

Радиус частицы можно оценить из соотношения (14), так как точка перегиба соответствует значению аргумента порядка единицы: $(\beta - \eta_1) x_0^2 \sim 1$.

Массу частицы можно оценить заменой в (15) верхнего предела $x_0 = \varepsilon r_0$:

$$\mu \sim \frac{a^2 c^2 (\beta + \eta_1)}{2\varepsilon k} x_0^3.$$

Отсюда

$$a^2 \sim \frac{2k\mu}{c^2 r_0} = \frac{r_g}{r_0}, \tag{16}$$

где r_g — гравитационный радиус частицы. Как видно из (16), гравитационная поправка будет тем меньше, чем меньше отношение гравитационного и истинного радиусов частицы. Так, для $r_0 = 10^{-13}$ *см* и $\mu = 10^{-27}$ *г* получаем исчезающе малую гравитационную поправку: $a^2 \sim$

$\sim 10^{-42}$. Однако вопрос о том, сохранится ли устойчивость частицы под действием гравитации, требует особого рассмотрения.

Полученный результат имеет простой физический смысл: если частица «размазана», плотность массы ее мала по сравнению с плотностью массы гипотетической частицы, втиснутой в пределы гравитационного радиуса, гравитационные силы (как указывается во всех учебниках) пренебрежимо малы по сравнению с другими силами, описать которые и пытается нелинейная теория поля. Однако не вполне очевидно, что энергия всех элементарных частиц сосредоточена в пределах их классического радиуса, и для частиц, радиус которых намного меньше классического, гравитационные силы могут играть существенную роль.

В заключение пользуюсь случаем выразить сердечную благодарность проф. Я. П. Терлецкому за проявленный интерес и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finkelstein R., Levier R., Ruderman M. Phys. Rev., **83**, 326—332, 1951.
2. Мицкевич Н. ЖЭТФ, **29**, 354, 1955.
3. Finkelstein R., Fronsdal C., Klaus D. Phys. Rev., **109**, 1571, 1956.
4. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
5. Шушурин С. Ф. Диссертация, МОПИ, 1961.
6. Рыбаков Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 4, 27, 1962.
7. Шушурин С. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 1962.
8. De Brogle L. G. Phys. et Rad., **8**, 225, 1927.
9. Широков М. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 4, 1957.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1959.
11. Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963.

Поступила в редакцию
6.7 1963 г.

Кафедра
теоретической физики