

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

В. Г. ДМИТРИЕВ, В. П. МОДЕНОВ

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ЛИНИЯХ

В работе [1] проведен анализ процесса распространения волн в нелинейной диссипативной диспергирующей линии передачи с квадратичной нелинейностью распределенного заряда, $Q=C_0(v+\eta v^2)$, где v — напряжение на распределенной емкости C в случае, когда эффективно могут взаимодействовать лишь волны основной и второй гармоник. В работе [2] рассмотрен случай нелинейности более высокого порядка — кубической, $Q=C_0(v+\eta_1 v^2+\eta_2 v^3)$. В этом случае процесс взаимодействия волн основной и второй гармоник, в предположении малой нелинейности и медленности изменения амплитуд $V_{1,2}$ и фаз $\varphi_{1,2}$, может быть описан так называемыми укороченными уравнениями [2], которые удобно записать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{V}_1}{dz} + \sigma_1 \widehat{V}_1 \widehat{V}_2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + \delta_1 \widehat{V}_1 &= 0, \\ \frac{d\widehat{V}_2}{dz} - \sigma_2 \widehat{V}_1^2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) + \delta_2 \widehat{V}_2 &= 0, \\ \frac{d\varphi_1}{dz} + \sigma_1 \widehat{V}_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} \gamma_1 \widehat{V}_1^2 + \gamma_1 \widehat{V}_2^2 &= 0, \\ \frac{d\varphi_2}{dz} - \Delta + \sigma_2 \frac{\widehat{V}_1^2}{\widehat{V}_2} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + 2\gamma_2 \widehat{V}_1^2 + \gamma_2 \widehat{V}_2^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В системе (1) приняты следующие обозначения: $\widehat{V}_i = V_i \cdot [V_1^2(0) + V_2^2(0)]^{-1/2}$ — безразмерные амплитуды волн, $z = \beta_1 \xi$, ξ — расстояние вдоль линии, $\sigma_1 = \frac{m}{2}$; $\sigma_2 = \frac{m\beta_2}{4\beta_1}$ — коэффициенты связи, m — коэффициент модуляции, β_1 — постоянные распространения волн, γ_i — коэффициенты «нелинейной» расстройки, связанные с коэффициентом η_2 , δ_i — приведенные коэффициенты затухания, параметр Δ характеризует рассогласование волн по фазовым скоростям распространения, $i=1, 2$; без ограничения общности можно в дальнейшем положить $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Система уравнений (1) не может быть решена в общем виде аналитически; в случае отсутствия затухания ($\delta_i=0$) основные особенности системы могут быть выяснены на основе рассмотрения фазовой картины [2]. Анализ диссипативной системы, так же, как и исследование пространственных протяженностей процессов, может быть проведен лишь методом численного интегрирования на электронной вычислительной машине. Ниже приведены результаты такого интегрирования.

Уравнения (1) были проинтегрированы на электронно-вычислительной машине методом Адамса; при этом граничные условия ($z=0$) были в основном приняты в виде: $\widehat{V}_1(0)=1$; $\widehat{V}_2(0) \approx 0$; $\varphi_{1,2}(0)=0$. Такой выбор граничных условий обусловлен,

прежде всего, интересом к исследованию процесса умножения частоты в нелинейных диспергирующих линиях.

На рис. 1 представлены функции $\hat{V}_{1,2}(\xi)$ для различных коэффициентов $m\beta_1$ в случае $\gamma=0$ (случай $\gamma=0$ подробно рассмотрен в [1]). Из графиков следует, что энергия основной волны, в отсутствие потерь ($\delta_i=0$), полностью перекачивается в энергию второй гармоники на расстоянии $\xi_0 \approx 3 \cdot (m\beta_1)^{-1}$ см. Практически в радиодиапазоне длина ξ_0 может достигать нескольких метров. Если $\hat{V}_2(0) \ll 1$, обратная перекачка энергии в основную гармонику начинается на длинах $\xi \gg \xi_0$, так что, для реально достижимых длин линий передачи в случае $\gamma=0$ и $\Delta=0$ обратная перекачка практически не имеет места.

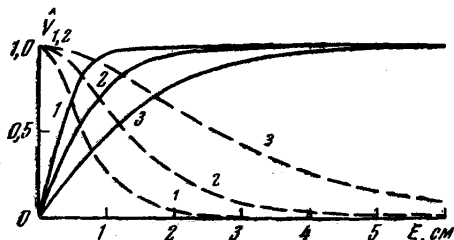


Рис. 1. Изменение относительных амплитуд второй (сплошные кривые) и основной (пунктир) гармоник с расстоянием вдоль системы ξ при различных параметрах $m\beta_1$, $\hat{V}_1(0) = 1$, $\hat{V}_2(0) = 10^{-11}$, $\Phi_{1,2}(0) = 0$, $\gamma = 0$, $\delta_{1,2} = 0$; $\Delta = 0$. 1 — $m\beta_1 = 4$ см⁻¹, 2 — $m\beta_1 = 2$ см⁻¹, 3 — $m\beta_1 = 1$ см⁻¹.

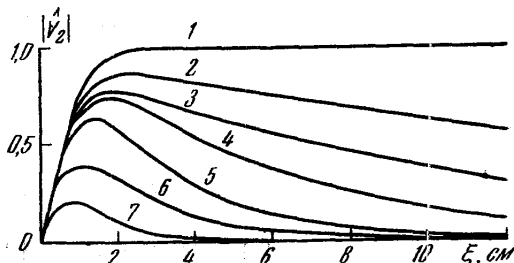


Рис. 2. Изменение относительной амплитуды второй гармоники с расстоянием ξ при различных параметрах затухания: $\delta_{1,2}$, $\hat{V}_1(0) = 1$, $\hat{V}_2(0) = 10^{-11}$, $\Phi_{1,2} = 0$, $\gamma = 0$, $\Delta = 0$, $m\beta_1 = 2$ см⁻¹. 1 — $\delta_1 = \delta_2 = 0$, 2 — $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$, 3 — $\delta_1 = 0,05$, $\delta_2 = 0,20$, 4 — $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$, 5 — $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0,5$, 6 — $\delta_1 = \delta_2 = 0,5$, 7 — $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

В диссипативной системе ($\delta_i \neq 0$) энергия основной гармоники лишь частично перекачивается в энергию второй гармоники (рис. 2); максимум энергии последней с ростом потерь сдвигается в сторону меньших длин ξ_0 . При $\xi > \xi_0$ (δ) происходит затухание амплитуд по экспоненциальному закону с показателем 2δ .

Наличие в уравнениях (1) квадратичных членов вида $\gamma \hat{V}_2^2$, как явствует из рис. 3, значительно усложняет картину. В системе без потерь при $\gamma \leq 2\sigma$ зависимость $\hat{V}_2(\xi)$ в основном близка к таковой при $\gamma=0$; однако при этом пространственный масштаб перекачки энергии из основной гармоники во вторую несколько увеличивается (кривые 1, 2 на рис. 3). При $\gamma > 2\sigma$ сепаратриса на соответствующей фазовой картине (см. [2]) уже не проходит через точку $\hat{V}_2=0$, что приводит к появлению ярко выраженных пространственных биений между гармониками (кривые 3, 4). В этом случае интенсивность второй гармоники существенно определяется длиной системы.

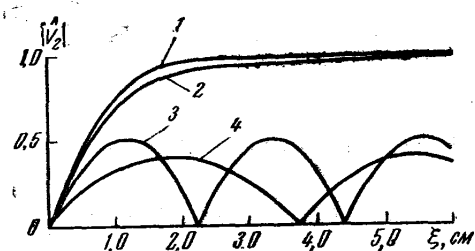


Рис. 3. Изменение относительной амплитуды второй гармоники с расстоянием ξ при различных параметрах кубической нелинейности γ . $\hat{V}_1(0) = 1$, $\hat{V}_2 = 10^{-11}$, $\Phi_{1,2} = 0$, $\delta_{1,2} = 0$, $\Delta = 0$, $m\beta_1 = 2$ см⁻¹. 1 — $\gamma = 0$, 2 — $\gamma\beta_1 = 2$ см⁻¹, 3 — $\gamma\beta_1 = 4$ см⁻¹, 4 — $\gamma\beta_1 = 5$ см⁻¹.

Наличие кубической нелинейности в отсутствие расстройки ($\Delta=0$) при данной длине системы может лишь ухудшить эффективность перекачки энергии во вторую гармонику. Этот факт связан с появлением дополнительного («нелинейного») рассогласования волн по фазовым скоростям [2]. Однако при наличии «линейной» расстройки Δ последняя (в зависимости от ее знака) может как

увеличить, так и скомпенсировать «нелинейную» расстройку. Вследствие этого в линии с нормальной дисперсией ($\Delta > 0$) и кубической нелинейностью эффективность перекачки во вторую гармонику может быть существенно повышена по сравнению с таковой для линии с квадратичной нелинейностью ($\gamma=0$) при том же абсолютном значении Δ . Сказанное иллюстрируется нижеприведенной таблицей некоторых результатов, полученных на ЭВМ.

Из таблицы видно, что зависимость относительной интенсивности второй гармоники от расстройки Δ в линии с кубической нелинейностью существенно определяется знаком расстройки, т. е. видом дисперсии линии [2].

В заключение отметим, что результаты, полученные на основе численного интегрирования системы (1) на электронной вычислительной машине, находятся в хорошем согласии с результатами качественного анализа системы (1) на фазовой плоскости, проведенного в [1, 2].

Авторы выражают благодарность С. А. Ахманову за ценные советы и обсуждение.

$\frac{\Delta}{\sigma}$	Относительная эффективность перекачки энергии во вторую гармонику при $\frac{m\beta_1}{2}=1$; $\delta_{1,2}=0$; $\hat{V}_1(0)=1$; $\hat{V}_2(0)=10^{-11}$; $\varphi_{1,2}(0)=0$	
	$\gamma=0$	$\gamma=2\sigma$
-2	0,38	0,20
-1	0,61	0,33
-0,5	0,81	—
0	1	1
+0,5	0,81	—
+1	0,61	0,72
+2	0,38	0,56

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», 6, 1116, 1961.
2. Дмитриев В. Г. «Вестн. Моск. ун-та», серия физики, астрономии, № 3, 85, 1963.

Поступила в редакцию
25.6 1963 г.

Кафедра
радиотехники