Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

Г. Д. МАРЧУК

ЕЩЕ РАЗ О ВЛИЯНИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ УСКОРЕНИЙ НА ПОКАЗАНИЯ МОРСКИХ ГРАВИМЕТРОВ

При наличии периодических возмущающих ускорений маятник гравиметра совершает вынужденные колебания около положения равновесия. Амплитуда этих колебаний зависит от амплитуды и частоты возмущающих ускорений. В связи с этим изменяется угол между маятником гравиметра и горизонтом и, следовательно, изменяются моменты действующих сил: силы тяжести и возмущающих сил. При небольших ускорениях это изменение несущественно, так как обусловленные ими ошибки в показаниях прибора меньше одного миллигала. С возрастанием ускорений ошибка возрастает пропорционально квадрату амплитуды ускорений и при ускорениях 10—20 *гал* достигает заметной величины.

Многократные измерения силы тяжести на море показали, что с помощью сильнодемпфированных гравиметров можно измерять силу тяжести при наличии возмущающих ускорений, достигающих 20 *гал*. Предложенная В. Л. Пантелеевым система с двукратным оптико-механическим демпфированием [2] позволяет измерять силу тяжести при наличии возмущающих ускорений, достигающих 100 *гал*. При таких ускорениях углы отклонения маятника от положения равновесия для единичных маятников будут достигать значительной величины и соответственно значительно изменяться моменты действующих сил.

Произведем оценку величины ошибки, обусловленной этим эффектом. В том случае, когда коэффициент затухания не зависит от положения маятника и скорости его движения, дифференциальное уравнение движения маятника при воздействии возмущающих ускорений, изменяющихся по закону синуса, может быть записано

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + n^2(\Phi + \alpha + \varphi) - d^2 g\cos(\alpha + \varphi) - d^2\ddot{z}_0\cos(\alpha + \varphi)\cos\omega t = 0, \qquad (1)$$

где ε — коэффициент, зависящий от силы вязкого трения и конструкции гравиметра, n^2 и d^2 — постоянные прибора, Φ — угол закручивания нити, когда маятник гравиметра находится в горизонте, α — угол между горизонтом и маятником в положении равновесия на пункте, φ — угол элонгации маятника от положения равновесия, g — значение силы тяжести на пункте, $\ddot{z}_0$ — амплитуда возмущающих ускорений, ω — частота их.

С точностью до второго порядка малости (считая первым порядком малости угол элонгации маятника) после элементарных преобразований уравнение (1) можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + r^2\varphi = -\frac{p^2\varphi^2}{2} + \frac{p^2\ddot{z}_0}{g}\cos\omega t, \qquad (2)$$

где

$$r^2 = n^2 + p^2\alpha \quad \text{и} \quad p^2 = d^2 g.$$

Решая это уравнение при помощи метода малого параметра, получим

$$\varphi = \frac{p^2\ddot{z}_0\lambda_1}{r^2 g}\cos(\omega t + \beta) - \frac{p^6\ddot{z}_0^2\lambda_1^2}{4r^6 g^2} + \frac{p^6\ddot{z}_0^2\lambda_1^2\lambda_2}{4r^6 g^2}\cos(2\omega t + 2\beta_1 + \beta_2), \qquad (3)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-\omega^2)^2+16\varepsilon^2\omega^2}},$$

$$\beta_1 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-\omega^2}, \quad \beta_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-4\omega^2}.$$

Вычисляя приращения силы тяжести, мы осредняем показания гравиметра за длительный промежуток времени. Осреднив значение φ, получим

$$\bar{\varphi} = -\frac{p^6\ddot{z}_0^2\lambda_1^2}{2r^6g^2}, \tag{4}$$

откуда

$$\delta g = -\frac{p^4\lambda_1^2\ddot{z}_0^2}{4r^4g}. \tag{5}$$

Выражение $\ddot{z}_0\lambda_1$ есть не что иное, как амплитуда колебаний маятника гравиметра при воздействии на систему возмущающих ускорений с амплитудой $\ddot{z}_0$ и частотой ω. Обозначив амплитуду колебаний маятника через a и принимая во внимание, что $\frac{p^2}{r^2} = \frac{\Phi}{1+\Phi\alpha}$, получим

$$\delta g = \frac{\Phi^2}{4g(1+\Phi\alpha)^2}\bar{a^2}. \tag{6}$$

Для вычисления поправки в показания гравиметра необходимо знать угол закручивания нити. Так как величина этой поправки даже при значительных ускорениях меньше 100 *мгл*, то значение силы тяжести g можно принять равное нормальному на широте 45°. Тогда величина $\frac{\Phi^2}{g(1+\Phi\alpha)^2}$ для данного гравиметра будет постоянной, и погрешность в показаниях гравиметра равна

$$\delta g = -c\bar{a^2}, \tag{7}$$

где

$$c = \frac{\Phi^2}{g(1+\Phi\alpha)^2}.$$

Возмущающие ускорения при наблюдениях на море только в первом приближении можно аппроксимировать синусоидальной функцией. В действительности возмущающие ускорения имеют целый спектр частот и так как принцип суперпозиции справедлив только в случае линейных колебательных систем, необходимо оценить погрешность, возникающую при воздействии возмущающих ускорений, в спектре которых имеется несколько частот. Для простоты ограничимся случаем двух частот.

При воздействии возмущающих ускорений, в спектре которых имеется две частоты, дифференциальное уравнение движения маятника гравиметра с точностью до величин второго порядка малости может быть записано в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + r^2\varphi = -\frac{p^2\varphi^2}{2} + \frac{p^2\ddot{z}_1}{g}\cos\omega_1 t + \frac{p^2\ddot{z}_2}{g}\cos\omega_2 t, \tag{8}$$

где $\ddot{z}_1$ и $\ddot{z}_2$ — амплитуды гармоник возмущающих ускорений, ω_1 и ω_2 — частоты этих гармоник.

Решая это уравнение при помощи метода малого параметра, получим

$$\begin{aligned}\varphi = &-\frac{p^6\ddot{z}_1^2\mu_1^2}{4r^6g^2} - \frac{p^6\ddot{z}_1\ddot{z}_2\mu_1\mu_2\mu_6}{4r^6g^2}\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_6] - \\ &-\frac{p^2\ddot{z}_1\mu_1}{4r^2g}\cos(\omega_1 t+\gamma_1) - \frac{p^2\ddot{z}_2\mu_2}{4r^2g}\cos(\omega_2 t+\gamma_2) - \frac{p^6\ddot{z}_2^2\mu_2^2\mu_4}{4r^6g^2}\cos(2\omega_2 t+2\gamma_2+\gamma_4) - \\ &-\frac{p^6\ddot{z}_1\ddot{z}_2\mu_1\mu_2\mu_5}{4r^6g^2}\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_5] - \frac{p^6\ddot{z}_1^2\mu_1\mu_3}{4r^6g^2}\cos(2\omega_1 t+2\gamma_1+\gamma_3),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\mu_1 = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-\omega_1^2)^2+4\varepsilon^2\omega_1^2}}, \quad \mu_2 = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-\omega_2^2)^2+4\varepsilon^2\omega_2^2}},$$

$$\mu_3 = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-4\omega_1^2)^2+16\varepsilon^2\omega_1^2}}, \quad \mu_4 = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2-4\omega_2^2)^2+16\varepsilon^2\omega_2^2}},$$

$$\mu_5 = \frac{r^2}{\sqrt{[r^2-(\omega_1+\omega_2)^2]+4\varepsilon^2(\omega_1+\omega_2)^2}},$$

$$\mu_6 = \frac{r^2}{\sqrt{[r^2-(\omega_1-\omega_2)^2]^2+4\varepsilon^2(\omega_1-\omega_2)^2}},$$

$$\gamma_1 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-\omega_1^2}, \quad \gamma_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-\omega_2^2},$$

$$\gamma_3 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-4\omega_1^2}, \quad \gamma_4 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-4\omega_2^2},$$

$$\gamma_5 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-(\omega_1+\omega_2)^2},$$

$$\gamma_6 = -\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon}{r^2-(\omega_1-\omega_2)^2}.$$

Первые два члена в выражении (9) дают систематическую погрешность, аналогичную погрешности, выраженной формулой (7). Все члены выражения (9), начиная с четвертого, представляют собой коротко периодические вынужденные колебания с частотой не ниже меньшей из частот ω_1 и ω_2, и осреднение их может быть выполнено за достаточно малый промежуток времени. Представляет интерес третий член выражения (9). При наличии в спектре возмущающих ускорений близких гармоник мы получим на выходе системы длиннопериодическую гармонику

$$\frac{p^6 \ddot{z}_1 \ddot{z}_2 \mu_1 \mu_2 \mu_6}{4r^6 g^2} \cos[(\omega_1-\omega_2)t+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_6],$$

которая обусловит длиннопериодическое «плавание» средней линии короткопериодических вынужденных колебаний.

Нерегулярные длиннопериодические колебания с достаточной точностью могут быть осреднены только за достаточно большой по сравнению с периодом колебаний маятника промежуток времени. О наличии близких гармоник в колебаниях поверхности моря говорят, например, такие явления, как «девятый вал». Во избежание погрешностей в показаниях гравиметра из-за наличия длиннопериодных гармоник наблюдения на пункте необходимо производить не менее 15—20 *мин.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Веселов К. Е. «Прикладная геофизика», вып. 26, 1960.
2. Пантелеев В. Л. Сообщение ГАИШ, № 128, Изд-во МГУ, 1963.
3. Пантелеев В. Л. Диссертация. ГАИШ, 1961.

Поступила в редакцию
1.7 1963 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии