Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

Н. П. ГРУШИНСКИЙ

О ФОРМУЛАХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЯ НУЛЬ-ПУНКТА ГРАВИМЕТРОВ

Вопрос о практике вычисления величины смещения нуль-пункта гравиметров при полевых наблюдениях и о выборе для этого наилучшей формулы не получил до сих пор необходимой ясности. Смещение нуль-пункта гравиметра вычисляется в зависимости от методики съемки либо по одному повторному определению на исходном пункте (или по одной разности измеренной и известной величин силы тяжести на пункте опорной сети), либо по повторным определениям на ряде пунктов. В обоих случаях предполагается линейное изменение его в течение рейса. В первом случае величина смещения определяется, как отношение $k=\frac{\Delta g}{\Delta t}$, где Δg — изменение показаний гравиметра на одном и том же пункте за время Δt. Для второго случая, когда повторных измерений много, пользуются различными формулами. К сожалению, ни «Временное наставление по работе с гравиметрами» [1], ни Техническая инструкция по гравиметрической разведке [2] никаких рекомендаций по учету смещения нуль-пункта не делают, равно не рекомендуют никаких формул. На практике часто применяется формула простого среднего. В ней смещение нуль-пункта в единицу времени (обычно в 1 *час*) выводится как простое среднее из величин смещения нуль-пункта, полученных по каждому измерению,

$$k=\frac{1}{n}\sum_{1}\frac{\Delta g_i}{\Delta t_i}, \tag{1}$$

где n — число пунктов, на которых произведены повторные определения, Δg_i — разность отсчетов при втором и первом измерениях, Δt_i — время между вторым и первым измерениями. Эта формула имеет существенный недостаток: для значений смещения нуль-пункта k, полученных при малых Δt, ошибка измерения может превзойти истинные значения Δg; и полученная для этого частного случая ошибочная величина смещения нуль-пункта может заметно испортить его среднее значение. Для того чтобы избежать этого, каждому частному значению величины смещения нуль-пункта, полученному по двум наблюдениям на одном и том же пункте, можно придать веса́, пропорциональные (или равные) промежуткам времени. Тогда вопрос о влиянии ошибочных частных значений нуль-пункта, полученных по малым интервалам времени Δt, был бы снят.

Мы всегда рекомендовали крайне простую, удобную и в то же время избавленную от указанных недостатков формулу весового среднего

$$k=\frac{\sum_{1}^{n}\Delta g_i}{\sum_{1}^{n}\Delta t_i}. \tag{2}$$

Эта формула получается следующим образом.

Пусть значение нуль-пункта, полученного по одному повторному наблюдению, $k_i = \frac{\Delta g_i}{\Delta t_i}$. Придадим каждому значению k_i вес $p_i = \Delta t_i$. Чтобы образовать среднее весовое, необходимо каждое k_i умножить на свой вес p_i и разделить на сумму весов. В результате получим

$$k = \frac{\sum k_i p_i}{\sum p_i} = \frac{\sum \frac{\Delta g_i}{\Delta t_i} \Delta t_i}{\sum \Delta t_i} = \frac{\sum \Delta g_i}{\sum \Delta t_i}.$$

Выводу формулы для вычисления смещения нуль-пункта посвящена статья К. В. Гладкого [3].

В этой статье критикуется формула (1) простого арифметического среднего значения смещения нуль-пункта и выводится новая формула, имеющая вид

$$k = \frac{\sum \Delta g_i \Delta t_i}{\sum \Delta t_i^2}. \tag{3}$$

Эта формула включена также в учебник по гравиметрии П. Ф. Шокина [4]. В практике она нашла ограниченное применение. Формула (3) получается как среднее весовое значение величин k в предположении, что за вес p принят квадрат времени, протекшего между первым и вторым наблюдениями на пункте. В самом деле

$$k_i = \frac{\Delta g_i}{\Delta t_i}, \text{ и если } p_i = \Delta t_i^2,$$

то

$$k = \frac{\sum k_i p_i}{\sum p_i} = \frac{\sum \frac{\Delta g_i}{\Delta t_i} \Delta t_i^2}{\sum \Delta t_i^2} = \frac{\sum \Delta g_i \Delta t_i}{\sum \Delta t_i^2}.$$

Таким образом, для вычисления смещения нуль-пункта в настоящее время применяются три формулы (1), (2), (3). Первая из них дает смещение нуль-пункта гравиметра, как простое среднее значение из величин, полученных по отдельным повторным наблюдениям. Вторая дает средний взвешенный результат с весом каждого индивидуального значения пропорциональным времени, протекшему между наблюдениями. Третья приводит также к среднему взвешенному значению с весом, пропорциональным квадрату времени.

Вопрос выбора формулы сводится, как мы видим, к назначению веса индивидуального значения смещения нуль-пункта.

Обычно за вес принимается величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки m. Измеряемой величиной в нашем случае является Δg. Если считать ошибку m определения Δg величиной постоянной, независимой от времени и определяемой только точностью гравиметра

$$m(\Delta g) = \varepsilon = \text{const}, \tag{4}$$

то ошибка определяемого единичного смещения будет $m(k) = \frac{\varepsilon}{\Delta t}$. Тогда вес определения смещения нуль-пункта из данного повторения будет $p(k) = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta t^2$, и при образовании среднего весового мы получим формулу (3). Если положить, что ошибка $m(\Delta g)$ пропорциональна корню из величины интервала времени

$$m(\Delta g) = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \tag{5}$$

т. е. с увеличением интервала времени Δt ошибка медленно возрастает — ошибка определения смещения нуль-пункта будет

$$m(k) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}}$$

и вес будет

$$p(k) = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta t.$$

При образовании среднего весового мы придем к формуле (2). Наконец, если считать, что ошибка измеряемого изменения отсчета возрастает пропорционально времени

$$m(\Delta g) = \varepsilon \Delta t,$$

то

$$m(k) = \varepsilon = \text{const}$$

и вес каждого определения $p(k) = \frac{1}{\varepsilon^2} = \text{const}$.

При образовании среднего весового значения k мы придем к равновесному значению, соответствующему формуле (1).

При малом интервале времени изменение отсчетов гравиметра будет мало, возможно, меньше ошибок наблюдения, в силу чего может быть получено совсем неточное значение величины k_i. Поэтому можно утверждать, что ошибка определения k_i зависит от Δt_i, а значит формула (1) неприменима.

Если считать, что величина смещения нуль-пункта линейная, то точность ее определения зависит от точности отсчетов гравиметра ε и от интервала протекшего времени Δt, причем эта точность связана прямой зависимостью с первым фактором и обратной — со вторым.

От того, какую выбрать степень зависимости ошибки $m(\Delta g_i)$ от Δt_i, зависит выбор формулы для вычисления смещения нуль-пункта. Только в идеальном случае можно считать, что ошибка величины изменения отсчета гравиметра за время Δt зависит только от точности отсчетной системы гравиметра (4) и не зависит от времени. В то же время мы уже показали, что нельзя считать $m(\Delta g)$ пропорциональной первой степени времени Δt, так как тогда получается, что определения величины смещения k_i по любым интервалам Δt_i равноточны, несправедливость чего показана. Естественно предположить среднее — накопление ошибок пропорционально корню квадратному из времени (5). Справедливость этого предположения подтверждается так же аналогией с практикой геодезических работ, для многих видов которых накопление ошибок происходит по закону корня квадратного (например, в нивелировках пропорционально корню квадратному из числа звеньев).

В силу всего сказанного, а также подкупающей простоты, из рассмотренных трех формул для практического применения следует рекомендовать формулу (2), а именно

$$k = \frac{\sum \Delta g_i}{\sum \Delta t_i}.$$

В случае, если интервалы времени Δt_i равны между собой, все формулы (1), (2), (3) становятся тождественными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Временное наставление по работе с гравиметрами. Гостоптехиздат, М., 1950.
2. Техническая инструкция по гравиметрической разведке. Гостехгеолиздат, М., 1961.
3. Гладкий К. В. «Разведочная и промысловая геофизика», № 17, 1957.
4. Шокин П. Ф. Гравиметрия. Геодезиздат, М., 1961.
5. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. Физматгиз, М., 1961.

Поступила в редакцию
20.9 1963 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии