Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1964

К ВОПРОСУ О РАДИАЦИОННОМ ЗАТУХАНИИ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. А. Соколов, И. М. Тернов, Ю. М. Лоскутов

После того как было показано существенное влияние квантовых флуктуаций излучения [1, 2, 3] на движение электронов в циклических ускорителях, развитие квантовой теории движения электронов наряду с классической приобрело особо важное не только теоретическое, но и практическое значение.

В недавно появившейся статье С. А. Хейфеца и Ю. Ф. Орлова [4] делается попытка квантовым путем получить не только флуктуационное возбуждение бетатронных колебаний, но и классическое затухание, используя при этом нерелятивистское приближение. Авторы этой статьи считают, что мы не смогли получить радиационное затухание ни в классическом случае (ссылаясь на нашу работу [3]), ни в квантовом случае (ссылаясь на нашу работу [2]), так как в уравнениях движения были отброшены квадратичные по r и $\frac{dr}{dt}$ члены, т. е. была произведена «параболизация» потенциальной энергии, описывающей бетатронные колебания.

В связи с этим следует заметить, что как в классическом, так и в квантовом расчетах мы действительно произвели «параболизацию» потенциальной энергии. Однако вопреки утверждениям С. А. Хейфеца и Ю. Ф. Орлова в указанных работах с помощью классической теории мы сразу же нашли выражение для радиационного затухания, полученного в [5]

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_r^2 x = -\frac{q}{1-q}\frac{\overline{W}^{\text{кл}}}{E}\dot{x} \tag{1}$$

(см. (11) [3]). С. А. Хейфец и Ю. Ф. Орлов в данном случае критиковали не наш результат, а тот, который они нам пытаются приписать.

Методами квантовой теории мы впервые [1, 2] получили формулы для возбуждения бетатронных колебаний за счет квантовых флуктуаций и, что является особенно существенным, показали, что квантовые эффекты следует учитывать при сравнительно низких энергиях $E \sim E_{1/5} = m_0c^2(m_0cR/\hbar^{1/5}$ (порядка сотен *Мэв*), а не высоких, как думали прежде $E \sim E_{1/2}$ (порядка 10^{11} *Мэв*).

В [1] мы рассматривали движение электрона в однородном магнитном поле (показатель спадания магнитного поля $q=0$), где классическое затухание должно вообще отсутствовать. Рассматривая в работе [2] квантовые флуктуации излучения электрона в аксиально-симметричном неоднородном магнитном поле $|0<q<1|$, мы наряду с выводом формул квантового возбуждения колебаний не смогли получить выражение для классического затухания. Это замечание, сделанное Хейфецом и Орловым, мы принимаем; но не согласны с обоснованием этого замечания, сводящегося к критике «параболизации» потенциальной энергии уравнения Шредингера. Заметим, что этот вопрос был подробно исследован в работе Гутброда [6]. В параболическом приближении характеризуя начальное квантовое состояние электрона квантовыми числами (l — азимутальное, s — радиальное и k — аксиальное), мы найдем, что вероятность перехода в нашем приближении из состояния l, s, k в состояние l', s', k' будет функцией этих квантовых чисел:

$$\int w_{ll',\, ss',\, kk'}(\omega)\, \delta(\omega - \omega_{nn'})\, d\omega,$$

где частота излучения

$$\omega_{nn'} = \omega_l (l' - l) + \omega_s (s' - s) + \omega_k (k' - k), \tag{2}$$

$$\omega_l = \beta\omega_0, \quad \omega_s = \sqrt{1-q}\,\omega_l, \quad \omega_k = \sqrt{q}\,\omega_l,$$

$\omega_0 = \frac{c}{R}$, а R является радиусом мгновенной равновесной орбиты. Для изменения радиального квантового числа s найдем следующее выражение:

$$\frac{ds}{dt} - \sum_{l',s',k'} (s'-s)\, w_{ll',ss',kk'} \left(1 - \omega_s (s'-s)\frac{d}{d\omega} + \frac{\omega_s^2}{2}(s'-s)^2 \frac{d^2}{d\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_s^3}{6}(s'-s)^3 \frac{d^3}{d\omega^3} + \frac{\omega_s^4}{24}(s'-s)^4 \frac{d^4}{d\omega^4} + \ldots \right) \delta(\omega - \omega_l (l'-l))\, d\omega. \tag{3}$$

В своих расчетах [2] мы ограничились лишь первым членом разложения и получили выражение только для квантового возбуждения. Оказывается, как показал Гутброд, для того чтобы получить классическое затухание, необходимо учесть еще три члена разложения. Эти члены мы упустили в наших расчетах, предполагая, что классический член должен быть основным.

Учитывая все члены разложения, для изменения квантового числа s можно получить следующее выражение:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e^2 c}{R^2 m_0 c^2 (1-q)^{3/2}} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^6 - \frac{q}{1-q}\, s\, \frac{W^{\text{кл}}}{E}, \tag{4}$$

где $W^{\text{кл}}$ — классическое выражение для энергии, излучаемой в единицу времени. Поскольку квадрат амплитуды радиальных колебаний пропорционален $\hbar s$, первый член в правой части равенства (4) (который и был получен нами в [2]) является квантовым, а второй — классическим.

Развивая этот способ, можно получить также наряду с квантовым возбуждением классическое затухание и для аксиальных (т. е. вертикальных) колебаний. Для этого при вычислении изменения аксиального квантового числа необходимо взять не один, а два члена разложения.

$$\frac{dk}{dt} = \sum_{l',s',k'} \int (k'-k)\, w_{ll',ss',kk'} \left(1 - (k'-k)\,\omega_k \frac{d}{d\omega}\right) \times$$

$$\times\, \delta(\omega - \omega_l (l'-l))\, d\omega. \tag{5}$$

Тогда, если мы возьмем не один, а два члена разложения, то наряду с квантовым возбуждением получим также и классическое затухание:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{13}{48\sqrt{3}} \frac{ce^2}{m_0 c^2 R^2 \sqrt{q}} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^4 - k\, \frac{W^{\text{кл}}}{E}. \tag{6}$$

Первый член, соответствующий квантовому возбуждению, был получен в нашей работе [7].

Таким образом, замечание С. А. Хейфеца и Ю. Ф. Орлова о происхождении классического затухания (как результата учета дополнительных к «параболизированной» потенциальной энергии членов) не может относиться к ультрарелятивистскому случаю «свободных» бетатронных колебаний. Учет ангармоничности в этом случае дает слишком малые поправки. Это стало совершенно ясным после появления работы Гутброда (1962 г.), которая, по-видимому, осталась незамеченной С. А. Хейфецом и Ю. Ф. Орловым, пославшими в печать свою работу в 1963 г.

В наших работах по синхротронному излучению были найдены также квантовые поправки к интенсивности излучения [8]

$$W^{\text{кв}} = -\gamma \frac{\hbar}{m_0 c R} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2, \tag{7}$$

где коэффициент

$$\gamma = \frac{55}{16}\sqrt{3}. \tag{8}$$

Гутброд получил несколько другое значение для этого коэффициента, который, по его вычислениям, при отсутствии бетатронных колебаний ($s=k=0$) должен равняться

$$\gamma=\frac{55}{32}\sqrt{3}\,\frac{1-\frac{5}{3}n}{1-n}. \tag{9}$$

С этим мы не можем согласиться, так как Гутброд при вычислении интенсивности излучения не учел всех членов, пропорциональных $\hbar$, и поэтому получил неправильное значение для коэффициента γ.

В заключение следует заметить, что квантовые флуктуации радиуса имеют большое практическое значение. В самом деле, если в правой части формулы (4) отбросить первый квантовый член, соответствующий квантовым флуктуациям, то квадрат амплитуды радиальных колебаний при сравнительно больших энергиях $\int\limits_0^t \frac{W\,dt}{E} \gg 1$ должен быстро обращаться в нуль. При его же учете этот квадрат будет стремиться к некоторому конечному пределу, отличному от нуля, если энергия достигает нескольких сотен *Мэв*. Что касается вертикальных (т. е. аксиальных) колебаний, то этот предел для квадрата амплитуды будет по сравнению с радиальными колебаниями содержать весьма малый множитель $\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2$, т. е. практически должен стремиться к нулю.

Однако экспериментально [9] было установлено, что амплитуда вертикальных колебаний обладает некоторым пределом, несколько меньшим по сравнению с радиальными колебаниями, но во всяком случае существенно отличным от нуля. Подобную стабилизацию вертикальных колебаний можно попытаться прежде всего объяснить дополнительным возбуждением колебаний вследствие случайных искажений магнитного поля. Однако, как было указано в [10], последняя причина не может объяснить порядок величины амплитуды вертикальных колебаний, наблюдаемых в накопителе электронов АДА.

Заметим, что для объяснения уменьшения влияния затухания, по-видимому, следует учитывать разброс вылета фотонов относительно направления движения электронов.

В самом деле, обозначая через b амплитуду вертикальных колебаний, найдем угол, под которым движется электрон относительно плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Он будет равен $\Theta \sim \frac{b}{R}$.

С другой стороны, разброс вылета фотонов практически сосредоточен внутри угла $\Delta\theta \sim \frac{m_0c^2}{E}$.

Очевидно влияние затухания по сравнению с классическим выражением $\Gamma=\frac{W}{E}$ должно начать уменьшаться, когда $\theta<\Delta\theta$, что дает $b_{\text{крит}}=R\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)$. Отсюда следует, что при энергиях порядка 400—600 *Мэв* (при $b_{\text{крит}}$ в несколько миллиметров) должно начаться уменьшение влияния классического затухания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, **25**, 698, 1953.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, **28**, 431, 1955.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **117**, 967, 1957.
4. Хейфец С. А., Орлов Ю. Ф. ЖЭТФ, **45**, 1225, 1963.
5. Robinson K. W. Phys. Rev., **111**, 343, 1958; Коломенский А. А., Лебедев А. Н. ЖЭТФ, **30**, 207, 1161, 1956.
6. Gutbrod F. Zs. f. Pys., **168**, 177, 1962.
7. Соколов А. А., Тернов И. М., Страховский Г. М. ЖЭТФ, **31**, 439, 1956.
8. Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. ЖЭТФ, **24**, 249, 1953.
9. Korolev F. A. A. al. Nuovo Cimento, **18**, 1033, 1960.
10. Бернардини К. и др. Доклад о работе электронно-позитронного накопительного кольца (АДА). Международная конференция по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1963.

Поступила в редакцию
7.12 1963 г.

Кафедра
теоретической физики