Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1964

С. А. ПОДОСЕНОВ

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Рассматривается вопрос о движении газа в центрально-симметричном поле тяжести, указывается на возможность происхождения планетарных туманностей за счет нестационарного истечения газа из звезд типа «красные гиганты».

Задача о разлете газа с учетом поля тяжести представляет интерес для космогонии и астрофизики, поскольку позволяет выяснить, какая масса газа и при какой начальной энергии может покинуть навсегда тело, из которого она истекает. В настоящей работе делается попытка, хотя и в идеализированном случае, обосновать происхождение планетарных туманностей за счет истечения газа из красных гигантов и сверхгигантов. Согласно И. С. Шкловскому, внешняя оболочка гиганта отделяется от плотного горячего ядра в виде планетарной туманности. Истечение газа из красного сверхгиганта было обнаружено А. Дейчем (США) [см. 1]. В нашей работе не рассматривается источник энергии, приводящий к выбросу газовых масс. Картина движения предполагается наиболее простой — сферической. Задача может быть поставлена следующим образом.

Между двумя концентрическими сферами радиусов l_0 и r_0 имеется в момент времени $t<0$ газ, находящийся в поле тяжести ядра массы M_0 в состоянии адиабатического равновесия. Вне сферы радиуса r_0 находится сильно разреженная атмосфера. К моменту времени $t=0$ в интервале (l_0, r_0) вследствие выделения энергии повышается давление.

Требуется определить возникающее движение газа вне указанного объема. С периферии сферы будет происходить истечение газа в атмосферу, плотность которой гораздо меньше, чем начальная плотность разлетающегося газа. В глубь сферы пойдет волна разрежения. Через некоторый промежуток времени фронт волны разрежения достигнет ядра, после чего начнет распространяться новая отраженная волна. Аналитическое решение поставленной задачи, по-видимому, невозможно, поэтому воспользуемся приближенным решением. Во-первых, будем считать, что энтропия $S=\text{const}$, т. е. отсутствует диссипация энергии. Мы исключаем из рассмотрения ударные волны. Будем исходить из уравнений, описывающих изэнтропическое движение газа, состояние которого

$$p = A\rho^k,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{a}{r^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + 2\rho\frac{u}{r} = 0.$$

Здесь u — скорость среды, p — давление, ρ — плотность; $a = GM_0$, где G — гравитационная постоянная, M_0 — масса ядра, k — показатель степени изэнтропы.

Введем $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ (c — скорость звука). Тогда, проделав ряд несложных преобразований, придем к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi(k+1) + \Phi(3-k)}{4}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{a}{r^2} + \frac{\psi^2 - \Phi^2}{4r}(k-1) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\psi(3-k) + \Phi(k+1)}{4}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{a}{r^2} - \frac{\psi^2 - \Phi^2}{4r}(k-1) = 0.$$

Здесь

$$\psi = u + \frac{2}{k-1}c; \quad \Phi = u - \frac{2}{k-1}c.$$

Если в системе (2) положить $a=0$, то получим систему, описывающую разлет газа в пустоту без учета поля тяжести. Эта задача решена и исследована К. П. Станюковичем. В ней показано, что величина $\psi = \text{const}$. Так как в системе (2) при достаточно больших расстояниях полем можно пренебречь, то вторым допущением поставленной задачи будет, что

$$\psi \approx \text{const}, \tag{3}$$

что оправдано для больших r. В настоящей работе учитывается гравитационное взаимодействие газа только с массой ядра без учета взаимодействия между различными слоями газа.

Перейдем к непосредственному решению поставленной задачи. Используя равенство (3), пренебрегая производными $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial r}$, получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\psi(3-k) + \Phi(k+1)}{4}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2a}{r^2} = 0. \tag{4}$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$c_1 = \frac{\psi(3-k)}{4}\Phi + \frac{k+1}{8}\Phi^2 - \frac{2a}{r},$$

$$c_2 = t + 2a\int\frac{d\Phi}{\left[\frac{\psi(3-k)}{4}\Phi + \frac{k+1}{8}\Phi^2 - c_1\right]^2}.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения может быть записано в форме

$$t = \frac{128a}{(k+1)^2}\left\{\frac{1}{4A_0^3}\ln\left|\frac{\Phi + \frac{\psi(3-k)}{k+1} - A_0}{\Phi + \frac{\psi(3-k)}{k+1} + A_0}\right| + \right.$$

$$+\frac{1}{2A_0^2}\frac{\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}}{\left[\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}\right]^2-A_0^2}\Bigg\}+\chi(c_1), \tag{5}$$

$$A_0=\sqrt{2\left(\frac{3-k}{k+1}\psi\Phi+\frac{\Phi^2}{2}-\frac{8a}{(k+1)r}\right)+\frac{\psi^2(3-k)^2}{(k+1)^2}}.$$

Хотя энергия в газе и возросла, в момент $t=0$ он находился в состоянии равновесия. Тогда 1-е уравнение системы (1), считая, что $c=c(r)$ и $u=0$, можно представить в виде $\frac{2}{k-1}c\frac{\partial c}{\partial r}=-\frac{a}{r^2}$, откуда следует, что

$$c^2=c_H^2+(k-1)\left\{\frac{a}{r}-\frac{a}{r_0}\right\}. \tag{6}$$

Здесь c_H — начальная скорость звука при $r=r_0$ в момент времени $t=0$. В состоянии равновесия

$$\psi=-\Phi=\frac{2}{k-1}\sqrt{c_H^2+(k-1)a\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}.$$

Так как наше решение справедливо с момента времени $t\geqslant 0$ во всем интервале римановского решения, т. е. не затронутого отраженной волной, то представляется возможным определить const в выражении (3). Зная, что $\psi\approx$const только для больших значений r, придем к соотношению

$$\mathrm{const}=\frac{2}{k-1}\sqrt{c_H^2-\frac{(k-1)a}{r_0}}\geqslant 0. \tag{7}$$

Произвольную функцию $\chi(c_1)$ определим из условия: при $t=0$ должно быть $r=r_0$.

Решение уравнения (4) с заданным условием имеет вид

$$t=\frac{128a}{(k+1)^2}\left\{\frac{1}{4A_0^3}\ln\left|\frac{\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}-A_0}{\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}+A_0}\right.\right.\times$$

$$\times\left.\frac{\sqrt{\left(\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}\right)^2-\dfrac{16a}{k+1}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}+A_0}{\sqrt{\left(\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}\right)^2-\dfrac{16a}{k+1}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}-A_0}\right|+\frac{1}{2A_0^2}\times$$

$$\left.\times\frac{\left(\Phi+\dfrac{3-k}{k+1}\psi\right)(k+1)r-(k+1)r_0\sqrt{\left(\Phi+\dfrac{\psi(3-k)}{k+1}\right)^2-\dfrac{16a}{k+1}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}}{16a}\right\}. \tag{8}$$

Займемся исследованием полученного решения. Рассмотрим асимптотическое выражение для волны разрежения. В интервале римановского решения решение уравнения (8) существует лишь для конечного значения времени t. При $t \to \infty$ получим особое решение, которое будет описывать движение фронта истекающего газа, при $r \to \infty$. При $t \to \infty$ $A_0 \to 0$. Приравнивая A_0 нулю, получим

$$\Phi_{1,2} = \pm 4\sqrt{\frac{a}{(k+1)r}} - \frac{3-k}{k+1}\psi.$$

Выбираем

$$\Phi = \Phi_1 = 4\sqrt{\frac{a}{(k+1)r}} - \frac{3-k}{k+1}\psi.$$

Для малых значений A_0 получим

$$\frac{1}{A_0^2} = \frac{1}{\left(4\sqrt{\frac{a}{(k+1)r}} - \frac{3-k}{k+1}\psi\right)8\sqrt{\frac{a}{(k+1)r}}\varepsilon},$$

где $0 < |\varepsilon| \ll 1$; так как $\frac{1}{A_0^2} > 0$, то при $\Phi_1 > 0$ должно быть $\varepsilon > 0$, а при $\Phi_1 < 0$ соответственно $\varepsilon < 0$. Учитывая это, опуская громоздкие, но простые вычисления, получим асимптотическую формулу

$$t = \frac{1}{3\sqrt{(k+1)a}} \frac{r^{3/2} - rr_0^{1/2}}{(1-\delta)\, Sgn\,(1-\delta)} = \frac{1}{3\sqrt{(k+1)a}} \frac{r^{3/2} - rr_0^{1/2}}{|1-\delta|}. \tag{9}$$

Здесь введено обозначение $\delta = \frac{3-k}{4(k+1)}\psi\sqrt{\frac{(k+1)r}{a}}$.

Полагая $r \to \infty$, получим

$$\frac{dr}{dt} = u_\infty - c_\infty = \bar{\psi} = \frac{3}{4}(3-k)\psi,$$

так как $c_\infty = 0$, потому что фронт истекающего газа граничит с пустотой, получим

$$u_\infty = \bar{\psi} = \frac{3(3-k)}{2(k-1)}\sqrt{c_H^2 - (k-1)\frac{a}{r^0}}. \tag{10}$$

Найдем массу газа, покидающую тело. Для этого нам нужно найти аналитическое выражение для отраженной волны. Так как отраженная волна будет распространяться по возмущенному газу, то величиной $\frac{\partial p}{\partial r}$ можно пренебречь [2], поэтому систему (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{a}{r^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{\rho u}{r} = 0.$$

Для достаточно большого t и $r \gg r_0$ получим $u = \frac{r}{t}$:

$$\rho = \frac{F\left(\frac{r}{t}\right)}{r^2 t}.$$

Произвольную функцию $F\left(\frac{r}{t}\right)$ будем искать в виде

$$F\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{DM_H\left(1 - \frac{r^2}{t^2}\cdot\frac{1}{\overline{\psi}^2}\right)^\alpha}{c_H}.$$

Таким образом, получим следующее выражение для плотности:

$$\rho(r, t) = \frac{DM_H\left(1 - \frac{r^2}{t^2}\frac{1}{\overline{\psi}^2}\right)^\alpha}{c_H r^2 t}. \tag{12}$$

Здесь M_H — начальная масса газа в (l_0, r_0) при $t=0$, D, α — произвольные постоянные. По аналогии с задачей о разлете газового шара в пустоту [2] положим $\alpha = \frac{3-k}{2(k-1)}$. Из теории волн отражения известно, что в области римановского решения масса газа равна нулю. Так как фронт отраженной волны движется по закону $\frac{dr}{dt} = u + c$, то на бесконечности скорости среды в отраженной и бегущей волне совпадают, т. е. $\frac{r}{t} = \overline{\psi} = u_\infty$, если $r \to \infty$, $t \to \infty$. Это условие отражено в (12). Действительно, при $\frac{r}{t} = \overline{\psi}$ получим $\rho(r, t) = 0$. Очевидно, что при $t \to \infty$ часть массы газа уйдет на бесконечность, остальная займет объем некоторого конечного радиуса. Определим массу, ушедшую от тела

$$M_\infty = 4\pi \int_{r_k}^{\infty} r^2 \rho dr = \frac{4\pi DM_H}{c_H} \int_0^{\overline{\psi}} \left(1 - \frac{r^2}{t^2}\frac{1}{\overline{\psi}^2}\right)^\alpha \frac{dr}{t}.$$

Здесь r_k — максимальная величина подъема газа. Интегрируя, получим

$$M_\infty = \frac{2\pi DM_H\overline{\psi}}{c_H} B\left(\frac{1}{2},\ \alpha + 1\right), \tag{13}$$

где $B\left(\frac{1}{2},\ \alpha + 1\right)$ — бета-функция.

Кинетическая энергия, унесенная этой массой,

$$E_\infty = \frac{1}{2} \int_0^{M_\infty} u^2 dM = \frac{\pi DM_H\overline{\psi}^3}{c_H} B\left(\frac{3}{2},\ \alpha + 1\right). \tag{14}$$

Постоянную D определим из следующих соображений. Если в формуле (14) положить $a=0$, то получим решение задачи разлета газового шара в пустоту без учета гравитационного поля. Очевидно, в этом случае

$E_\infty = E_H = \frac{M_H c_H^2}{k(k-1)}$, т. е. вся начальная энергия при $t \to \infty$ перейдет в кинетическую энергию. Откуда следует

$$D = \frac{8(k-1)^2}{27\pi k(3-k)^3 B\left(\frac{3}{2}, \alpha+1\right)}. \tag{15}$$

Подставляя значение D из (15) в формулу (13), используя соотношения

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \; \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

получим

$$M_\infty = \frac{48M_H\sqrt{c_H^2 - (k-1)\frac{a}{r_0}}}{27(3-k)^2 c_H}. \tag{16}$$

Решение неприменимо при $k=3$. Так как решение было получено путем ряда приближений, то оно не обладает высокой точностью. При $k=\frac{5}{3}$, что соответствует одноатомному газу, решение более точно, чем для других значений k. Действительно, полагая $k=\frac{5}{3}$, $a \to 0$, получим $M_\infty = M_H$.

Вычислим количество движения, уносимое газом,

$$I_\infty = \int_0^{M_\infty} u dM = \frac{2\pi D M_H \overline{\psi}^2}{c_H} B(1, \alpha+1) =$$

$$= \frac{16(k-1)^2 \overline{\psi}^2 2\Gamma\left(\frac{5}{2}+\alpha\right) M_H}{27\sqrt{\pi}\, k(3-k)^3 c_H \Gamma(2+\alpha)}.$$

Считая, что α принимает целочисленные значения, получим

$$I_\infty = \frac{M_H\left(c_H^2 - (k-1)\frac{a}{r_0}\right)(4+2\alpha)!}{3c_H k(3-k)(\alpha+1)!(\alpha+2)!\, 2^{1+2\alpha}}. \tag{17}$$

Введем среднюю скорость разлетающегося газа по формуле

$$\overline{u}_\infty = \frac{I_\infty}{M_\infty}, \text{ что дает}$$

$$\overline{u}_\infty = \frac{3(3-k)(4+2\alpha)!\sqrt{c_H^2 - (k-1)\frac{a}{r_0}}}{k(\alpha+1)!(\alpha+2)!\, 2^{5+2\alpha}}. \tag{18}$$

Для контроля полученных соотношений напишем выражение для количества движения через M_∞ и E_∞. Учитывая (14) и (15), получим

$$E_\infty = \frac{8(k-1)^2\overline{\psi}^3 M_H}{27(3-k)^3 k c_H} = \frac{M_H\left(c_H^2 - (k-1)\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}}{k(k-1)c_H}.$$

Тогда получим выражение для количества движения в виде

$$I_\infty = \sqrt{2M_\infty E_\infty}\xi.$$

Здесь

а) $\xi = \dfrac{(4+2\alpha)!\sqrt{\dfrac{k-1}{2k}}}{(\alpha+1)!\,(\alpha+2)!\,2^{3+2\alpha}}$ при целочисленных значениях α;

б) $\xi = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{5}{2}+\alpha\right)}{\Gamma(\alpha+2)}\sqrt{\dfrac{k-1}{2k}}$ при любых значениях α. Так как $\sqrt{\dfrac{k-1}{2k}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}$, то для случая а) получим

$$\xi = \sqrt{2\alpha+3}\,\frac{(2\alpha+1)!}{2^{2\alpha+1}\,\alpha!\,(\alpha+1)!}.$$

Мы рассматриваем картину движения для достаточно больших значений r, когда можно пренебречь гравитационным притяжением, поэтому должно выполняться следующее соотношение: $\xi=\xi_1$, где ξ_1 — величина, полученная из точного решения для волны отражения при отсутствии поля. Согласно К. П. Станюковичу [2],

$$\xi_1 = \sqrt{2\alpha+3}\,\frac{(2\alpha+1)!}{2^{2\alpha+1}\alpha!\,(\alpha+1)!},$$

что в точности соответствует найденному нами значению ξ и является контролем наших вычислений.

Проанализируем полученные результаты, считая, что газ получил свою скорость при выбросе из красного гиганта. Будем считать, что $k=\frac{5}{3}$. Из формулы (10) получим, что передний фронт движется со скоростью

$$u_\infty = 3\sqrt{c_H^2 - \frac{2}{3}\frac{a}{r_0}} \qquad (t\to\infty).$$

Средняя скорость истечения определяется из (18)

$$\overline{u}_\infty = \frac{9}{8}\sqrt{c_H^2 - \frac{2}{3}\frac{a}{r_0}} \qquad (t\to\infty).$$

Таким образом, внешние слои газа движутся с бо́льшими скоростями, чем внутренние.

Величину $\frac{2}{3}\frac{a}{r_0}$ представим для удобства в виде

$$\frac{2}{3}\frac{a}{r_0} = 1{,}4\cdot 10^5\,\frac{M_0}{M_\odot}\,\frac{r_\odot}{r_0}\,\frac{км^2}{сек^2}.$$

Мы приняли, что на поверхности солнца ускорение $g_\odot = 0{,}3\,\frac{км}{сек^2}$, $r_\odot = 7\cdot 10^5$ **км**. Здесь $M_\odot$ — масса солнца, $r_\odot$ — радиус солнца.

Из формулы (16) следует

$$\frac{M_\infty}{M_\odot} = \frac{M_H}{M_\odot}\sqrt{1 - 1{,}4\cdot 10^5 \frac{M_0 r_\odot}{M_\odot r_0}\frac{1}{c^2{}_H}}. \qquad (19)$$

Если считать, что $u_\infty \approx 20\frac{км}{сек}$ [1], $\frac{M_\infty}{M_\odot} = 0{,}1$, что соответствует планетарной туманности средней величины, то получим следующие соотношения:

$$c_H \approx \frac{M_H}{M_\odot}70, \quad 50 \approx \left(\frac{M_H}{M_\odot}\right)^2 (70)^2 - 1{,}4\cdot 10^5 \frac{M_0 r_\odot}{M_\odot r_0}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{r_\odot}{r_0} \approx \frac{7}{200}\frac{(M_* - M_0)^2}{M_0 M_\odot}. \qquad (20)$$

Здесь M_* — масса звезды, $M_H = M_* - M_0$.

Полученная формула применима при условии, что $M_H < M_0$. Это следует из того, что мы не учитывали взаимодействие между различными слоями газа, а учитывали взаимодействие газа лишь с ядром. При $M_H > M_0$ формулу (20) следует видоизменить. Зная, что $M_\infty \ll M^*$, $M_H > M_0$, получим

$$\frac{r_\odot}{r_0} \approx \frac{7}{200}\frac{(M_* - M_0)^2}{M_* M_\odot}. \qquad (21)$$

Таким образом, в формуле (21) мы учли, хотя и довольно грубо, поправку на взаимодействие между различными слоями газа.

1-й случай, когда $M_H < M_0$.

Считая, что звезда красный гигант, положим $M_* = 1{,}3 M_\odot$, $M_H = 0{,}3 M_\odot$; откуда $M_0 = M_\odot > M_H$. Отсюда следует, что $r_0 \approx 100\, r_\odot$, т. е. радиус по порядку величины также совпадает с радиусом гиганта.

2-й случай, когда $M_H > M_0$.

$$\text{Пусть } 1{,}3\, M_\odot \leqslant M_* \leqslant 2M_\odot, \quad 0{,}3\, M_\odot \leqslant M_0 \leqslant 0{,}6 M_\odot, \qquad (22)$$

откуда, используя (21), получим:

$$r_0 \approx 37 r_\odot \text{ для } (M_* = 1{,}3 M_\odot,\ M_0 = 0{,}3 M_\odot),$$

$$r_0 \approx 30 r_\odot \text{ для } (M_* = 2M_\odot,\ M_0 = 0{,}6 M_\odot),$$

$$r_0 \approx 20 r_\odot \text{ для } (M_* = 2M_\odot,\ M_0 = 0{,}3 M_\odot).$$

Таким образом, при заданных в (22) условиях мы получили соотношения между массами и размерами звезд-гигантов. Другими словами, мы указали на возможность происхождения планетарных туманностей за счет гигантов. Конечно, полученные соотношения не обладают большой точностью и могут быть применимы лишь для полукачественного объяснения извержения газовых масс звездами.

В заключение выражаю благодарность проф. К. П. Станюковичу, под руководством которого была проделана данная работа, и проф. С. Б. Пикельнеру за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикельнер С. Б. Физика межзвездной среды, гл. 1, § 11; гл. 5, § 33. ИЛ, М., 1959.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды, гл. 10, § 63; гл. 5, § 18; гл. 13, § 77. Физматгиз, М., 1955.

Поступила в редакцию
26. 12 1962 г.

Кафедра
теоретической физики