

М. К. ЖЕКАМУХОВ

## СТАЦИОНАРНОЕ ВРАЩЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ГАЗОВОЙ МАССЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается вращение разреженной гравитирующей газовой массы в магнитном поле без учета сил давления.

Решения уравнений газомангнитной динамики с учетом конечной проводимости среды получены для трех случаев, когда векторы магнитного поля в цилиндрической системе координат имеют вид  $\vec{H}(H_r, H_\phi, 0)$ ,  $\vec{H}(0, 0, H_z)$ ,  $\vec{H}(0, H_\phi, 0)$ .

Рассмотрены также частные случаи вращения с учетом сил давления.

Рассмотрим стационарное осесимметрическое вращение разреженной гравитирующей газовой массы во внутреннем магнитном поле, когда можно пренебречь силами давления. Линейные размеры космических газовых масс намного превосходят длину свободного пробега частиц газа, поэтому, несмотря на малую плотность, их можно рассматривать как сплошную среду, поведение которой описывается системой уравнений газомангнитной динамики.

Космические газовые массы, как правило, высоко ионизированы излучением ярких звезд и, следовательно, являются хорошими электропроводниками. Обычно при изучении их полагают проводимость равной бесконечности. Это условие особенно хорошо выполняется для газовых масс, плотность которых сравнительно велика.

В дальнейшем будем полагать для разреженной среды проводимость достаточно большой, но конечной.

Ограниченная проводимость приводит к диссипации магнитного поля, вследствие чего оно с течением времени затухает. Время затухания  $\sim 4\pi\delta L^2$ , где  $L$  — длина порядка размера области. Отсюда следует, что для космических газовых масс, занимающих огромную область пространства, время затухания магнитного поля намного превосходит возраст Галактики. Поэтому, несмотря на конечную проводимость среды, магнитное поле можно считать постоянным во времени.

Уравнения газомангнитной динамики в рассматриваемом случае имеют вид:

$$(\vec{u}\nabla)\vec{u} + \frac{1}{4\pi\rho}[\vec{H}\text{rot}\vec{H}] = g \text{ grad } V, \quad (1)$$

$$\text{rot}[\vec{u}\vec{H}] + \lambda\Delta\vec{H} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta V = 4\pi\rho G. \quad (4)$$

Здесь  $V$  — гравитационный потенциал,  $\lambda = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ , где  $\sigma$  — электропроводность вещества,  $\rho$  — плотность газа. Остальные обозначения общеприняты.

Решение уравнений (1) — (4) в общем случае представляет большие трудности, поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев, соответствующих различным частным видам магнитных силовых линий.

В дальнейшем удобнее пользоваться цилиндрической системой координат, в которой ось  $z$  совпадает с осью симметрии, а начало координат — с центром масс.

Будем рассматривать три случая.

1. Вектор напряженности магнитного поля имеет вид  $\vec{H}(H_r, H_\varphi, 0)$ . В этом случае уравнения (1) — (4) запишутся в виде

$$-\frac{v^2}{r} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial H_\varphi^2}{\partial r} + r \frac{H_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{2}{r} Gm, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} - \frac{H_r}{r^3} = 0, \quad (8)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{H_\varphi}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (vH_r) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dm}{dr} = 2\pi\rho r^n. \quad (10)$$

Здесь  $v$  — вращательная скорость,  $m$  — масса газа в объеме радиуса  $r$ ,  $n=1$  и  $n=2$  соответственно для цилиндрической и сферической газовых масс. Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. Система уравнений (5) и (10) имеет решение

$$H_r = \frac{a}{r}; \quad H_\varphi = \frac{b}{r}; \quad v = c, r; \quad \rho = \frac{c_1^2}{2\pi G} = \text{const},$$

где  $a, b, c$  — некоторые постоянные.

Из этих решений следует, что компоненты  $H_r$  и  $H_\varphi$  магнитного поля на оси вращения обращаются в бесконечность. Это, казалось бы, противоречит закону сохранения магнитного потока, выраженного формулой  $\frac{d}{dt} \int B n d\sigma = 0$ .

Но при изображении магнитного поля в виде магнитных «силовых линий», как показано в [7], надо проявлять осторожность.

Магнитные поля рассматриваемого типа изучались в [8]. В этой работе показано, что условие  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  не влечет замкнутости магнитных

силовых линий. Силовые линии могут иметь бесконечную длину в конечном объеме. Они могут начинаться или кончаться в особой точке (линии) поля, в которой  $\vec{H}=0$ .

Второй член в уравнении (5) обращается в нуль, т. е. магнитное поле не влияет на уравнение движения. На скорость оказывает влияние радиальная составляющая вектора напряженности магнитного поля.

Легко видеть, что при  $H_\phi=0$  полученные решения системы уравнений (5) — (10) останутся неизменными.

Газовая масса с постоянной плотностью вращается как твердое тело с очень малой угловой скоростью вращения:  $\omega = \sqrt{2\pi G\rho}$ .

Если  $\rho$  по порядку величины равна  $\sim 10^{-22}$  г/см<sup>3</sup>, то  $\omega$  будет иметь порядок величины  $10^{-14}$ — $10^{-15}$  сек<sup>-1</sup>. Ограничившись нерелятивистскими скоростями  $v \sim 10^8$  см/сек, можно получить, что размеры газового облака должны быть порядка  $10^{22}$ — $10^{23}$  см, что значительно больше размеров Галактики.

В решениях уравнений (1) — (4) нигде не фигурирует проводимость среды  $\sigma$ . Это объясняется тем, что в космических газовых массах величина  $\sigma$  непосредственно почти не влияет на движение. Резкое изменение  $\sigma$  не вызывает заметного изменения магнитного поля, так как  $\sigma$  входит только как множитель во второй член уравнения (2), который при больших размерах газового облака значительно меньше первого члена.

2. Напряженность магнитного поля имеет вид  $\vec{H}(0,0H_z)$ .

Уравнения движения запишем в следующем виде:

$$-\frac{v^2}{r} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial^2 H_z^2}{\partial r^2} = -\frac{m}{r^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0, \quad (12)$$

$$m = 4\pi G \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (13)$$

Уравнение (12) имеет решение

$$H_z = A \ln r + B, \quad (14)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные.

Реально рассматриваемая задача описывает вращение экваториальной области разреженного космического газового облака, имеющего приблизительно сферическую форму.

Как видно из (14), магнитные силовые линии имеют противоположные направления вблизи оси вращения и на периферии. На рис. 1 указан вид магнитных силовых линий. Система уравнений (11) — (13) является незамкнутой. Чтобы решить ее, нужно добавить еще одно соотношение между переменными  $H_z$ ,  $\rho$  и  $r$ . Поскольку в космических условиях конечная проводимость существенно не влияет на движение газа, то при достаточно большой проводимости можно считать, что имеет место приближенно интеграл «вмороженности», т. е.

$$H_z = b\rho. \quad (15)$$

Тогда

$$\rho = \frac{1}{b} (A \ln r + B). \quad (16)$$

Рассмотрим простейший случай, когда  $b = \text{const}$  во всем объеме газа, что соответствует изэнтропическому течению. При сделанных допущениях для  $v$  получится следующее выражение:

$$v = \sqrt{\frac{Ab}{4\pi} + \frac{4\pi G}{b} r^n \left[ A \left( \frac{\ln r}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \frac{B}{n+1} \right]}.$$

$H_z$  и  $\rho$  на оси вращения имеют бесконечно большие значения. Это обстоятельство можно интерпретировать физически следующим образом. Внутри вращающейся газовой массы имеется неподвижное плотное ядро (звезда), линейные размеры которого значительно меньше размеров рассматриваемой области, в котором напряженность магнитного поля и плотность среды намного больше, чем окружающая разреженная газовая масса. Подобная картина наблюдается в планетарных туманностях.

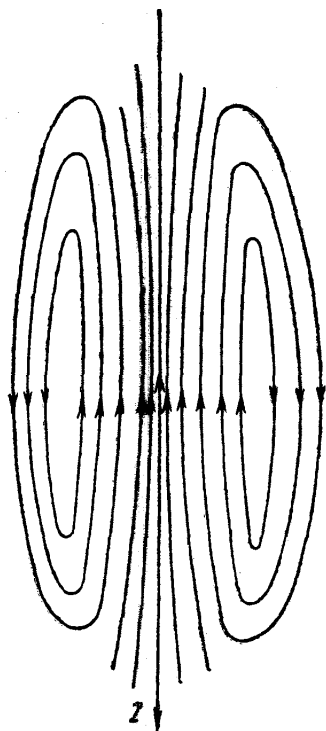


Рис. 1

Если, например, напряженность магнитного поля в центре звезды принять равной  $\sim 10^5$  гаусс, а в разреженной газовой массе  $\sim 10^{-5}$  гаусс, что вполне допустимо, то напряженность поля в центре на 10 порядков больше, чем на периферии.

Плотность в центре звезды может иметь значение  $10^5 - 10^8$  г/см<sup>3</sup> и более, а в разреженной газовой массе  $\rho \sim 10^{-22} - 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>, т. е. плотность внутри неподвижного ядра на 27—30 порядков больше, чем на периферии.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть при  $r = 10^{10}$  см  $H = 10^4$  гаусс,  $\rho = 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup> при  $r = 10^{20}$  см  $H = 0$ . Для этих граничных условий  $A = -\frac{10^8}{\ln 10}$ ,  $B = 10^4$ ,  $b = 10^9$ .

Тогда радиус неподвижного сферического ядра будет примерно  $10^{10} - 10^{11}$  см.

В рассматриваемом случае газовая масса занимает область, сравнимую с Галактикой. Поэтому предположение (15) вполне справедливо.

Поскольку внутри ядра плотность достаточно велика, то интересно рассмотреть ту же задачу с учетом давления. Для политронного газа, уравнение состояния которого задается формулой  $p = D\rho^\gamma$ , где  $D, \gamma$  — постоянные, легко получить решение (11) — (13). При этом картина движения качественно будет такая же, как и в случае разреженного газа. Для скорости  $v$  с учетом давления получится следующая формула:

$$v = \sqrt{\frac{Ab}{4\pi} + \frac{A\gamma D}{b^\gamma} (A \ln r + B)^{\gamma-1} + \frac{4\pi G}{b} r^n \left[ A \left( \frac{\ln r}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \frac{b}{n+1} \right]}.$$

Для политронного газа радиус неподвижного ядра будет больше, чем для разреженного газа, причем чем больше  $\gamma$ , тем больше этот радиус.

Если магнитное поле постоянно во всем объеме газа, то в полученных выше формулах нужно положить  $A=0$ . В этом случае

$$v = \sqrt{\frac{4\pi G}{b} \frac{B}{n} r^n}.$$

Плотность среды везде постоянна и равна  $\frac{B}{b}$ . При  $n=2$  газовая масса вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью, равной  $\sqrt{\frac{4\pi GB}{3b}}$ . При  $n=1$  вращение будет неоднородным.

В частности, при  $v=0$  газовая масса, в которой плотность и напряженность магнитного поля постоянны, будет находиться в равновесии под действием сил давления и гравитации: Гравитационная устойчивость такой конфигурации была исследована в [9].

3. Напряженность магнитного поля имеет вид  $\vec{H}(0, H_\varphi, 0)$  (магнитные силовые линии представляют собой концентрические окружности с центрами на оси симметрии).

Уравнения движения запишем в виде:

$$-\frac{v^2}{r} + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{H_\varphi}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{H_\varphi}{r^2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -4\pi G\rho. \quad (19)$$

Легко видеть, что (18) имеет решение

$$H_\varphi = c_1 r + c_2 r^{-1}.$$

Как и в случае 2, будем считать, что приближенно имеет место интеграл «вмороженности», т. е.  $H_\varphi = \rho b r$ , и что  $b = \text{const}$  во всем объеме газа.

Для  $v$  получим следующее выражение:

$$v = \sqrt{\left( \frac{bc_1}{2\pi} + \frac{4\pi Gc_1}{b} \right) r^2 + \frac{4\pi Gc_2}{b}}$$

в случае центральной симметрии и

$$v = \sqrt{\left( \frac{bc_1}{2\pi} + \frac{4\pi Gc_1}{b} \right) r^2 + \frac{4\pi Gc_2}{b} \ln r}$$

в случае бесконечного цилиндра.

Для сферического газового облака нужно положить  $c_2=0$ , в противном случае скорость на оси вращения будет отлична от нуля, что физически бессмысленно. Газовая масса будет вращаться как твердое

тело с угловой скоростью  $\sqrt{\frac{bc_1}{2\pi} + \frac{4\pi Gc_1}{3b}}$  и с постоянной плотностью

$$\rho = \frac{c_1}{b}.$$

В случае цилиндрической газовой массы имеется плотный цилиндрический столб, вокруг которого вращается разреженный газ.

Легко обобщить рассмотренную задачу на случай плотного поли-  
тропного газа, уравнение состояния которого задается формулой (16).

Для  $v$  получим выражения

$$v = \sqrt{\left(\frac{bc_1}{2\pi} + \frac{4\pi Gc_1}{3b}\right)r^2 + D\gamma r^{\gamma-1}\left(\frac{c_1}{b}\right)^{\gamma-2}}$$

и

$$v = \sqrt{\left(\frac{bc_1}{2\pi} + \frac{4\pi Gc_1}{3b}\right) + r^2 D\gamma^3 - \gamma \left(\frac{c_1 r^2}{b} + \frac{c_2}{b}\right)^{\gamma-2} + \frac{4\pi Gc_2}{b} \ln r}$$

соответственно для сферической и цилиндрической газовых масс. При  $\gamma \ll 3$  для цилиндрического газового столба картина будет такой же, как и для разреженного газа. При  $\gamma > 3$  нужно положить  $c_2 = 0$ . Как для сферического, так и для цилиндрического газового столба вращение будет неоднородным — различные слои газа, имеющего постоянную плотность, будут вращаться с различными угловыми скоростями.

В заключение автор выражает благодарность проф. К. П. Станюковичу за полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую газодинамику. Физматгиз, М., 1958.
2. Гуревич Л. Э. Эволюция звездных систем. Сб. «Вопросы космогонии». Физматгиз, т. II, 1954.
3. Каплан С. А. Межзвездная газодинамика. Физматгиз, М., 1958.
4. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. ИЛ, М., 1959.
5. Пикельнер С. Б. Введение в космическую электродинамику. Физматгиз, М., 1961.
6. Сыроватский С. И. «Успехи физических наук», 62, вып. 3, 247, 1957.
7. Elsasser W. M. «J. Phys.» (USA), 23, 590, 1955, 24, 85, 1956. Перевод: «Успехи физических наук», 64, вып. 3, 1957.
8. McDonald K. L. Am. J. Phys., 22, 586, 1954.
9. Chandrasekhar S., Fermi E. Astrophys. J., 118, 116, 1953. Перевод: «Проблемы современной физики», вып. 2, 1954.

Поступила в редакцию  
13. 4 1963 г.

Кафедра  
теоретической физики